Cartografía Matemática

1480

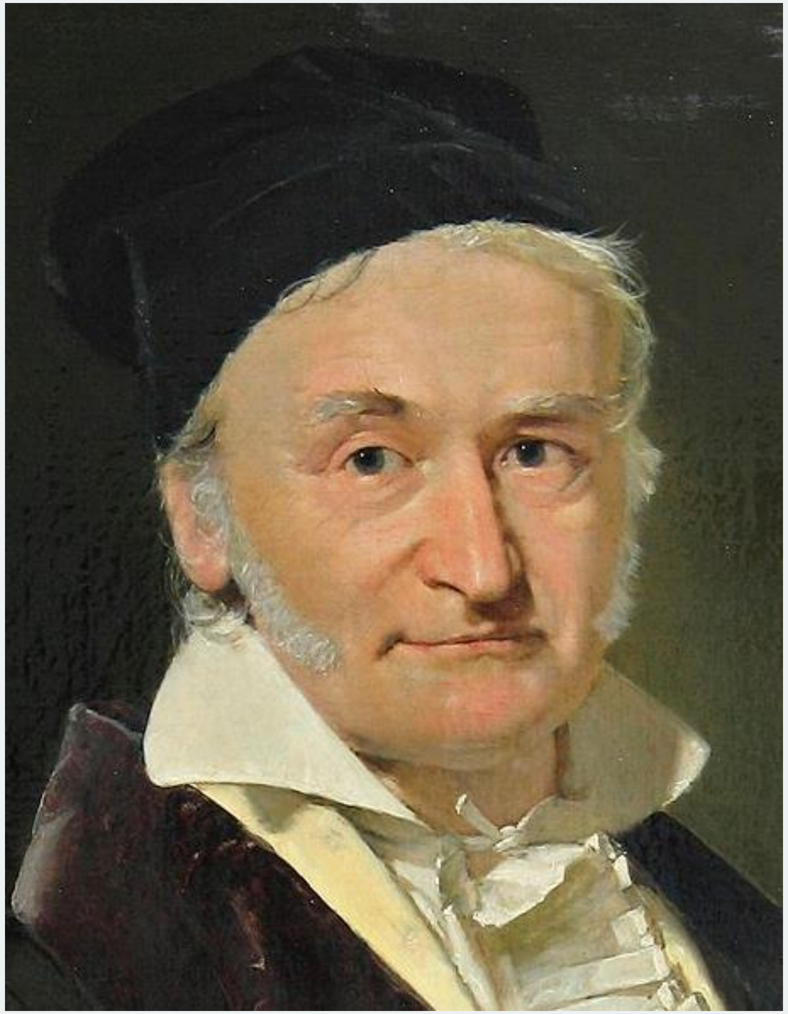
TCI13

Roberto Pérez Rodino - rodino@fing.edu.uy
Esteban Striewe - estriewe@fing.edu.uy

Año 2024

GAUSS–KRÜGER

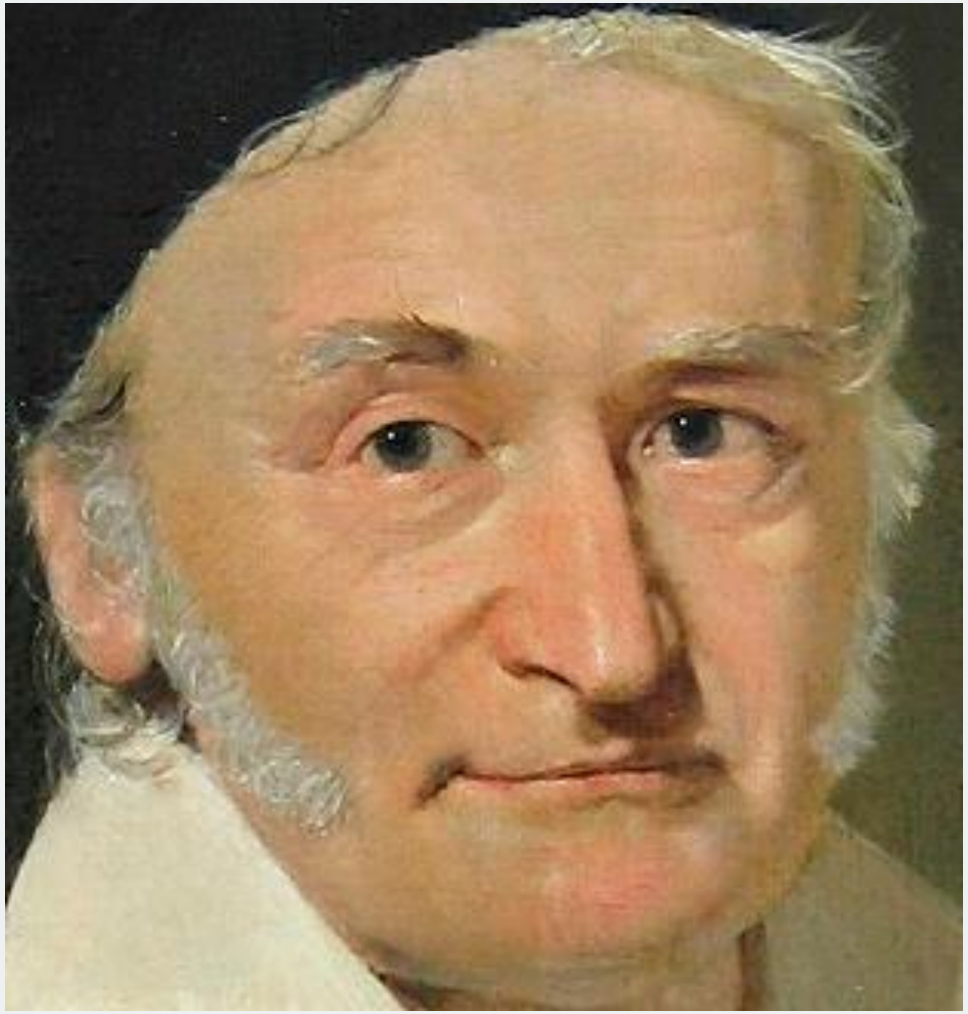
G A U S S – K R Ü G E R



Carl Friedrich Gauss
Propuso la proyección entre 1816 y 1827.

Johann Heinrich Louis Krüger
Propuso los husos en 1919.

G A U S S – K R Ü G E R



Carl Friedrich Gauss
Propuso la proyección entre 1816 y 1827.

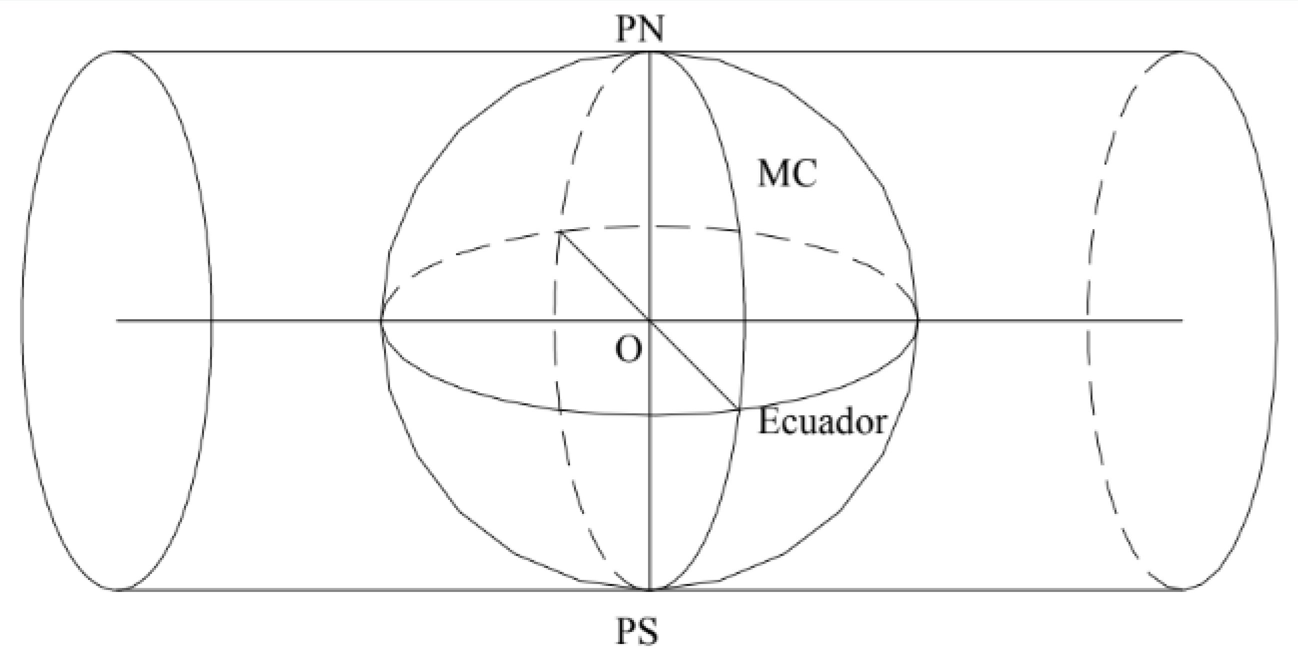
Johann Heinrich Louis Krüger
Propuso los husos en 1919.

GAUSS – KRÜGER

La proyección cilíndrica conforme de Gauss – Krüger es una proyección transversa y tangente al elipsoide en un meridiano denominado central o de contacto.

GAUSS–KRÜGER

La proyección cilíndrica conforme de Gauss – Krüger es una proyección transversa y tangente al elipsoide en un meridiano denominado central o de contacto.



GAUSS – KRÜGER

La proyección cilíndrica conforme de Gauss – Krüger es una proyección transversa y tangente al elipsoide en un meridiano denominado central o de contacto.

Para demostrar la conformidad se introducen conceptos en los que no vamos a profundizar:

GAUSS – KRÜGER

La proyección cilíndrica conforme de Gauss – Krüger es una proyección transversa y tangente al elipsoide en un meridiano denominado central o de contacto.

Para demostrar la conformidad se introducen conceptos en los que no vamos a profundizar:

Funciones holomorfas

Son funciones de variable compleja definidas en el universo complejo

Isometría

GAUSS – KRÜGER

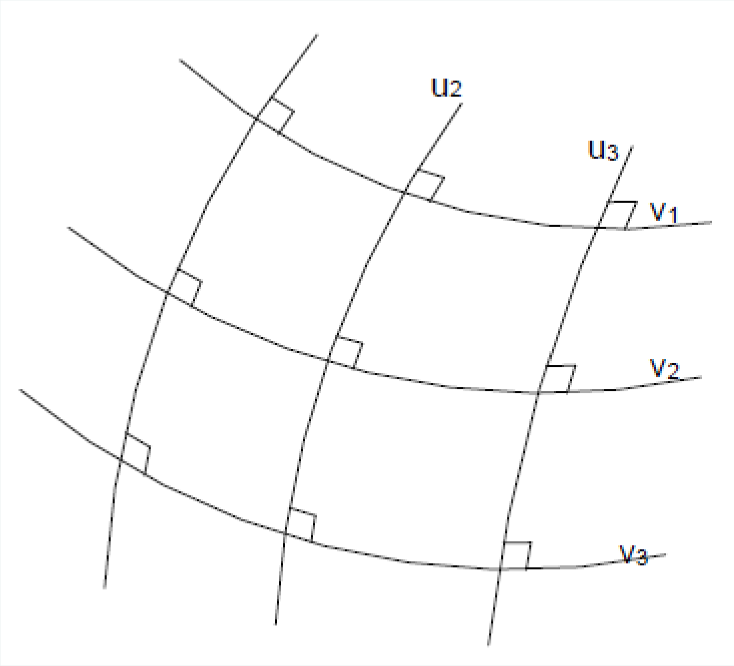
Isometría

Consideremos una familia de curvas *u* y *v* pertenecientes a una superficie, de manera que se corten ortogonalmente:

GAUSS–KRÜGER

Isometría

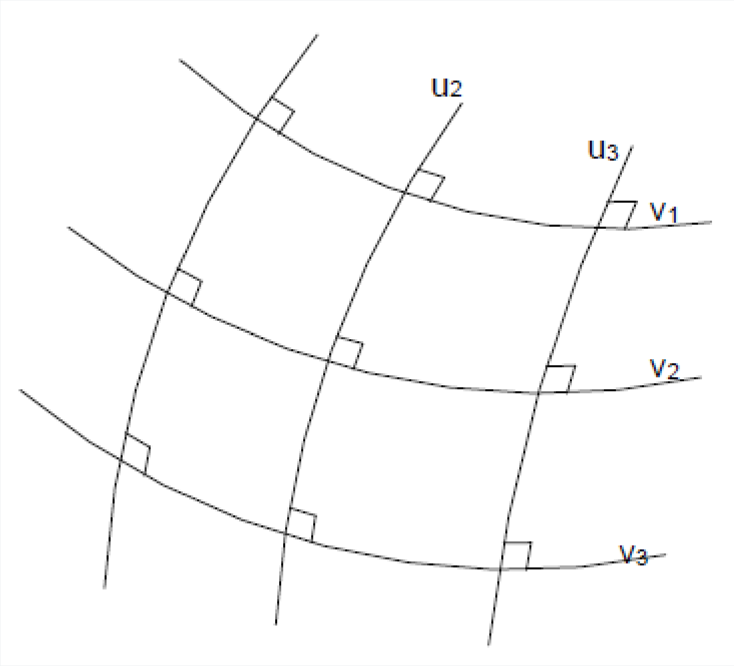
Consideremos una familia de curvas *u* y *v* pertenecientes a una superficie, de manera que se corten ortogonalmente:



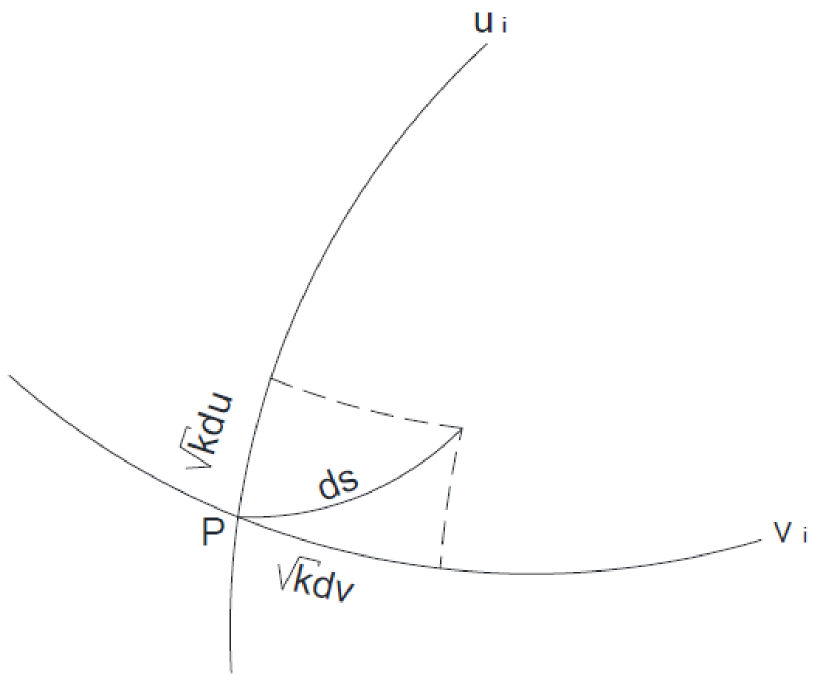
G A U S S – K R Ü G E R

Isometría

Consideremos una familia de curvas *u* y *v* pertenecientes a una superficie, de manera que se corten ortogonalmente:



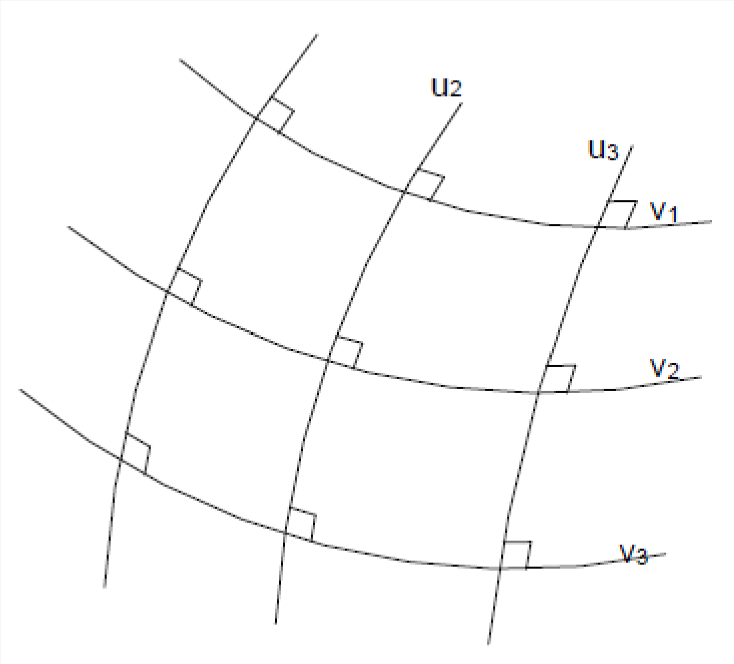
Dado un punto P y un elemente de geodésica *ds* que pasa por P y pertenecen a la superficie



