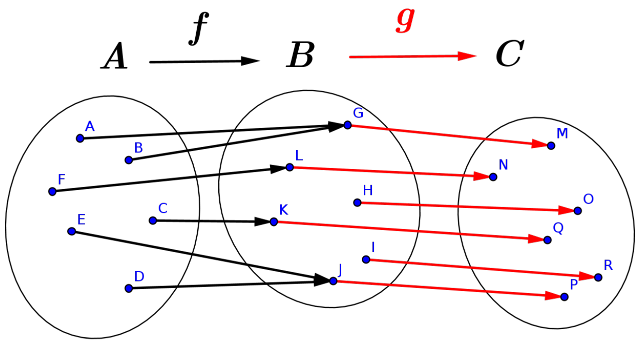
**Ejercicio 1** *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama*




*Calcular $g \circ f$*
**Solución:**
*$g \circ f$ está dada por:*

$$(g \circ f)(A) = M; (g \circ f)(B) = M; (g \circ f)(C) = Q; (g \circ f)(D) = P; (g \circ f)(F) = N.$$

**Ejercicio 2 (Composición de funciones)** *Para los siguientes pares de funciones definidas en $\mathbb{R}$ calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.*

1. a) $f(x) = 2x + 1,$ $\qquad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
   **Solución:**
   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^3 - (2x+1)^2 - 4 = 8x^3 + 8x^2 + 2x - 4.$
   - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^3 - x^2 - 4) + 1 = 2x^3 - 2x^2 - 7.$

   b) $f(x) = x^2 + x + 4,$ $\qquad g(x) = \cos(x)$
   **Solución:**
   - $(g \circ f)(x) = \cos(x^2 + x + 4).$
   - $(f \circ g)(x) = \cos^2(x) + \cos(x) + 4.$

   c) $f(x) = x^3,$ $\qquad g(x) = \frac{x}{x^4+5}$
   **Solución:**
   - $(g \circ f)(x) = \frac{x^3}{x^{12}+5}.$
   - $(f \circ g)(x) = \left(\frac{x}{x^4+5}\right)^3.$

2. a) $f(x) = |x+1|,$ $\qquad g(x) = |2x|$
   **Solución:**
   - $(g \circ f)(x) = 2|x+1|$
   - $(f \circ g)(x) = |2x| + 1$

   b) $f(x) = x + 1,$ $\qquad g(x) = \text{máx}\{1, x-1\}$
   **Solución:**
   - $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 1 \\ x & si\ x \geq 1 \end{cases}$
   - $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 2 \\ x & si\ x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \le 0 \\ x-8 & 0 < x \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$

**Solución:**

- $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 6x^2+2 & x \le 0 \\ x-8 & 0 < x \le 8 \\ 2x-16 & x > 8 \end{cases}$
- $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \le 0 \\ 2x-8 & 0 < x \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \le 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x+2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

**Solución:**

- $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$
- $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

**Ejercicio 3 (Composición de funciones y dominio)** *Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.*

1. *$f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x+1$.*

   **Solución:**

   - *$g \circ f$ está bien definida y está dada por $(g \circ f)(x) = 2\frac{x}{x^2-9} + 1 = \frac{x^2+2x-9}{x^2-9}$*
   - *$f \circ g$ no está bien definida ya que 3 y $-3$ pertenecen a la imagen de $g$.*
     *Por lo que si modificamos el dominio de $g$ a $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ queda bien definida y está dada por $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{(2x+1)^2-9} = \frac{2x+1}{4x^2+4x-8}$*

2. *$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log(x)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x-1$.*

   **Solución:**

   - *$g \circ f$ está bien definida y está dada por $(g \circ f)(x) = 2\log(x) - 1$*
   - *$f \circ g$ no está bien definida ya que $(-\infty, 0]$ está incluida en la imagen de $g$.*
     *Por lo que si modificamos el dominio de $g$ a $(1/2, +\infty)$ queda bien definida y está dada por $(f \circ g)(x) = \log(2x-1)$*

3. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ y $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.*

   **Solución:**

   - *$g \circ f$ no está bien definida ya que $[0, 1)$ está incluida en la imagen de $f$.*
     *Por lo que si modificamos el dominio de $f$ a $(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$ está bien definida y está dada por $(g \circ f)(x) = \sqrt{|x|^2-1} = \sqrt{x^2-1}$.*
   - *$f \circ g$ está bien definida y está dada por $(f \circ g)(x) = \left|\sqrt{x^2-1}\right| = \sqrt{x^2-1}$.*