GAUSS–KRÜGER

Isometría

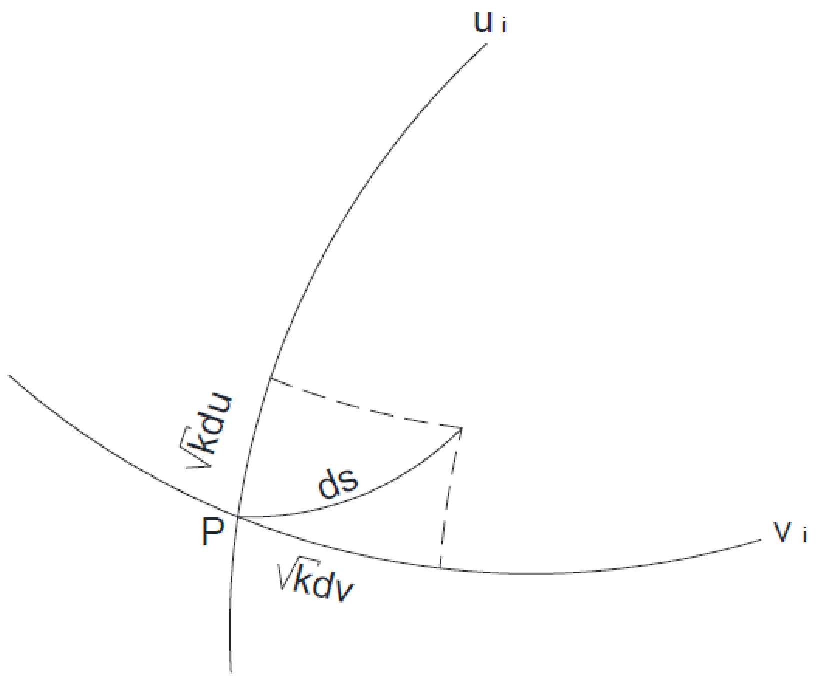
Consideremos una familia de curvas *u* y *v* pertenecientes a una superficie, de manera que se corten ortogonalmente:



Dado un punto P y un elemente de geodésica *ds* que pasa por P y pertenecen a la superficie

Si se cumple

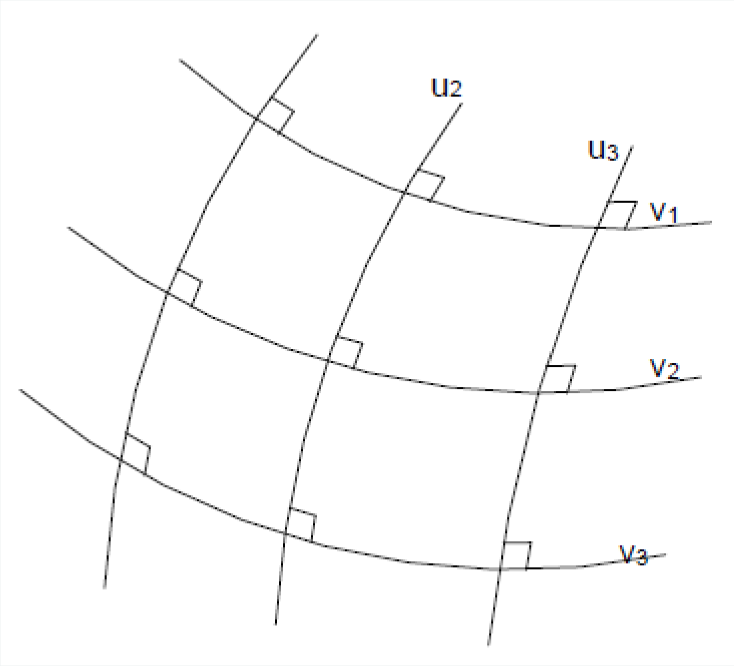
$$ds^2 = k\left(du^2 + dv^2\right)$$



GAUSS–KRÜGER

Isometría

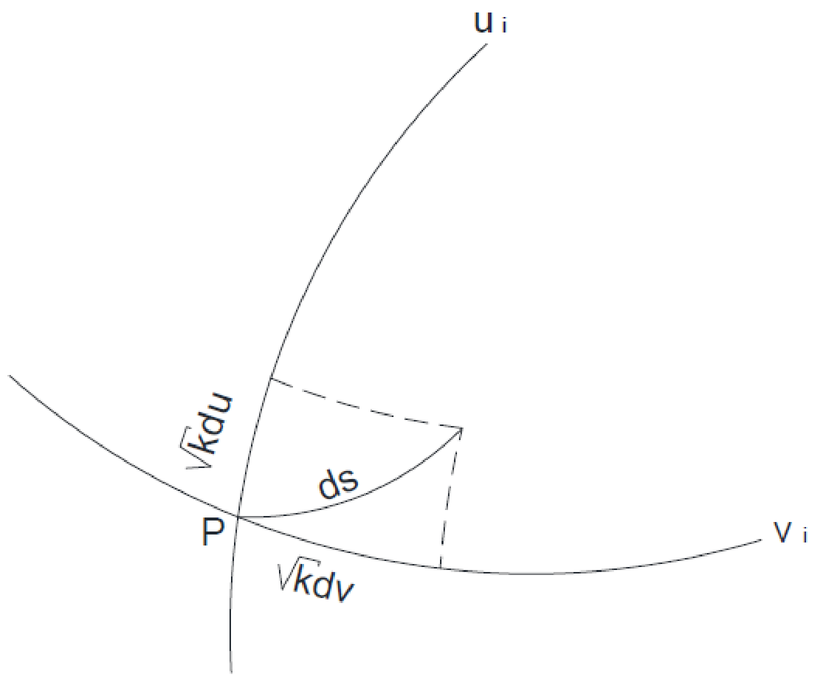
Consideremos una familia de curvas *u* y *v* pertenecientes a una superficie, de manera que se corten ortogonalmente:



Dado un punto P y un elemente de geodésica *ds* que pasa por P y pertenecen a la superficie

Si se cumple

$$ds^2 = k\left(du^2 + dv^2\right)$$

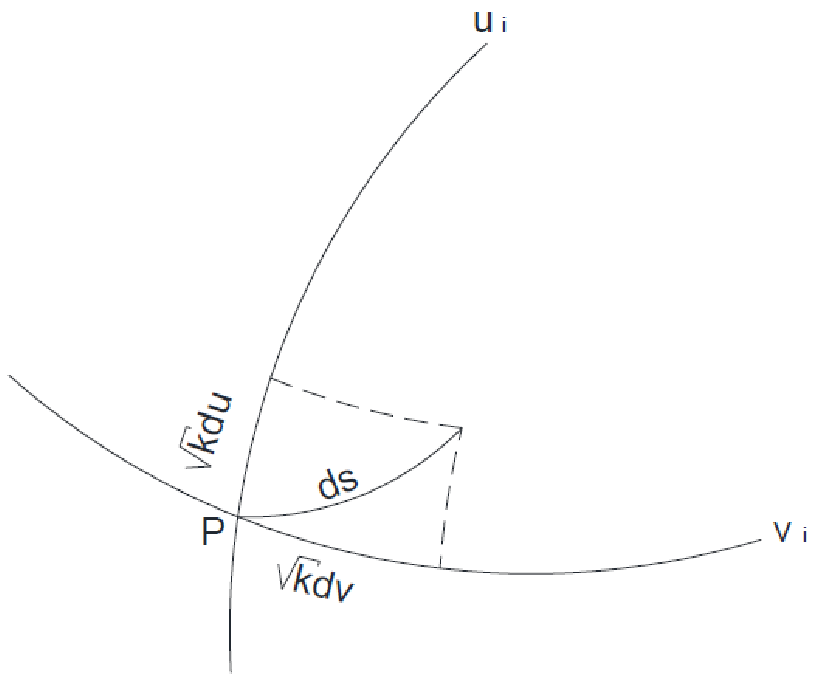


decimos que:
- las familias de curvas son **isométricas**
- *k* es el **factor de isometría**
- *du* y *dv* son los **parámetros isométricos**

GAUSS–KRÜGER

$$ds^2 = k\left(du^2 + dv^2\right)$$

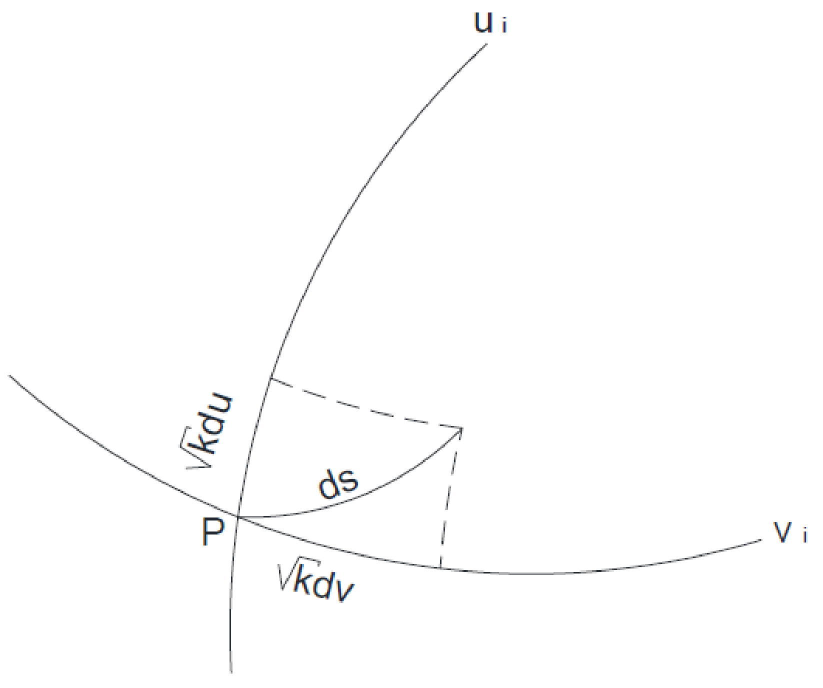
Como se observa en la relación, en toda superficie donde se puede establecer una relación de isometría (iso - igual, metría - medida) a partir de familias de curvas (*u*, *v*), la longitud de un elemento de geodésica *ds* permanece constante, a menos de un factor de escala *k*, independientemente de la dirección de la misma, por lo que la transformación es conforme.



G A U S S – K R Ü G E R

$$ds^2 = k\left(du^2 + dv^2\right)$$

Como se observa en la relación, en toda superficie donde se puede establecer una relación de isometría (iso - igual, metría - medida) a partir de familias de curvas (*u*, *v*), la longitud de un elemento de geodésica *ds* permanece constante, a menos de un factor de escala *k*, independientemente de la dirección de la misma, por lo que la transformación es conforme.



Toda **función holomorfa** representa una **transformación isométrica** y por lo tanto es **conforme**.

GAUSS–KRÜGER

Establezcamos esta transformación holomorfa F:

$$F(\Phi,\lambda)=F(\Phi)+\frac{\partial F(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{\vec{i}\,\lambda}{1!}+\frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial\Phi^2}\frac{\vec{i}^{\,2}\lambda^2}{2!}+\ldots$$

GAUSS–KRÜGER

Establezcamos esta transformación holomorfa F:

$$F(\Phi,\lambda) = F(\Phi) + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi}\frac{\vec{i}\,\lambda}{1!} + \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2}\frac{\vec{i}^{\,2}\lambda^2}{2!} + \ldots$$

donde a cada punto de la superficie (φ,λ) le corresponde otro de la superficie (Φ,λ) a través de las expresiones:

$$\Phi = \Phi(\varphi,\lambda) \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda(\varphi,\lambda) = \lambda$$

GAUSS–KRÜGER

Establezcamos esta transformación holomorfa F:

$$F(\Phi,\lambda) = F(\Phi) + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi}\frac{\vec{i}\,\lambda}{1!} + \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2}\frac{\vec{i}^{\,2}\lambda^2}{2!} + \ldots$$

donde a cada punto de la superficie (φ,λ) le corresponde otro de la superficie (Φ,λ) a través de las expresiones:

$$\Phi = \Phi(\varphi,\lambda) \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda(\varphi,\lambda) = \lambda$$

Para que esta transformación F (Φ,λ) sea la proyección de Gauss-Krüger, debemos imponerle tres condiciones.

G A U S S – K R Ü G E R

Condiciones de la proyección

1- El meridiano de contacto debe ser representado por una recta sin deformaciones

G A U S S – K R Ü G E R

Condiciones de la proyección

1- El meridiano de contacto debe ser representado por una recta sin deformaciones

2- El Ecuador debe ser representado por una recta perpendicular a la representación del meridiano de contacto

GAUSS–KRÜGER

Condiciones de la proyección

1- El meridiano de contacto debe ser representado por una recta sin deformaciones

2- El Ecuador debe ser representado por una recta perpendicular a la representación del meridiano de contacto

3- La transformación debe ser conforme

G A U S S – K R Ü G E R

Ley de la proyección

$$X = s + t_2\lambda^2 + t_4\lambda^4 + t_6\lambda^6 + \ldots$$

$$Y = t_1\lambda + t_3\lambda^3 + t_5\lambda^5 + \ldots$$

GAUSS–KRÜGER

Ley de la proyección

$$X = s + t_2\lambda^2 + t_4\lambda^4 + t_6\lambda^6 + \ldots$$
$$Y = t_1\lambda + t_3\lambda^3 + t_5\lambda^5 + \ldots$$

Donde: $s = a(1-e^2).\left[A.\varphi^{(r)} - \frac{B}{2}.sen(2\varphi) + \frac{C}{4}.sen(4\varphi) - \frac{D}{6}.sen(6\varphi)\right]$

Con:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 - \frac{175}{256}e^6$$
$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6$$
$$C = \frac{15}{64}e^4 - \frac{105}{256}e^6$$
$$D = \frac{35}{512}e^6$$

G A U S S – K R Ü G E R

Ley de la proyección

$$X = s + t_2\lambda^2 + t_4\lambda^4 + t_6\lambda^6 + \ldots$$
$$Y = t_1\lambda + t_3\lambda^3 + t_5\lambda^5 + \ldots$$

Donde: $s = a(1-e^2).\left[A.\varphi^{(r)} - \frac{B}{2}.sen(2\varphi) + \frac{C}{4}.sen(4\varphi) - \frac{D}{6}.sen(6\varphi)\right]$

Con:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 - \frac{175}{256}e^6$$
$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6$$
$$C = \frac{15}{64}e^4 - \frac{105}{256}e^6$$
$$D = \frac{35}{512}e^6$$

Y además:

$$t_1 = N.\cos\varphi$$
$$t_2 = \frac{1}{2!}N.sen\varphi.\cos\varphi$$
$$t_3 = \frac{1}{3!}N.\cos^3\varphi(1 - t^2 + n^2)$$
$$t_4 = \frac{1}{4!}N.sen\varphi.\cos^3\varphi(5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4)$$

Con:

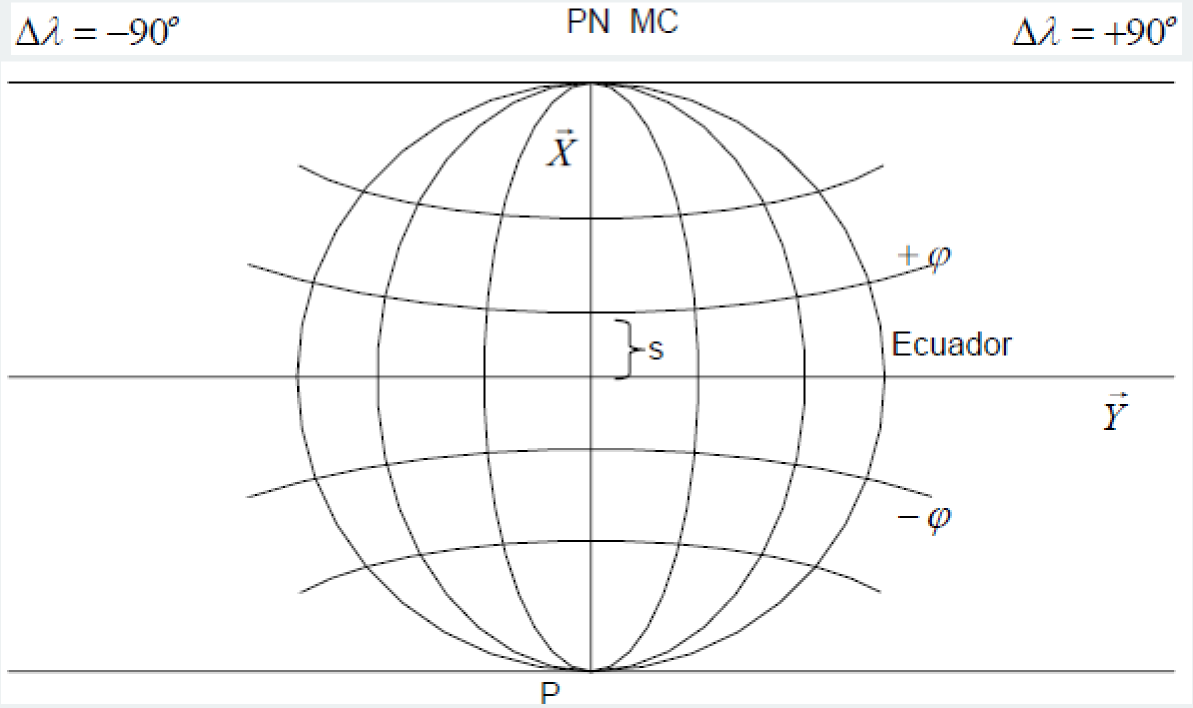
$$t = tg\varphi$$
$$n = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}.\cos\varphi$$
$$1 + n^2 = \frac{N}{\rho}$$

GAUSS–KRÜGER

El canevás es la proyección de los paralelos y meridianos sobre el cilindro, desarrollando este luego sobre el plano.

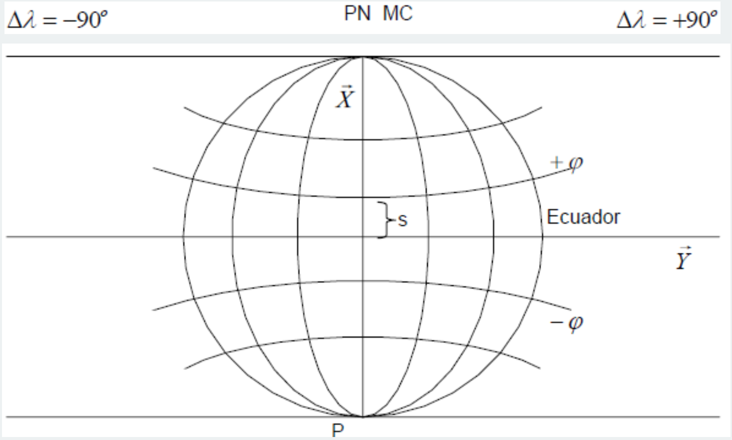
G A U S S – K R Ü G E R

El canevás es la proyección de los paralelos y meridianos sobre el cilindro, desarrollando este luego sobre el plano.



G A U S S – K R Ü G E R

Meridianos

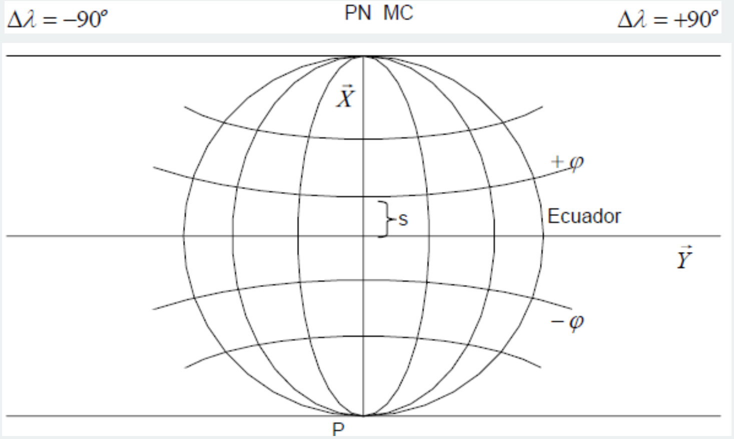


G A U S S – K R Ü G E R

Meridianos Considerando Δλ y -Δλ, estudiemos su paridad

$$X(\Delta\lambda) = X(-\Delta\lambda)$$

$$Y(\Delta\lambda) = -Y(-\Delta\lambda)$$

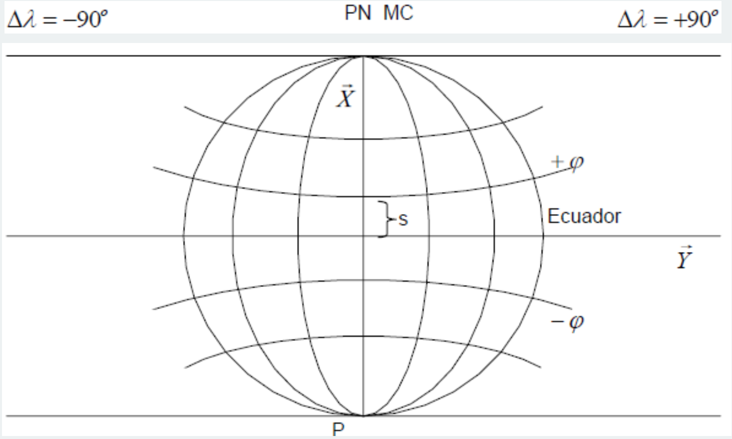


G A U S S – K R Ü G E R

Meridianos Considerando Δλ y -Δλ, estudiemos su paridad

$$X(\Delta\lambda) = X(-\Delta\lambda)$$

$$Y(\Delta\lambda) = -Y(-\Delta\lambda)$$



Paralelos Considerando ahora φ y -φ

$$X(\varphi) = -X(-\varphi)$$

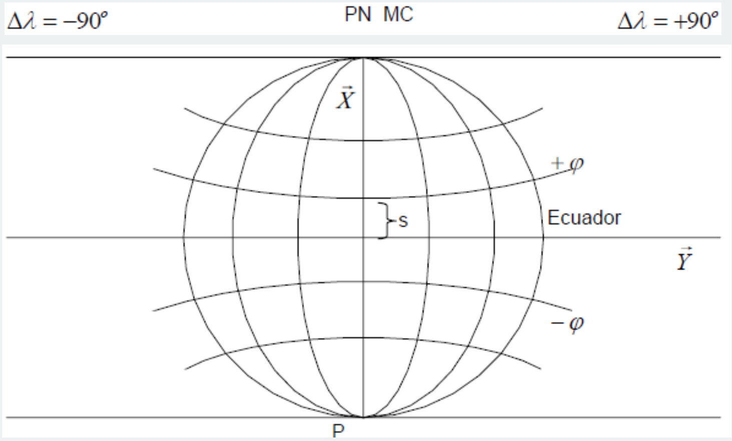
$$Y(\varphi) = Y(-\varphi)$$

GAUSS–KRÜGER

Meridianos Considerando $\Delta\lambda$ y $-\Delta\lambda$, estudiemos su paridad

$$X(\Delta\lambda) = X(-\Delta\lambda)$$

$$Y(\Delta\lambda) = -Y(-\Delta\lambda)$$



Paralelos Considerando ahora φ y $-\varphi$

$$X(\varphi) = -X(-\varphi)$$

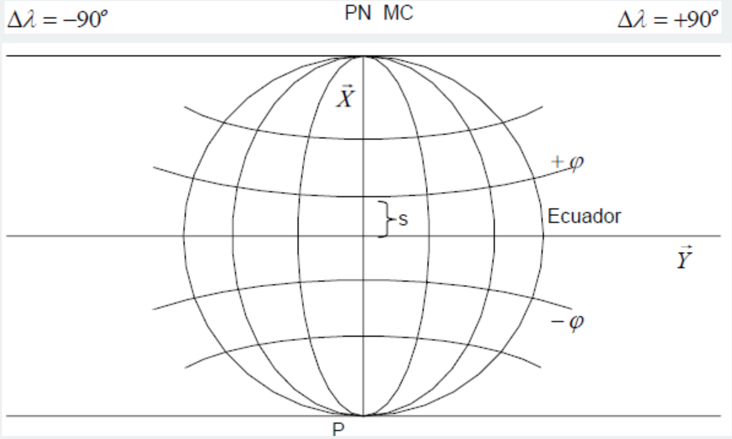
$$Y(\varphi) = Y(-\varphi)$$

El eje X y el eje Y son ejes de simetría, por lo que existe una simetría central respecto del origen O.

G A U S S – K R Ü G E R

Aproximaciones

La representación de meridianos y paralelos **no** corresponde a curvas simples, pero podemos hacer alguna aproximación.



GAUSS–KRÜGER

Aproximaciones

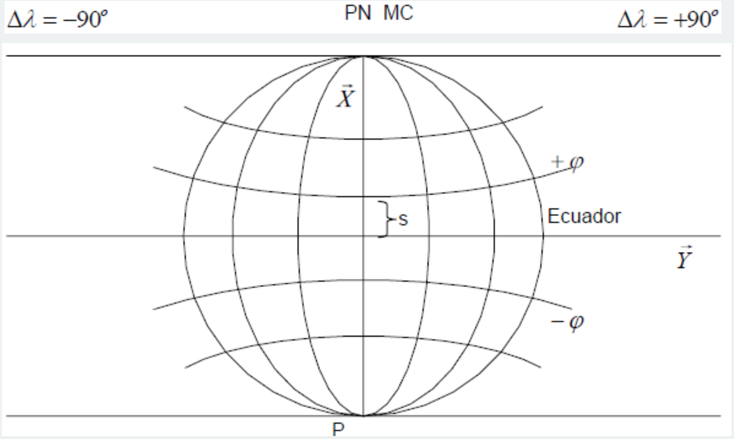
La representación de meridianos y paralelos **no** corresponde a curvas simples, pero podemos hacer alguna aproximación.

Si desarrollamos X e Y solo hasta el primer término, obtenemos:

Paralelos

$$X = s + \frac{\lambda^2}{2!} N.sen\varphi.\cos\varphi$$

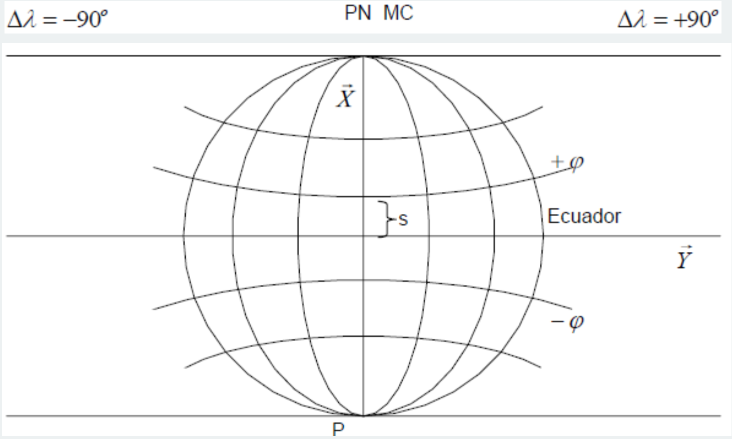
$$Y = \lambda.N.\cos\varphi$$



GAUSS–KRÜGER

Aproximaciones

La representación de meridianos y paralelos **no** corresponde a curvas simples, pero podemos hacer alguna aproximación.



Si desarrollamos X e Y solo hasta el primer término, obtenemos:

Paralelos

$$X = s + \frac{\lambda^2}{2!} N.sen\varphi.\cos\varphi$$

$$Y = \lambda.N.\cos\varphi$$

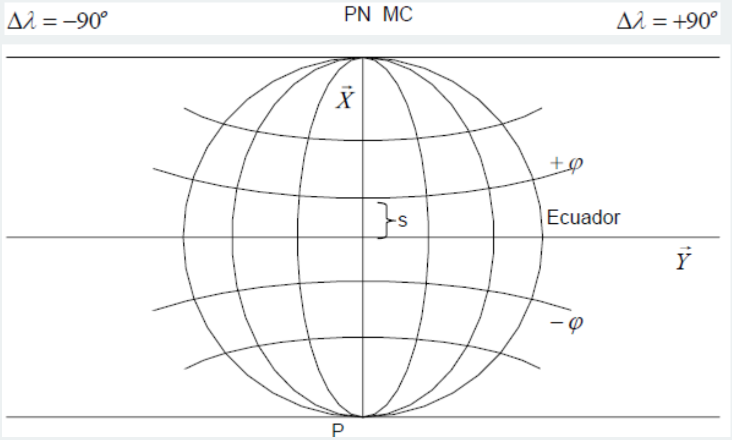
Pero estamos recorriendo un paralelo, por lo tanto φ = cte.

$$\lambda^2 = \frac{Y^2}{N^2.\cos^2\varphi}$$

GAUSS–KRÜGER

Aproximaciones *(paralelos)*

$$X = s + \frac{Y^2}{2.N^2.\cos^2\varphi}.N.sen\varphi.\cos\varphi = s + \frac{Y^2}{2}.\frac{tg\varphi}{N}$$

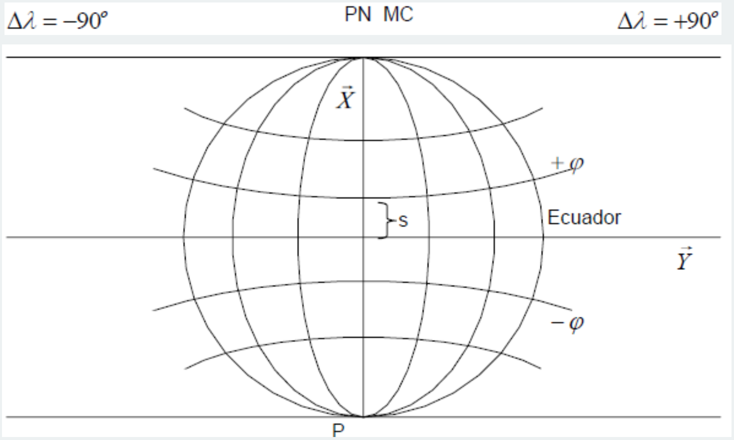


G A U S S – K R Ü G E R

Aproximaciones *(paralelos)*

$$X = s + \frac{Y^2}{2.N^2.\cos^2\varphi}.N.sen\varphi.\cos\varphi = s + \frac{Y^2}{2}.\frac{tg\varphi}{N}$$

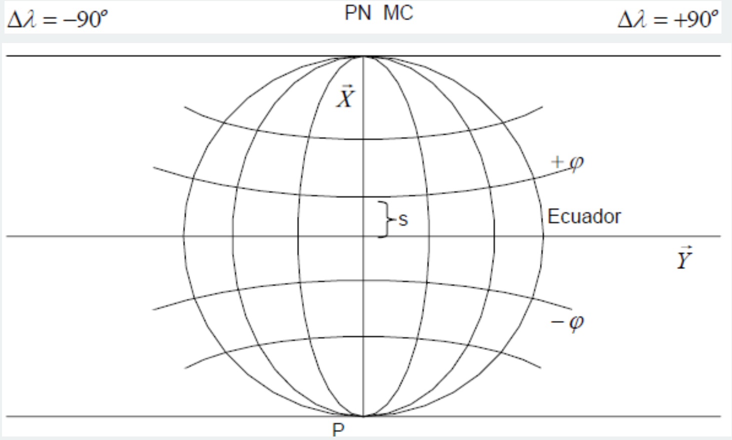
Y llamando: $\frac{1}{p}$ a $\frac{tg\varphi}{N}$



GAUSS–KRÜGER

Aproximaciones *(paralelos)*

$$X = s + \frac{Y^2}{2.N^2.\cos^2\varphi}.N.sen\varphi.\cos\varphi = s + \frac{Y^2}{2}.\frac{tg\varphi}{N}$$



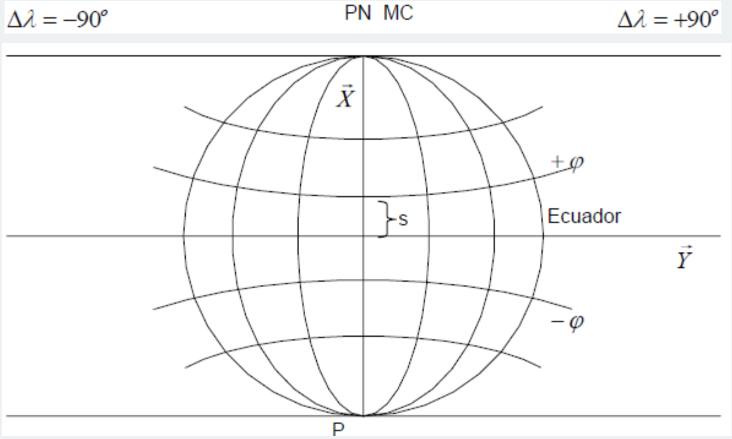
Y llamando: $\frac{1}{p}$ a $\frac{tg\varphi}{N}$

Llegamos a esta ecuación $X = s + \frac{Y^2}{2p}$

GAUSS–KRÜGER

Aproximaciones (paralelos)

$$X = s + \frac{Y^2}{2.N^2.\cos^2\varphi}.N.sen\varphi.\cos\varphi = s + \frac{Y^2}{2}.\frac{tg\varphi}{N}$$



Y llamando: $\frac{1}{p}$ a $\frac{tg\varphi}{N}$

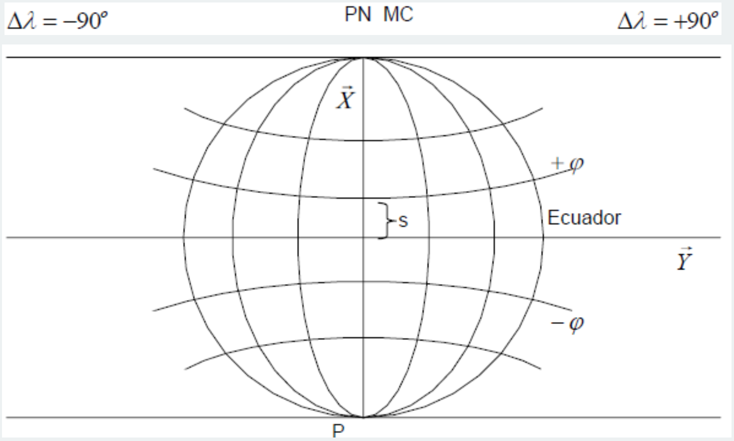
Llegamos a esta ecuación $X = s + \frac{Y^2}{2p}$ que es la de una parábola de eje X, con un vértice a una distancia *s* del origen y concavidad hacia el polo.