**Ejercicio 4** *Para las funciones $f$, $g$ y $g \circ f$, del Ejercicio **??** determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.*

1. *$f$ es sobreyectiva pero no inyectiva, $g$ es biyectiva y $g \circ f$ no es inyectiva pero si sobreyectiva.*
2. *$f$ y $g$ son biyectivas, también $g \circ f$*
3. *$f$ no es sobreyectiva ni inyectiva, $g$ tampoco es sobreyectiva pero si inyectiva. La función $g \circ f$ no es inyectiva ni sobreyectiva.*

**Ejercicio 5 (Dominio, codominio y biyectividad)** *Consideremos las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $i(x) = x^2$.

a) *¿Son todas las funciones iguales? Justifique.*

**Solución:** *No hay dos funciones iguales. Para que las funciones sean iguales, entre otras cosas, deben coincidir los dominios y codominios. En este caso, la "asociación" es siempre la misma: $x \rightsquigarrow x^2$, pero no hay dos funciones que coincidan en dominio y codominio.*

b) *Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.*

**Solución:** *La primera función ($f$) no es inyectiva (por ejemplo x=1 y x=-1 tienen la misma imagen) ni sobreyectiva (por ejemplo y=-2 no tiene preimagen).*

*La segunda función ($g$) no es inyectiva pero sí sobreyectiva. En este codominio reducido (con respecto a la anterior) todos los elementos tiene preimágenes, es decir, una raíz cuadrada.*

*La tercer función ($h$) es inyectiva (dos números* ***postivos*** *diferentes tienen cuadrados diferentes) pero no sobreyectiva (por ejemplo y=-2 no tiene preimagen).*

*La cuarta función ($i$) es biyectiva (es decir, inyectiva y sobreyectiva). El argumento de inyectividad es el mismo que el de $h$ (tienen el mismo dominio) y el argumento para la sobreyectividad es el mismo que para $g$.*

**Ejercicio 6 (Dominio, codominio y biyectividad)** *Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*

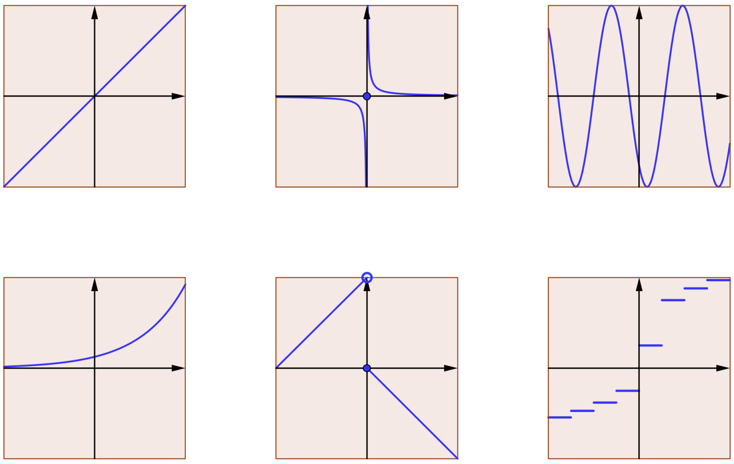
1. $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = x + 5$
2. $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ f(x) = x + 5$
3. $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = x + 5$
4. $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = 2x$
5. $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ f(x) = 2x$
6. $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

**Solución:**

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{2\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva. Además para cualquier $x \in \mathbb{Z}$, $x - 5$ también es un entero y $x = f(x - 5)$. Por lo tanto es sobreyectiva.*
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva y sobreyectiva.*
4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{9\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*
5. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 2x$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{9\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

6. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$ es inyectiva. Además para cualqueir $x \in \mathbb{R}$, $x/2$ también es un real y $x = f(x/2)$. Por lo tanto es sobreyectiva.*

**Ejercicio 7 (Biyectividad - Interpretación gráfica)** *Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*



**Solución:** *Tomamos las seis funciones como definidas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y es según esto que discutimos la inyectividad y la sobreyectividad.*