GAUSS–KRÜGER

Aproximaciones

Meridianos

λ = cte



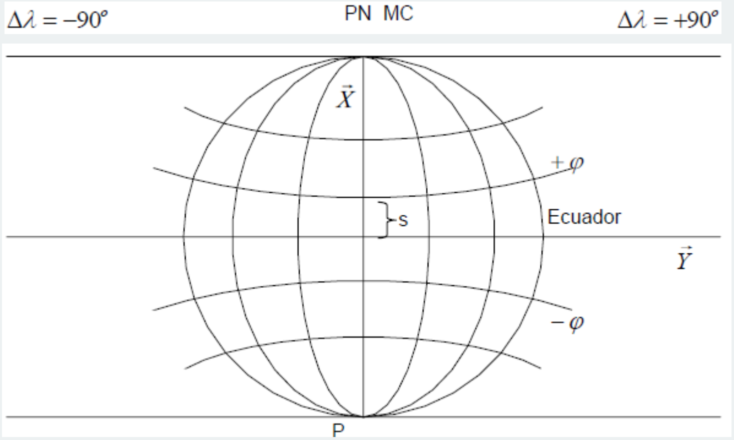
G A U S S – K R Ü G E R

Aproximaciones

Meridianos

λ = cte

$$Y = \lambda . N . \cos \varphi$$



Haciendo variar la latitud entre 0° y ±90°, tenemos que *Y* es función de cos(φ), lo que significa que los meridianos responden a una función cosenoidal de φ.

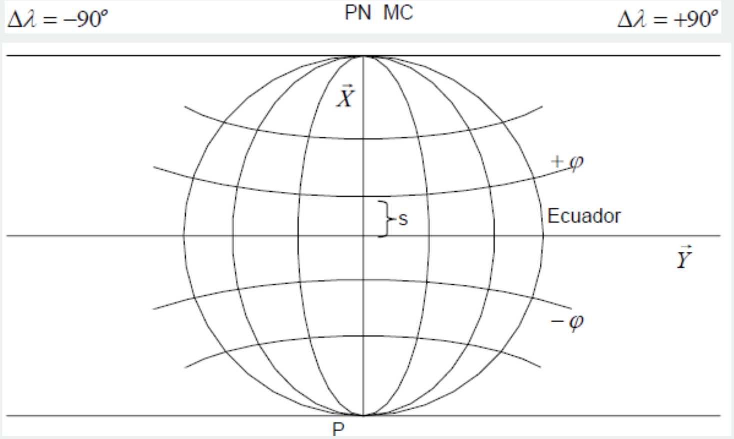
G A U S S – K R Ü G E R

Aproximaciones

Meridianos

λ = cte

$$Y = \lambda . N . \cos \varphi$$



Haciendo variar la latitud entre 0° y ±90°, tenemos que *Y* es función de cos(φ), lo que significa que los meridianos responden a una función cosenoidal de φ.

Al aumentar |φ|, *Y* decrece.

Para φ= ±90°, *Y* = 0.

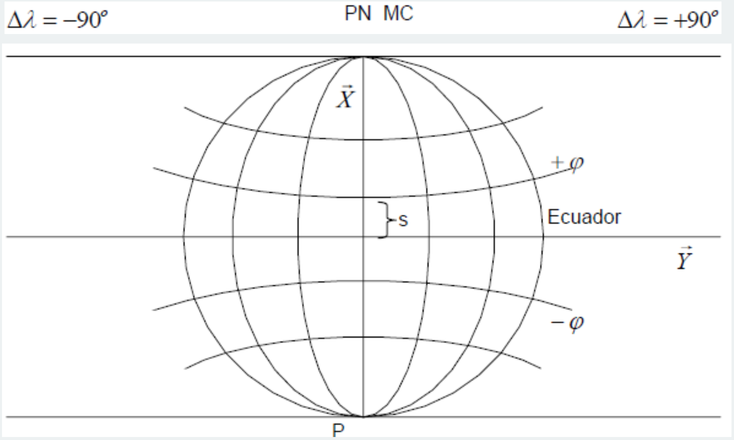
G A U S S – K R Ü G E R

Aproximaciones

Meridianos

λ = cte

$$Y = \lambda . N . \cos \varphi$$



Haciendo variar la latitud entre 0° y ±90°, tenemos que *Y* es función de cos(φ), lo que significa que los meridianos responden a una función cosenoidal de φ.

Al aumentar |φ|, *Y* decrece.

Para φ= ±90°, *Y* = 0.

Por lo que los meridianos tienen la concavidad dirigida al meridiano de contacto y pasan por los polos.

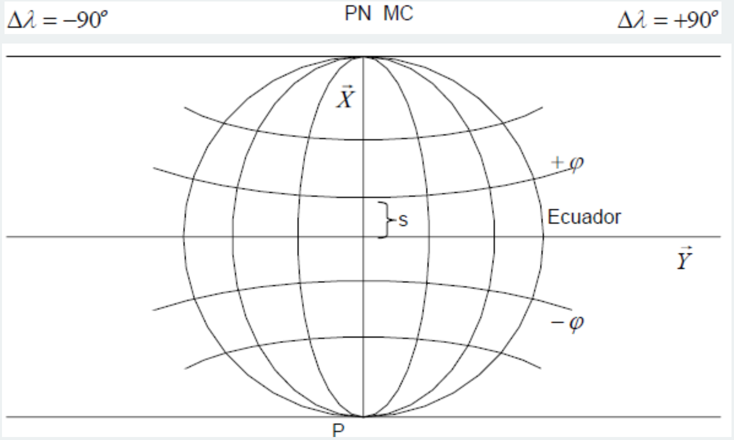
G A U S S – K R Ü G E R

Aproximaciones

Meridianos

λ = cte

$$Y = \lambda . N . \cos\varphi$$



Haciendo variar la latitud entre 0° y ±90°, tenemos que *Y* es función de cos(φ), lo que significa que los meridianos responden a una función cosenoidal de φ.

Al aumentar |φ|, *Y* decrece.

Para φ= ±90°, *Y* = 0.

Por lo que los meridianos tienen la concavidad dirigida al meridiano de contacto y pasan por los polos.

Los meridianos correspondientes a Δλ = ±90°, se representan por rectas horizontales que pasan por lo polos.

GAUSS–KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos

GAUSS – KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos

Es el ángulo que forma la paralela al meridiano de contacto con la tangente a la transformada del meridiano en un punto considerado.

GAUSS – KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos γ

Es el ángulo que forma la paralela al meridiano de contacto con la tangente a la transformada del meridiano en un punto considerado.

GAUSS – KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos γ

Es el ángulo que forma la paralela al meridiano de contacto con la tangente a la transformada del meridiano en un punto considerado.

También es el ángulo entre la tangente a la transformada del paralelo que pasa por ese punto y la perpendicular al meridiano de contacto.

GAUSS–KRÜGER

<u>Convergencia plana de los meridianos</u> γ

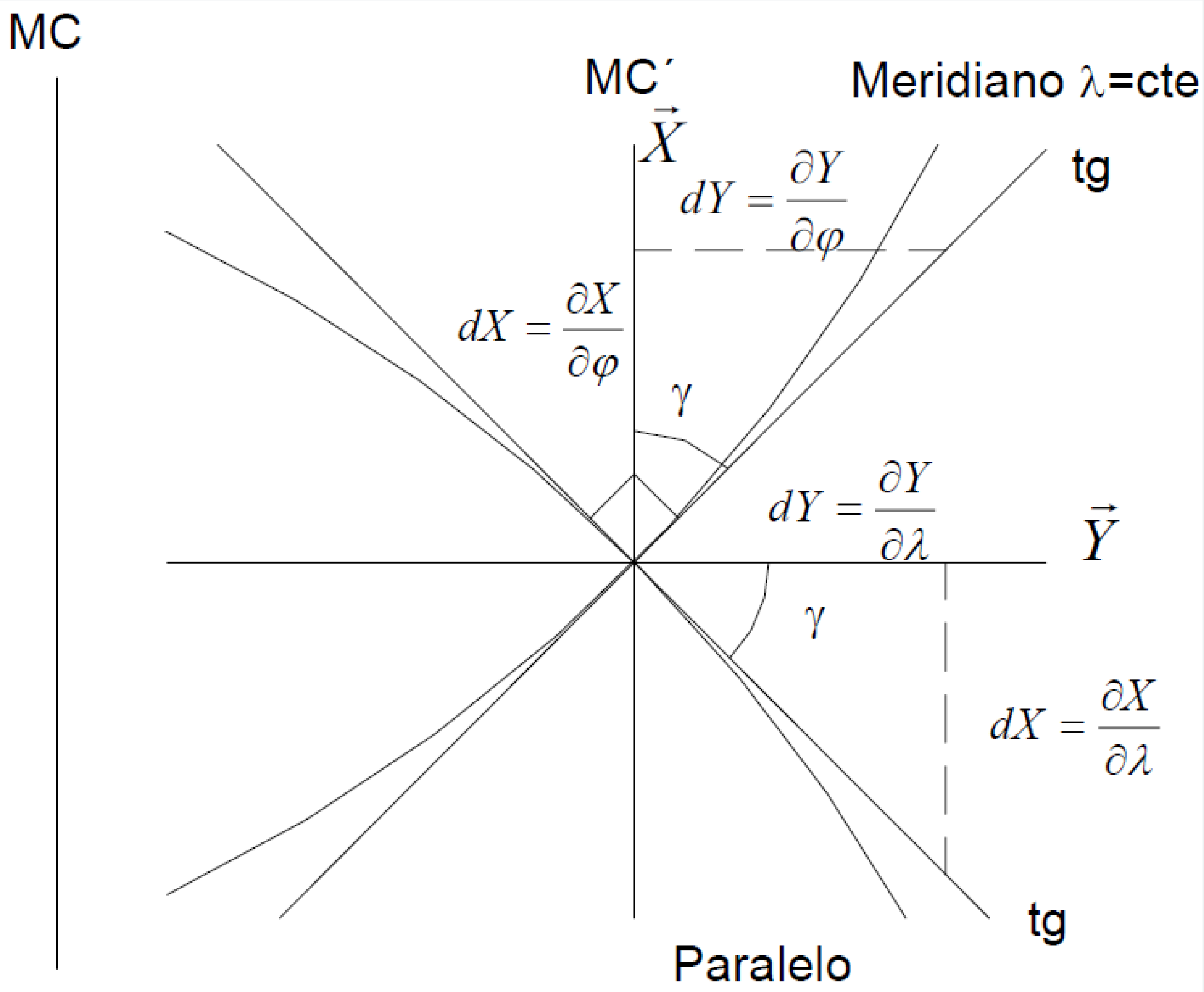
Es el ángulo que forma la paralela al meridiano de contacto con la tangente a la transformada del meridiano en un punto considerado.

También es el ángulo entre la tangente a la transformada del paralelo que pasa por ese punto y la perpendicular al meridiano de contacto.

Veamos una figura.

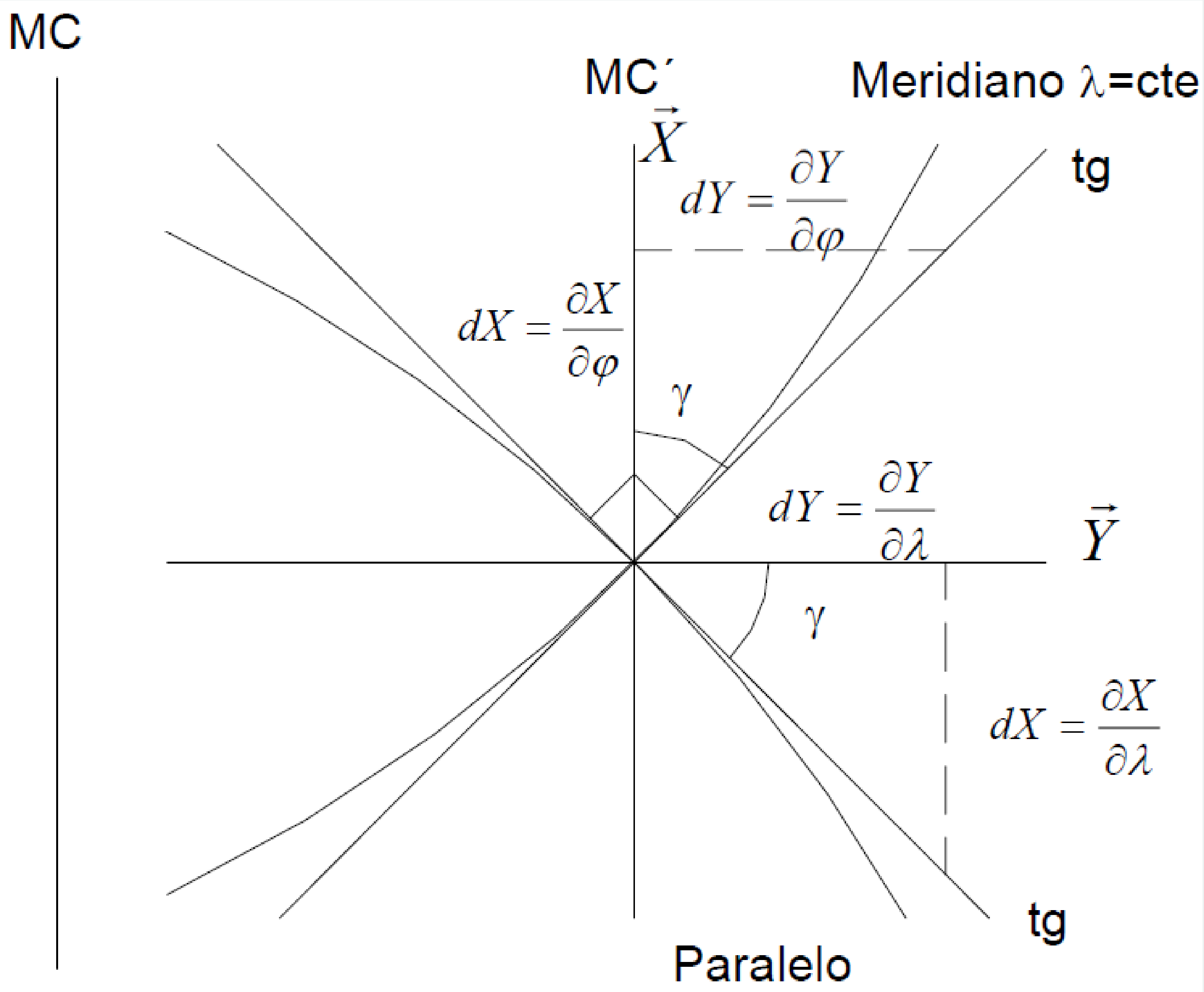
GAUSS–KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos γ



G A U S S – K R Ü G E R

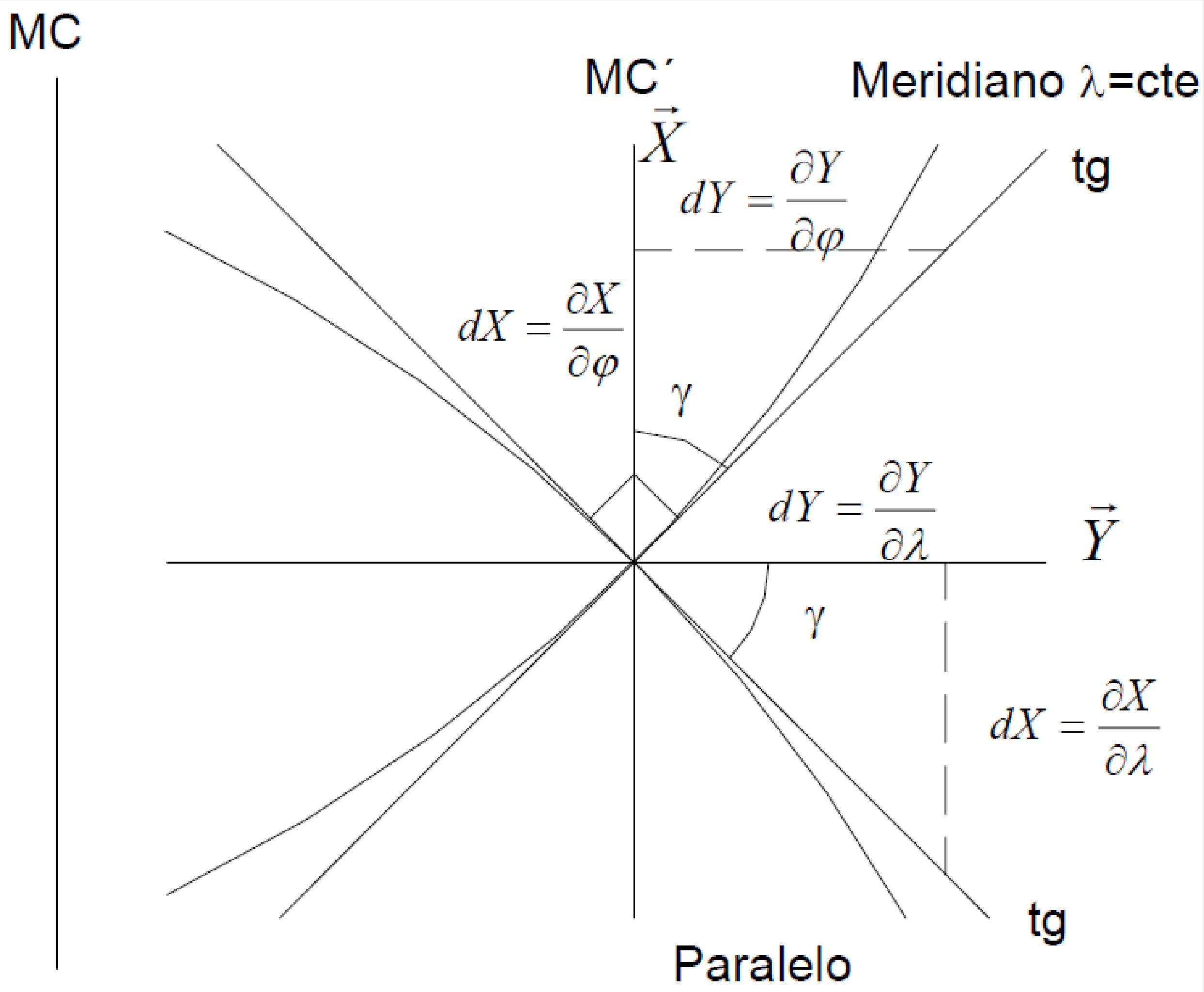
Convergencia plana de los meridianos γ



$$tg\gamma = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}$$

GAUSS–KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos γ

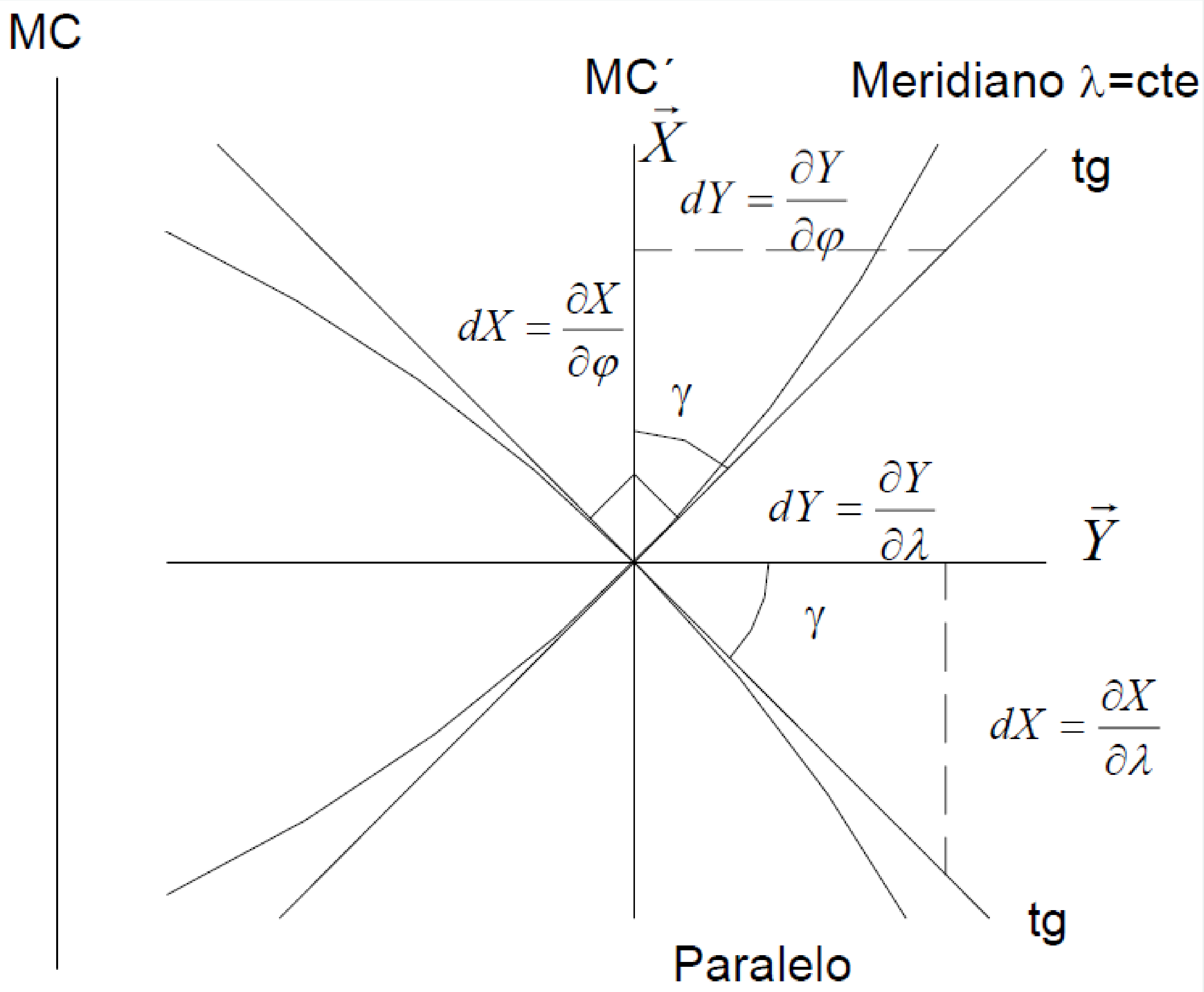


$$tg\gamma = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}$$

Considerando 👆

G A U S S – K R Ü G E R

<u>Convergencia plana de los meridianos</u> γ

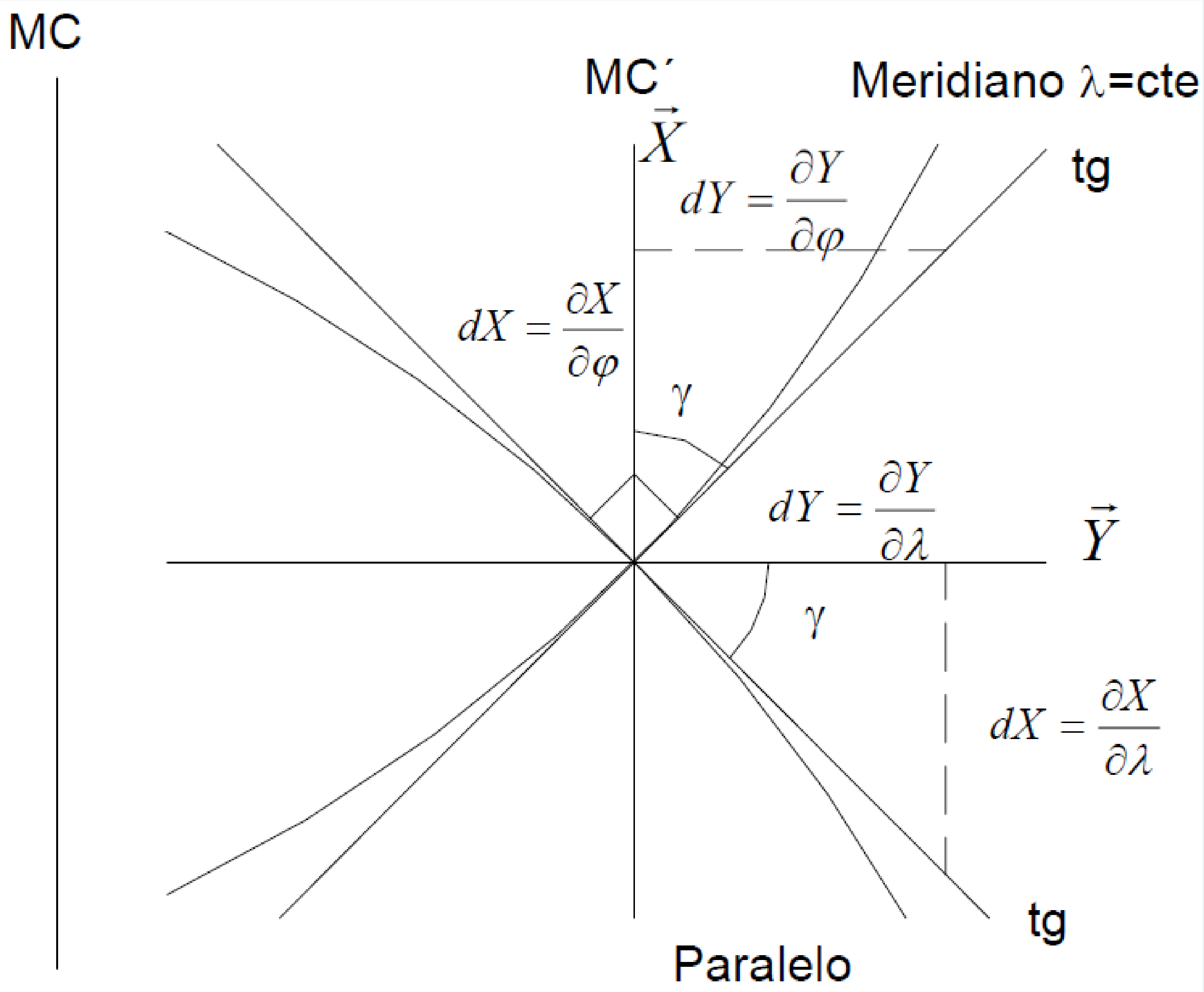


$$tg\gamma = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial X}{\partial \varphi}}$$

Considerando 👆

GAUSS–KRÜGER

Convergencia plana de los meridianos γ



$$tg\gamma = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial X}{\partial \varphi}}$$

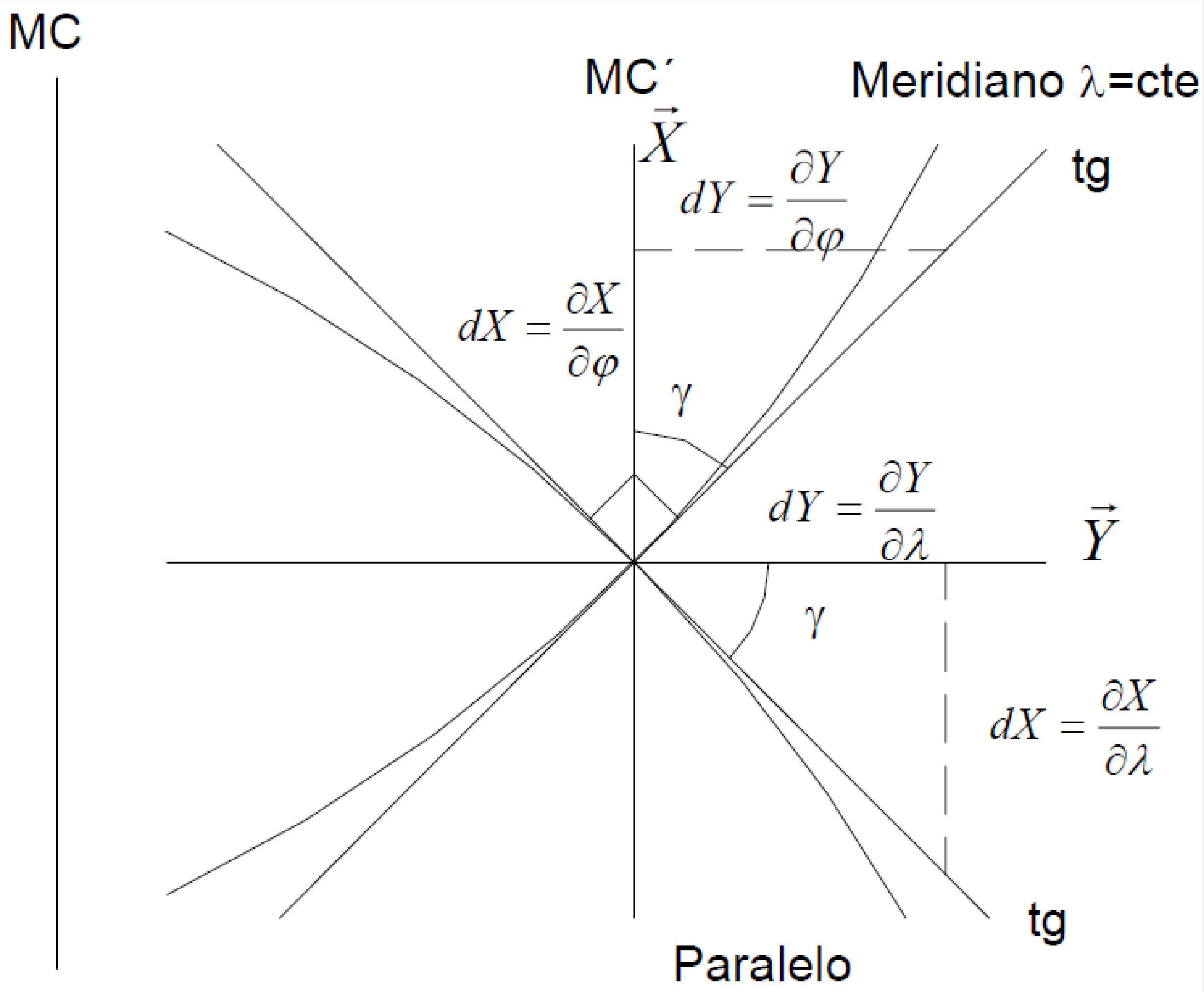
Considerando 👆 y la ley de la proyección

$$X = s + \frac{\lambda^2}{2!} N sen\varphi.\cos\varphi + \frac{\lambda^4}{4!} N sen\varphi.\cos^3\varphi(5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) + \ldots$$

$$Y = \lambda N \cos\varphi + \frac{\lambda^3}{3!} N \cos^3\varphi(1 - t^2 + n^2) + \ldots$$

G A U S S – K R Ü G E R

Convergencia plana de los meridianos γ



$$tg\gamma = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial X}{\partial \varphi}}$$

Considerando 👆 y la ley de la proyección

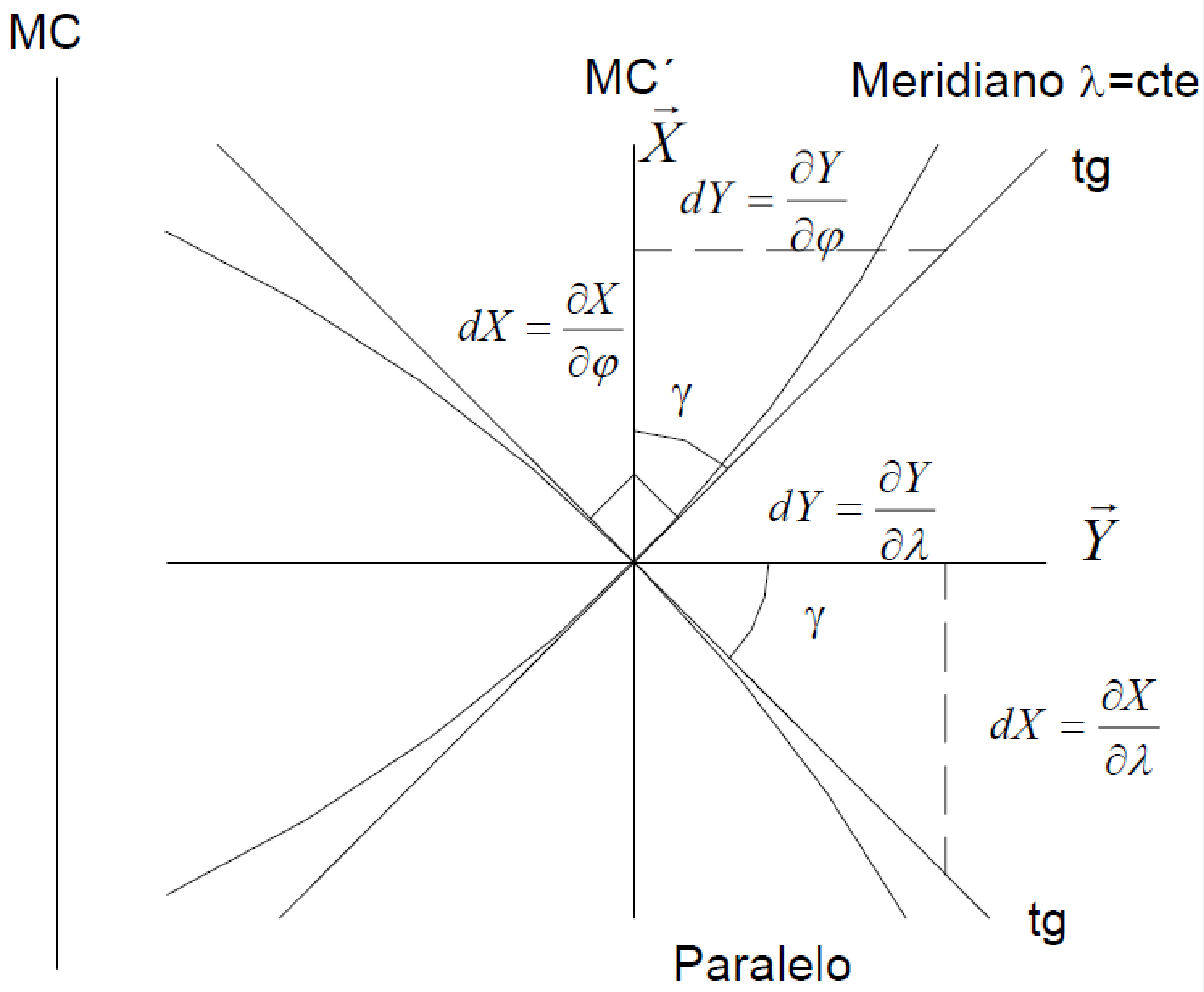
$$X = s + \frac{\lambda^2}{2!} Nsen\varphi.\cos\varphi + \frac{\lambda^4}{4!} Nsen\varphi.\cos^3\varphi(5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) + \ldots$$

$$Y = \lambda N \cos\varphi + \frac{\lambda^3}{3!} N \cos^3\varphi(1 - t^2 + n^2) + \ldots$$

derivando y operando podemos llegar a un valor de γ

G A U S S – K R Ü G E R

Convergencia plana de los meridianos γ



$$\gamma = \lambda sen\varphi + \frac{\lambda^3}{3} sen\varphi.\cos^2\varphi(1+3n^2+2n^4)$$

GAUSS–KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

G A U S S – K R Ü G E R

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Es la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide.