- *Arriba a la izquierda: Biyectiva*
- *Arriba al centro: Biyectiva*
- *Arriba a la derecha: No es inyectiva. Además la imagen es un intervalo acotado, por lo tanto tampoco es sobreyectiva en $\mathbb{R}$.*
- *Abajo a la izquierda: Es inyectiva pero no sobreyectiva.*
- *Abajo al centro: Habría que ver como sigue la función hacia la izquierda, pero en el intervalo donde está representada, la función es biyectiva.*
- *Abajo a la derecha: Ni inyectiva ni sobreyectiva.*

**Ejercicio 8 (Inyectividad/ Sobreyectividad y Composición)** *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones.*

1. *Pruebe que si $f$ y $g$ son inyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*

   **Solución:**

   *Supongamos que $f$ y $g$ son inyectivas. Queremos demostrar que $g \circ f$ es inyectiva, es decir, queremos demostrar que para todos los $x, x' \in X$, si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ entonces $x = x'$.*

   *Para ello, dados $x, x' \in X$ cualesquiera, supongamos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Tenemos que $g(f(x)) = g(f(x'))$ por defińción de $g \circ f$.*

   *Como $g$ es inyectiva, se deduce que $f(x) = f(x')$. Y como $f$ es inyectiva, se concluye que $x = x'$.*

2. *Pruebe que si $f$ y $g$ son sobreyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*

   **Solución:**

   *Supongamos que $f$ y $g$ son sobreyectivas. Queremos demostrar que $g \circ f$ es sobreyectiva, es decir, queremos demostrar que para todo $z \in Z$, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$.*

   *Para ello, consideremos $z \in Z$ cualquiera.*

   *Como $g$ es sobreyectiva, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Y como $f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Se concluye que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.*

3. a) *Enuncie el recíproco de 1.*

   **Solución:**

   *El reciproco de 1 es "Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces $f$ y $g$ lo son".*

   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*

   **Solución:**

   *El recíproco de 1 es falso, ya que si tomamos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$, se tiene que $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(g \circ f)(x) = (e^x)^2$ es inyectiva, mientras que $g$ no lo es.*

   *Sin embargo, se puede demostrar que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces $f$ es inyectiva.*

   *Prueba: Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Queremos demostrar que $f$ es inyectiva, es decir: queremos demostrar que para todos $x, x' \in X$, si $f(x) = f(x')$, entonces $x = x'$. Para ello, dados $x, x' \in X$ cualesquiera, supongamos que $f(x) = f(x')$. Aplicando $g$ en ambos lados, obtenemos que $g(f(x)) = g(f(x'))$, es decir: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Y como $g \circ f$ es inyectiva, se concluye que $x = x'$.*

4. a) *Enuncie el recíproco de 2.*

   **Solución:**

   *El reciproco de 2 es "Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces $f$ y $g$ lo son".*

   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*

   **Solución:**

   *El recíproco de 2 es falso, ya que si tomamos $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definidas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = (x-1)^2$, se tiene que $g \circ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $(g \circ f)(x) = (x+1-1)^2 = x^2$ es sobreyectiva, mientras que $f$ no lo es.*

   *Sin embargo, se puede demostrar que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces $g$ tambien lo es.*

   *Prueba: Supongamos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Queremos demostrar que $g$ es sobreyectiva, es decir: queremos demostrar que para todo $z \in Z$, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Para ello, consideremos $z \in Z$ cualquiera. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Tomemos $y := f(x) \in Y$. Se concluye que $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$.*

**Ejercicio 9 (Inyectividad y crecimiento)** *¿Verdadero o falso?*

1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces $f$ es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).*

   **Solución:** *Verdadero.*

   *Probémoslo para $f$ decreciente, para $f$ creciente la prueba es análoga: Si $x \neq y$ entonces se da $x < y$ o $x > y$. En el primer caso, como $f$ es estrictamente decreciente se tiene $f(x) > f(y)$, si es el segundo caso entonces por la misma razón se tiene $f(x) < f(y)$. En cualquiera de los casos $f(x) \neq f(y)$ cuando $x \neq y$ y esto es la definición de función inyectiva.*

2. *Si $f$ es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?*

   **Solución:** *Falso.*
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -x$ *es estrictamente decreciente e inyectiva.*

3. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$ es biyectiva.*

   **Solución:** *Verdadero.*
   *Por la parte 1 alcanza verificar que $f$ es estrictamente creciente. Si $x < y$, entonces $x^3 < y^3$ y por lo tanto $x^3 + x < y^3 + y$.*