G A U S S – K R Ü G E R

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Es la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide.

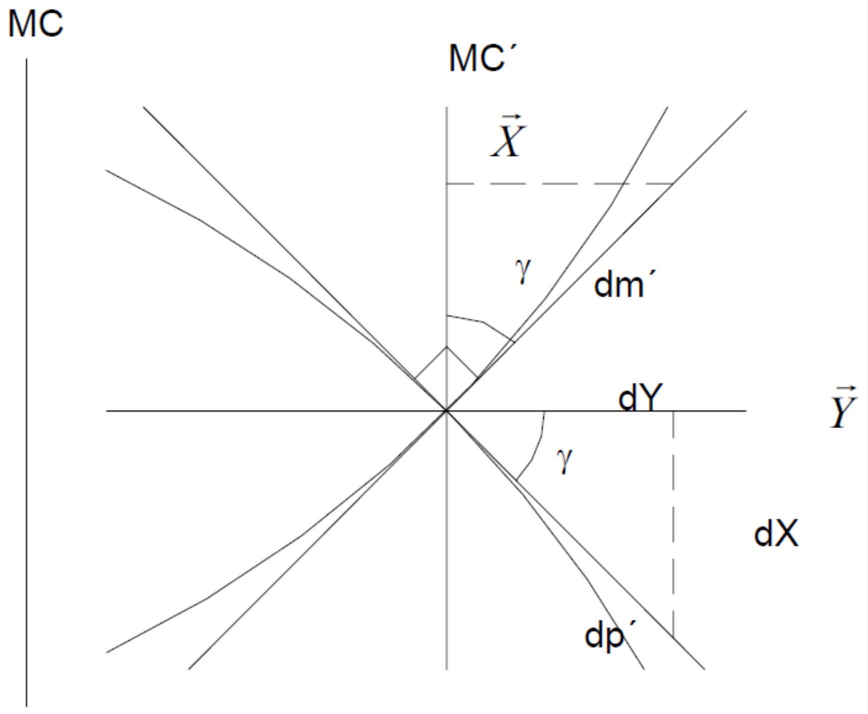
G A U S S – K R Ü G E R

k

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Es la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide.

Observemos esta figura:

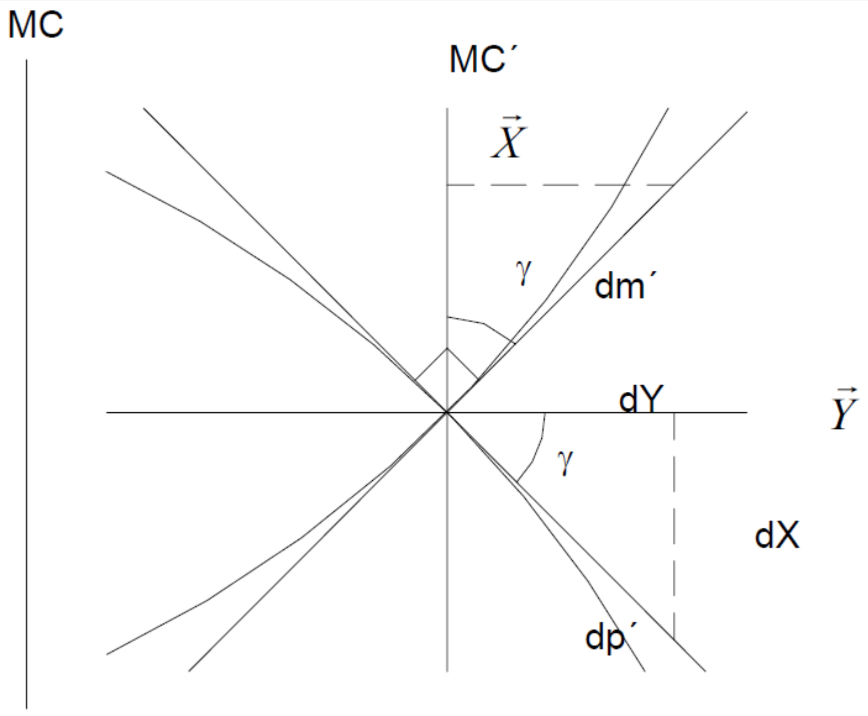


GAUSS–KRÜGER

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Es la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide.

Observemos esta figura:



Por definición

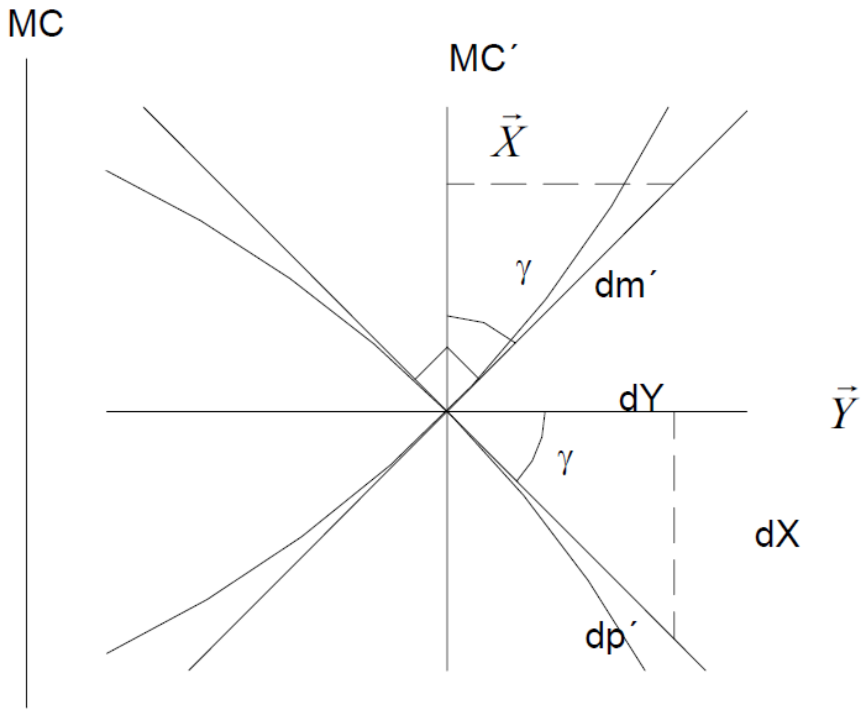
$$k = \frac{dp'}{dp} = \frac{dm'}{dm}$$

GAUSS – KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Es la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide.

Observemos esta figura:



Por definición

$$k = \frac{dp'}{dp} = \frac{dm'}{dm}$$

y

$$dp' = \frac{dY}{\cos\gamma} = \sec\gamma . dY$$

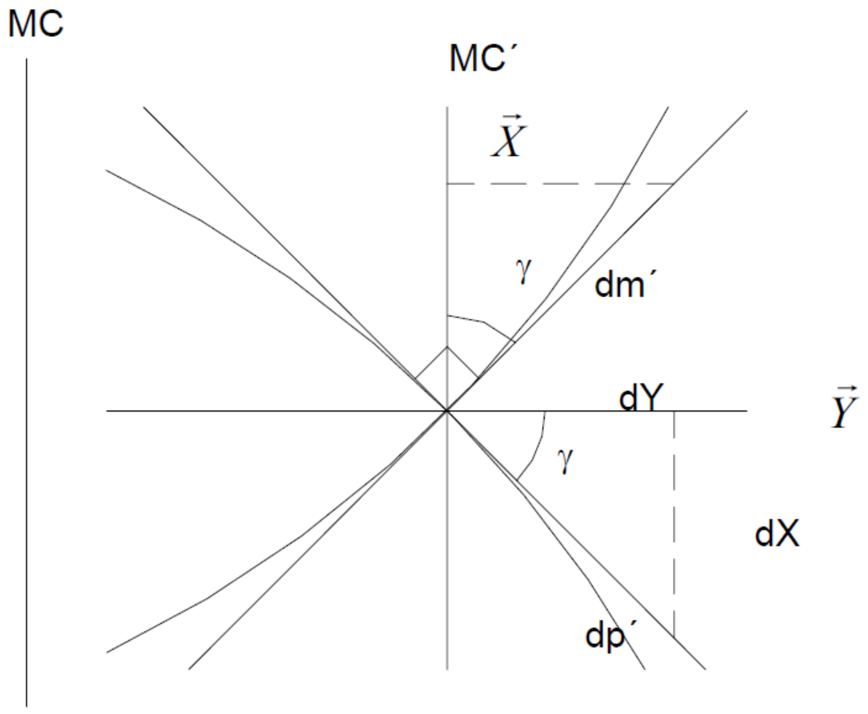
$$dp = N.\cos\varphi.d\lambda$$

G A U S S – K R Ü G E R

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Es la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide.

Observemos esta figura:



Por definición

$$k = \frac{dp'}{dp} = \frac{dm'}{dm}$$

y

$$dp' = \frac{dY}{\cos\gamma} = \sec\gamma . dY$$

$$dp = N.\cos\varphi . d\lambda$$

Entonces

$$k = \frac{\sec\gamma . dY}{N.\cos\varphi . d\lambda}$$

G A U S S – K R Ü G E R

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1 + \dfrac{\gamma^2}{2} + \ldots$

GAUSS – KRÜGER

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1 + \dfrac{\gamma^2}{2} + \ldots$ y sustituyendo por la expresión γ calculada hasta el primer orden

GAUSS–KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1 + \dfrac{\gamma^2}{2} + \ldots$ y sustituyendo por la expresión γ calculada hasta el primer orden $\sec\gamma \cong 1 + \dfrac{\lambda^2 . sen^2\varphi}{2} + \ldots$

GAUSS–KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \ldots$ y sustituyendo por la expresión γ calculada hasta el primer orden

$$\sec\gamma \cong 1 + \frac{\lambda^2 . sen^2\varphi}{2} + \ldots$$

Introduciendo esto en la expresión de ***k***:

$$k = \frac{1 + \frac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} . \frac{dY}{d\lambda}$$

GAUSS – KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \ldots$ y sustituyendo por la expresión γ calculada hasta el primer orden $\sec\gamma \cong 1 + \frac{\lambda^2 . sen^2\varphi}{2} + \ldots$

Introduciendo esto en la expresión de ***k***: $k = \dfrac{1 + \dfrac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} \cdot \dfrac{dY}{d\lambda}$

Determinemos $\dfrac{dY}{d\lambda}$

GAUSS–KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \ldots$ y sustituyendo por la expresión γ calculada hasta el primer orden

$$\sec\gamma \cong 1 + \frac{\lambda^2 . sen^2\varphi}{2} + \ldots$$

Introduciendo esto en la expresión de ***k***:

$$k = \frac{1 + \frac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} . \frac{dY}{d\lambda}$$

Determinemos $\frac{dY}{d\lambda}$

Recordemos $Y = \lambda N\cos\varphi + \frac{\lambda^3}{3!} N\cos^3\varphi(1 - t^2 + n^2)$

GAUSS–KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Desarrollando $\sec\gamma \cong 1+\frac{\gamma^2}{2}+\ldots$ y sustituyendo por la expresión γ calculada hasta el primer orden $\sec\gamma \cong 1+\frac{\lambda^2 . sen^2\varphi}{2}+\ldots$

Introduciendo esto en la expresión de ***k***:

$$k=\frac{1+\frac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi}.\frac{dY}{d\lambda}$$

Determinemos $\frac{dY}{d\lambda}$

Recordemos $Y=\lambda N\cos\varphi+\frac{\lambda^3}{3!}N\cos^3\varphi(1-t^2+n^2)$

Derivando: $\frac{dY}{d\lambda}=N\cos\varphi\left[1+\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1-t^2+n^2\right)\right]$

GAUSS–KRÜGER

k

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u>

Sustituyendo:

$$k = \frac{1 + \dfrac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} N\cos\varphi\left[1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + n\right)\right]$$

GAUSS–KRÜGER

k

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Sustituyendo:

$$k = \frac{1 + \frac{\lambda^2 sen^2 \varphi}{2}}{N \cos \varphi} N \cos \varphi \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \left(1 - t^2 + n \quad \right) \right]$$

Y queda:

$$k = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} sen^2 \varphi \right) . \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \left(1 - t^2 + n^2 \right) \right]$$

GAUSS–KRÜGER

k

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Sustituyendo: $$k = \frac{1 + \frac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} N\cos\varphi\left[1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + n\right)\right]$$

Y queda: $$k = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} sen^2\varphi\right).\left[1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + n^2\right)\right]$$

Desarrollando, operando y despreciando términos mayores al 4° orden:

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 + n^2\right)$$

GAUSS – KRÜGER

k

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u>

Sustituyendo: $$k = \frac{1 + \dfrac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} N\cos\varphi \left[1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + n\right)\right]$$

Y queda: $$k = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} sen^2\varphi\right) \cdot \left[1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 - t^2 + n^2\right)\right]$$

Desarrollando, operando y despreciando términos mayores al 4° orden:

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 + n^2\right)$$

k≥1

$$n = \sqrt{\frac{e^2}{1 - e^2}} . \cos\varphi$$

$$1 + n^2 = \frac{N}{\rho}$$

GAUSS–KRÜGER

k

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Sustituyendo: $$k = \frac{1+\frac{\lambda^2 sen^2\varphi}{2}}{N\cos\varphi} N\cos\varphi\left[1+\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1-t^2+n\ \right)\right]$$

Y queda: $$k = \left(1+\frac{\lambda^2}{2}sen^2\varphi\right).\left[1+\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1-t^2+n^2\right)\right]$$

Desarrollando, operando y despreciando términos mayores al 4° orden:

$$k = 1+\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1+n^2\right)$$

$k \geq 1$

$$n = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}}.\cos\varphi$$

$$1+n^2 = \frac{N}{\rho}$$

$$k = 1+\frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\rho}\cos^2\varphi$$

GAUSS – KRÜGER

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

G A U S S – K R Ü G E R

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

$$Y \cong N.\lambda.\cos\varphi \Rightarrow \lambda.\cos\varphi = \frac{Y}{N}$$

<u>Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales</u> k

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

$$Y \cong N.\lambda.\cos\varphi \Rightarrow \lambda.\cos\varphi = \frac{Y}{N}$$

sustituyendo en

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\rho}\cos^2\varphi$$

G A U S S – K R Ü G E R

k

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

$$Y \cong N.\lambda.\cos\varphi \Rightarrow \lambda.\cos\varphi = \frac{Y}{N}$$

sustituyendo en

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\rho}\cos^2\varphi$$

$$k = 1 + \frac{Y^2}{N^2}\frac{N}{2\rho} = 1 + \frac{Y^2}{2\rho N}$$

GAUSS–KRÜGER

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

$$Y \cong N.\lambda.\cos\varphi \Rightarrow \lambda.\cos\varphi = \frac{Y}{N}$$

sustituyendo en

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\rho}\cos^2\varphi$$

$$k = 1 + \frac{Y^2}{N^2}\frac{N}{2\rho} = 1 + \frac{Y^2}{2\rho N}$$

Introduciendo el concepto de radio medio

GAUSS – KRÜGER

k

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

$$Y \cong N.\lambda.\cos\varphi \Rightarrow \lambda.\cos\varphi = \frac{Y}{N}$$

sustituyendo en

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\rho}\cos^2\varphi$$

$$k = 1 + \frac{Y^2}{N^2}\frac{N}{2\rho} = 1 + \frac{Y^2}{2\rho N}$$

Introduciendo el concepto de radio medio

$$k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$$

G A U S S – K R Ü G E R

Coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales k

Analicemos ahora el valor de ***k*** en función de las coordenadas planas.

$$Y \cong N.\lambda.\cos\varphi \Rightarrow \lambda.\cos\varphi = \frac{Y}{N}$$

sustituyendo en

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\frac{N}{\rho}\cos^2\varphi$$

$$k = 1 + \frac{Y^2}{N^2}\frac{N}{2\rho} = 1 + \frac{Y^2}{2\rho N}$$

Introduciendo el concepto de radio medio

$$k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$$

Veamos ahora algunas propiedades de ***k***.

GAUSS–KRÜGER

Propiedades del coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

1- En el meridiano de contacto ***k*** = 1. No existen deformaciones.

$$k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$$

GAUSS – KRÜGER

Propiedades del coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

1- En el meridiano de contacto ***k*** = 1. No existen deformaciones. $k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$

2- Meridiano cualquiera (λ=cte). Cuando φ=0°, cos φ = 1, entonces ***k*** es máximo.

$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 + n^2\right)$ Cuando φ= ±90°, cos φ = 0, entonces ***k*** = 1, mínimo

Por lo que sobre un meridiano, al aumentar | φ |, ***k*** disminuye.

GAUSS–KRÜGER

Propiedades del coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

1- En el meridiano de contacto ***k*** = 1. No existen deformaciones. $k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$

2- Meridiano cualquiera (λ=cte). Cuando φ=0°, cos φ = 1, entonces ***k*** es máximo.

$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 + n^2\right)$ Cuando φ= ±90°, cos φ = 0, entonces ***k*** = 1, mínimo

Por lo que sobre un meridiano, al aumentar | φ |, ***k*** disminuye.

3- Paralelo cualquiera (φ =cte). En esta proyección nos limitamos a un huso de 3° con centro en el meridiano central.

Si λ=0, estamos en el meridiano central, por lo que ***k***=1

Si | λ | > 0, ***k*** aumenta. En definitiva, al alejarnos del MC sobre un paralelo, ***k*** aumenta

G A U S S – K R Ü G E R

Propiedades del coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales

1- En el meridiano de contacto ***k*** = 1. No existen deformaciones. $k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$

2- Meridiano cualquiera (λ=cte). Cuando φ=0°, cos φ = 1, entonces ***k*** es máximo.

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\varphi\left(1 + n^2\right)$$

Cuando φ= ±90°, cos φ = 0, entonces ***k*** = 1, mínimo

Por lo que sobre un meridiano, al aumentar | φ |, ***k*** disminuye.

3- Paralelo cualquiera (φ =cte). En esta proyección nos limitamos a un huso de 3° con centro en el meridiano central.

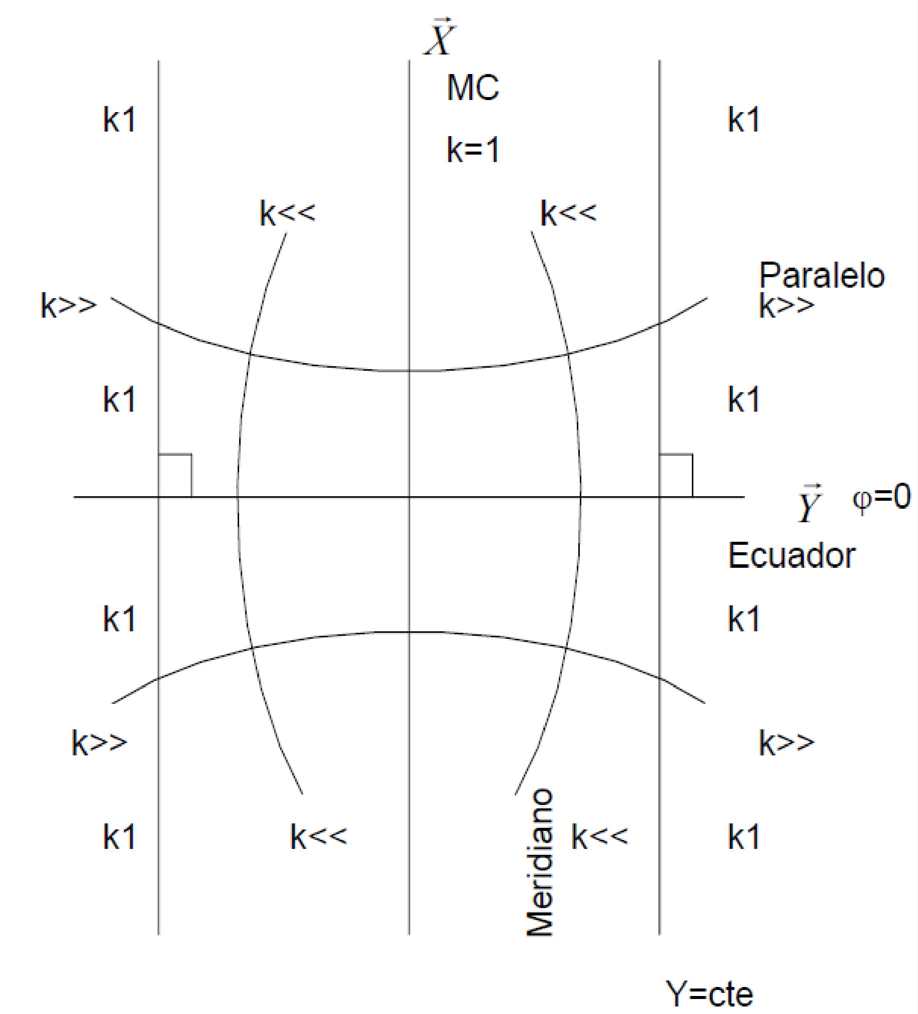
Si λ=0, estamos en el meridiano central, por lo que ***k***=1

Si | λ | > 0, ***k*** aumenta. En definitiva, al alejarnos del MC sobre un paralelo, ***k*** aumenta

4- En la recta paralela al MC. ***k*** es función de Y, esa recta es Y=cte, entonces ***k*** = cte.

G A U S S – K R Ü G E R

Propiedades del coeficiente de deformación lineal para elementos infinitesimales



GAUSS – KRÜGER

Coeficiente de deformación superficial para elementos infinitesimales

G A U S S – K R Ü G E R

Coeficiente de deformación superficial para elementos infinitesimales k_s

Se aplica el coeficiente de deformación lineal elevado al cuadrado (ya que por ser conforme, $\alpha = \beta = \boldsymbol{k}$).

GAUSS – KRÜGER

Coeficiente de deformación superficial para elementos infinitesimales k_s

Se aplica el coeficiente de deformación lineal elevado al cuadrado (ya que por ser conforme, α = β = ***k***).

Por lo tanto:

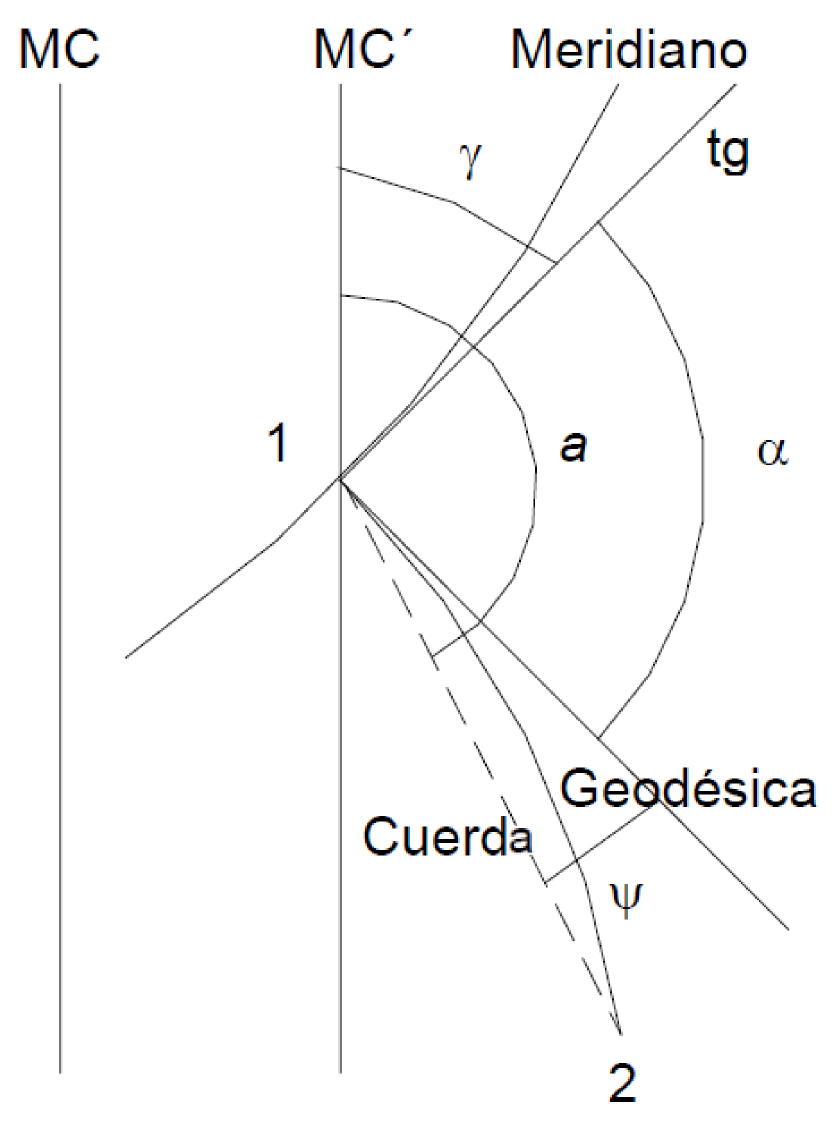
$$k_s = k^2 \Rightarrow k_s = \left[1 + \frac{\Delta\lambda^2}{2} \times \cos^2\varphi \times (1 + n^2) \right]^2$$

GAUSS–KRÜGER

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss

GAUSS–KRÜGER

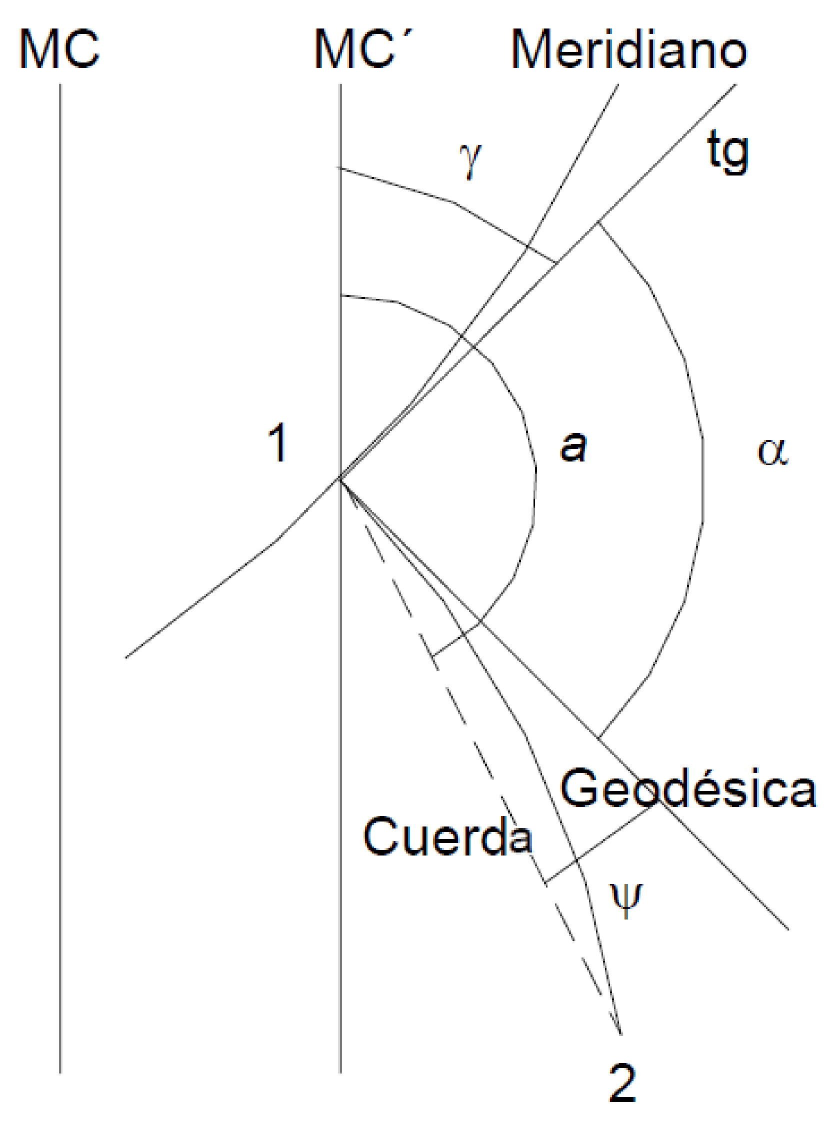
Transformada de la geodésica en el plano de Gauss



GAUSS–KRÜGER

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss

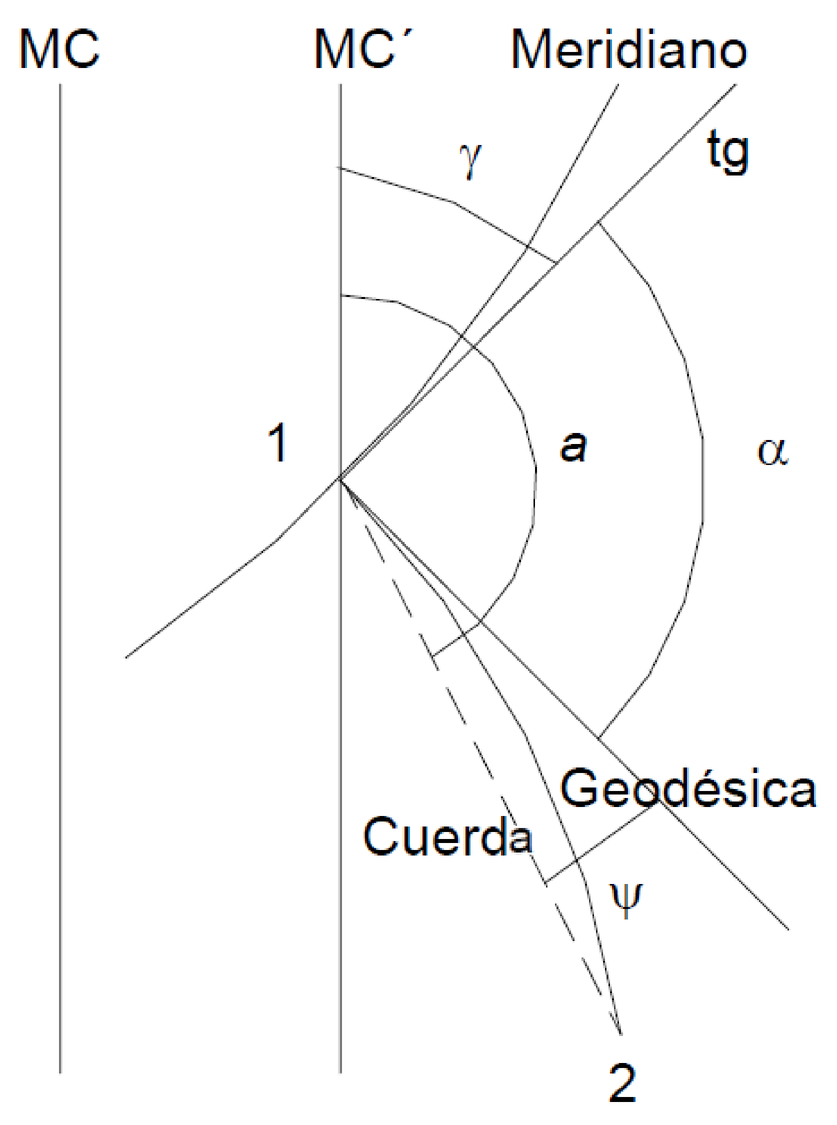
a es el acimut plano



G A U S S – K R Ü G E R

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss

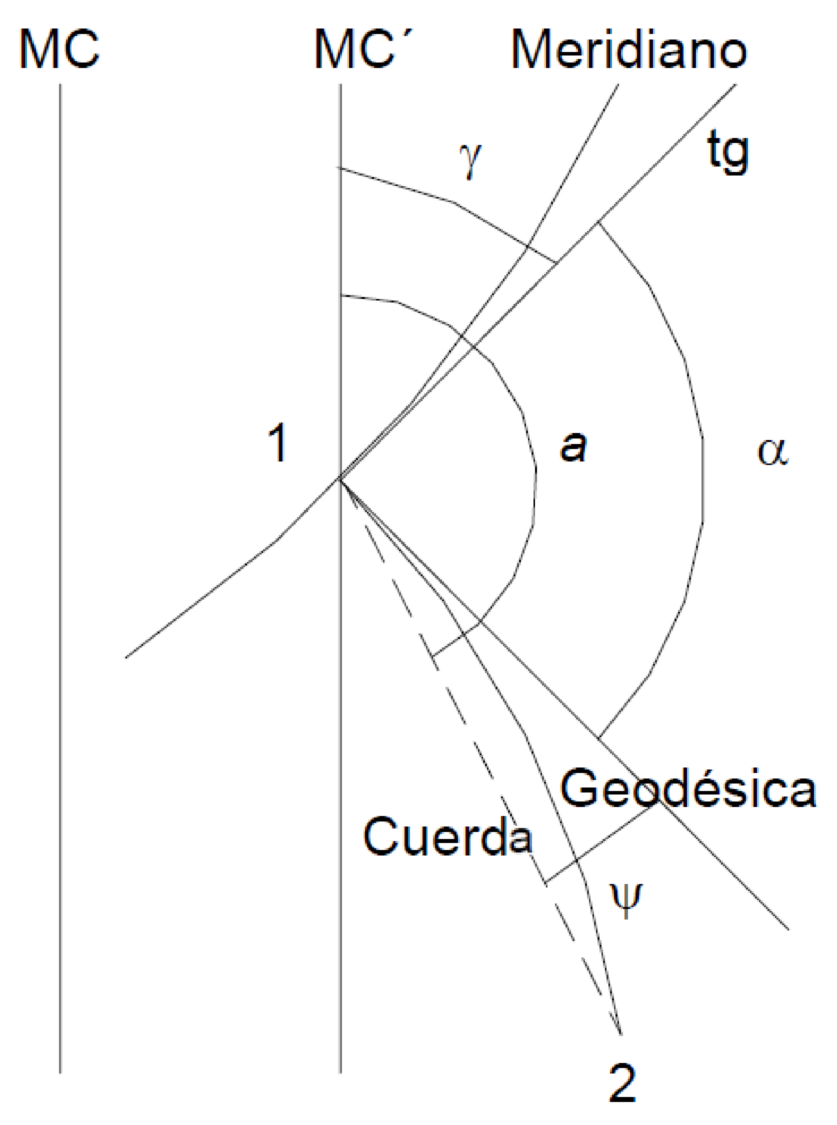
- a es el acimut plano
- α ángulo entre la tangente a la transformada del meridiano y la tangente a la transformada de la geodésica, que por la conformidad es igual al acimut



G A U S S – K R Ü G E R

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss

- a es el acimut plano
- α ángulo entre la tangente a la transformada del meridiano y la tangente a la transformada de la geodésica, que por la conformidad es igual al acimut
- ψ ángulo entre la tangente a la transformada de la geodésica y la cuerda. Se denomina **deflexión angular**



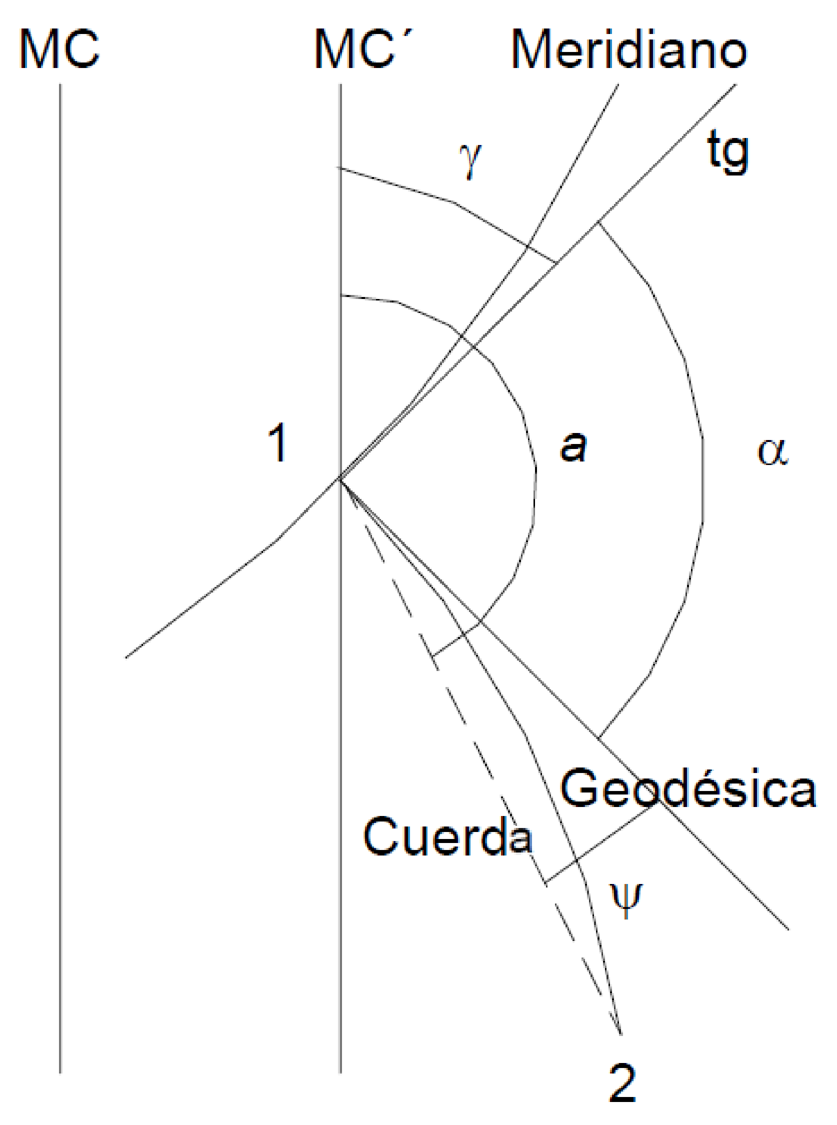
GAUSS–KRÜGER

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss

- a es el acimut plano
- α ángulo entre la tangente a la transformada del meridiano y la tangente a la transformada de la geodésica, que por la conformidad es igual al acimut
- ψ ángulo entre la tangente a la transformada de la geodésica y la cuerda. Se denomina **deflexión angular**

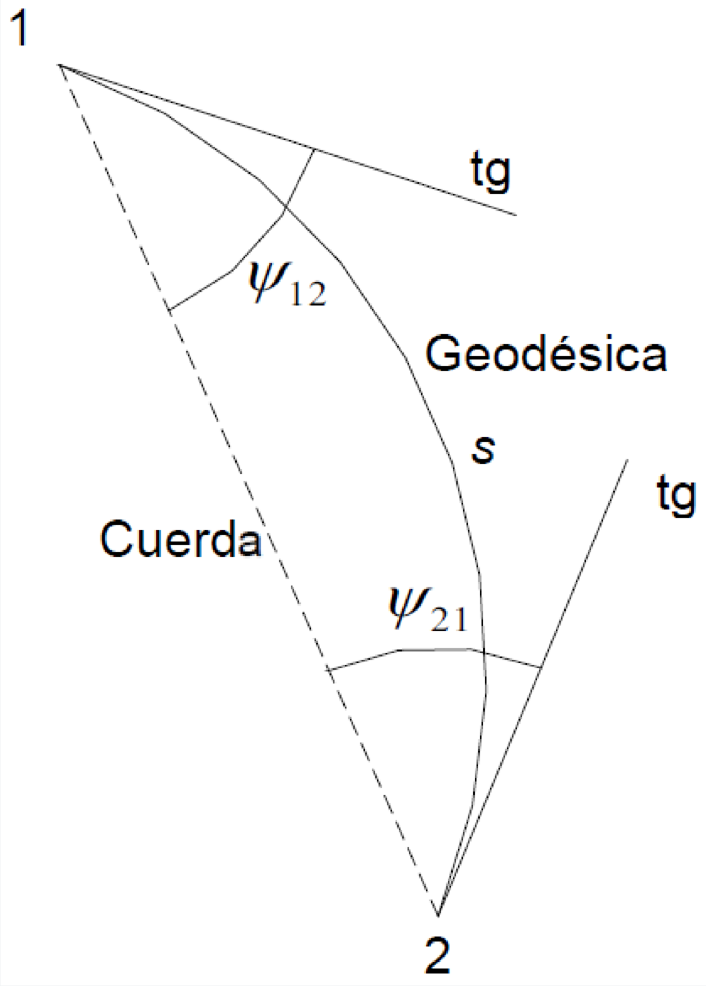
  Este valor depende de la curvatura de la geodésica que está dada por la expresión:

$$C = -\frac{Y_M . \cos a}{\rho N} \quad \text{con} \quad {Y_M}^2 = \left(\frac{Y_2 + Y_1}{2}\right)^2$$



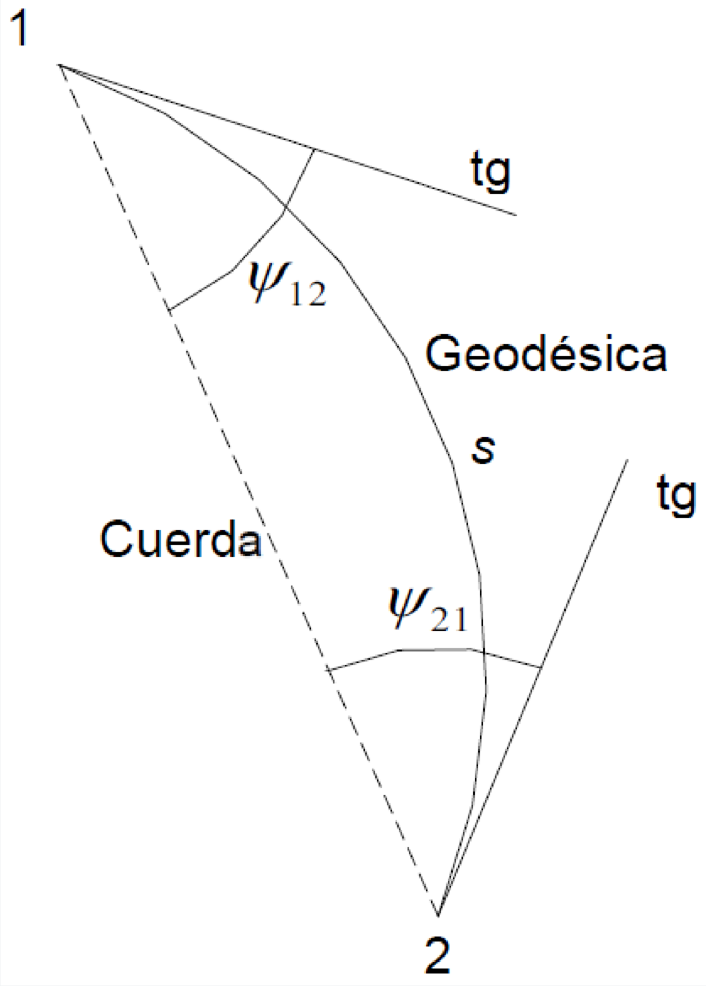
G A U S S – K R Ü G E R

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss



G A U S S – K R Ü G E R

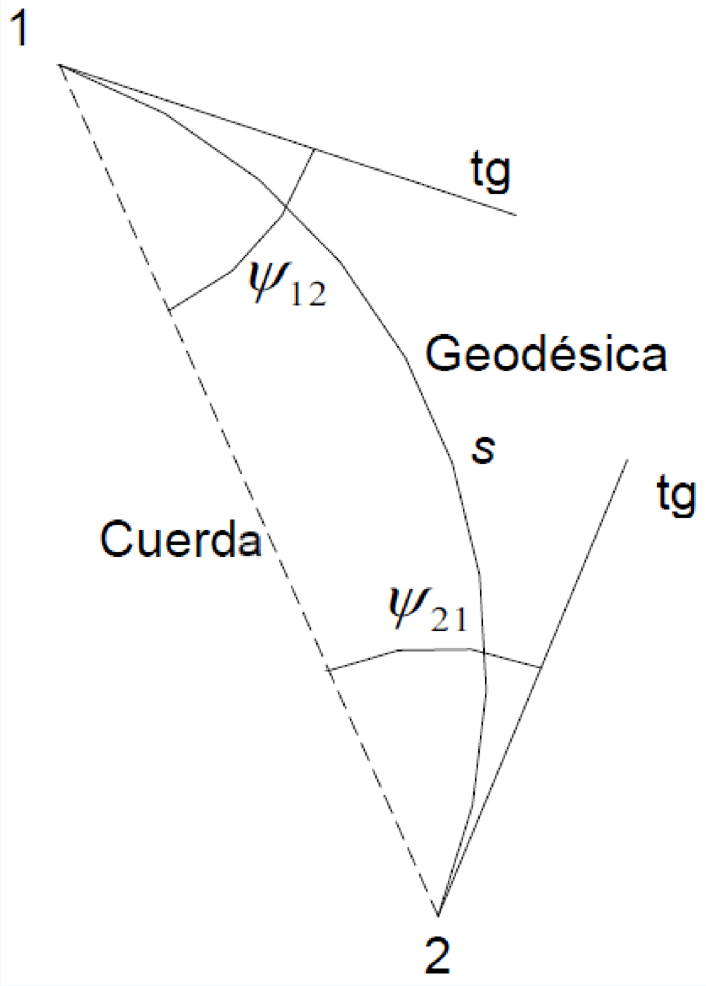
Transformada de la geodésica en el plano de Gauss



Si *s* es la transformada de una geodésica en el plano de Gauss, las deflexiones angulares vienen dadas por las siguientes expresiones:

GAUSS–KRÜGER

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss



Si *s* es la transformada de una geodésica en el plano de Gauss, las deflexiones angulares vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\psi_{12} = \frac{\Delta X\left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6}\right)}{2\rho_M N_M}$$ y $$\psi_{21} = -\frac{\Delta X\left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6}\right)}{2\rho_M N_M}$$

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

G A U S S – K R Ü G E R

<u>Algún ejemplo de la utilización de esta proyección</u>

Argentina

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Argentina

El marco de referencia oficial es el POSGAR 07.

Densificación del ITRF, época de referencia 2006.632

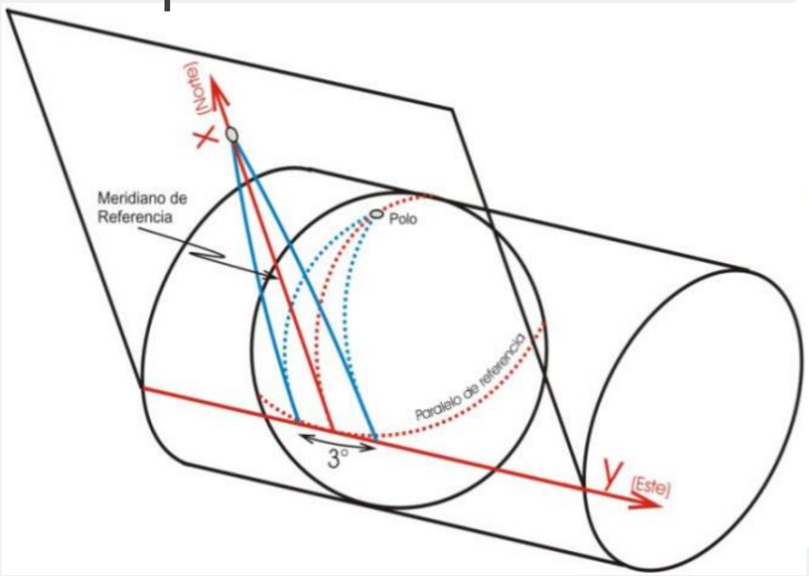
G A U S S – K R Ü G E R

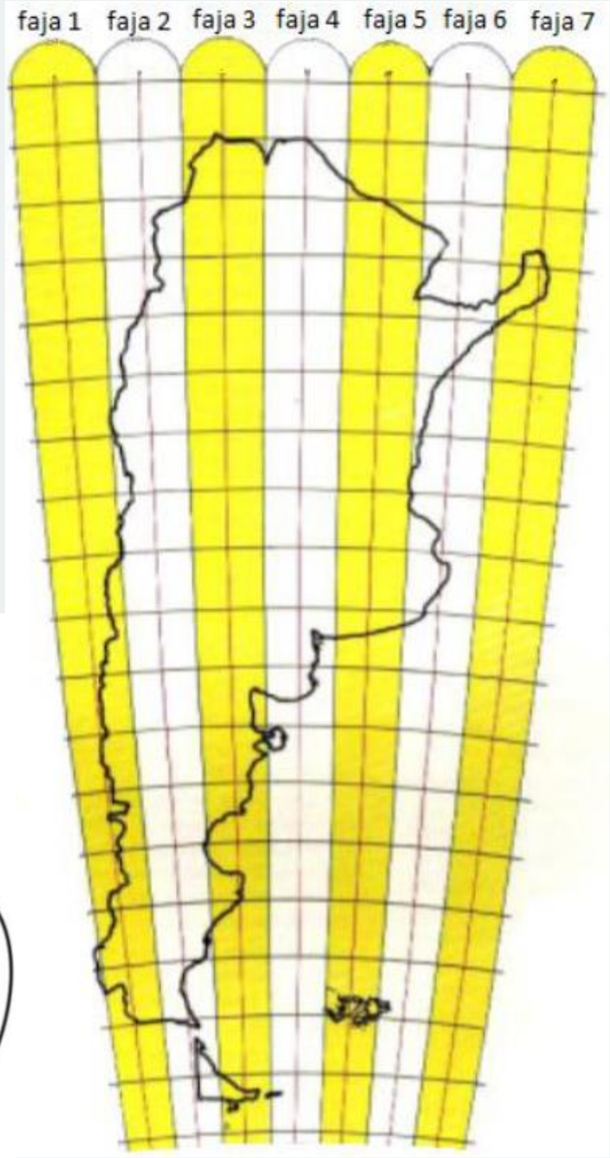
Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Argentina

El marco de referencia oficial es el POSGAR 07.
Densificación del ITRF, época de referencia 2006.632

Tiene asociado un sistema de proyección que incluye 7 fajas (o husos) que abarcan a todo el país. Cada huso tiene 3° de ancho.





G A U S S – K R Ü G E R

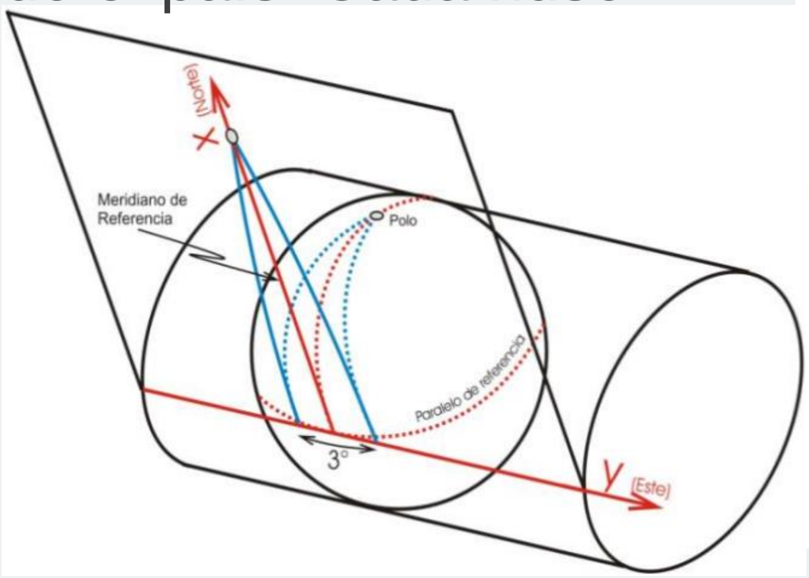
<u>Algún ejemplo de la utilización de esta proyección</u>

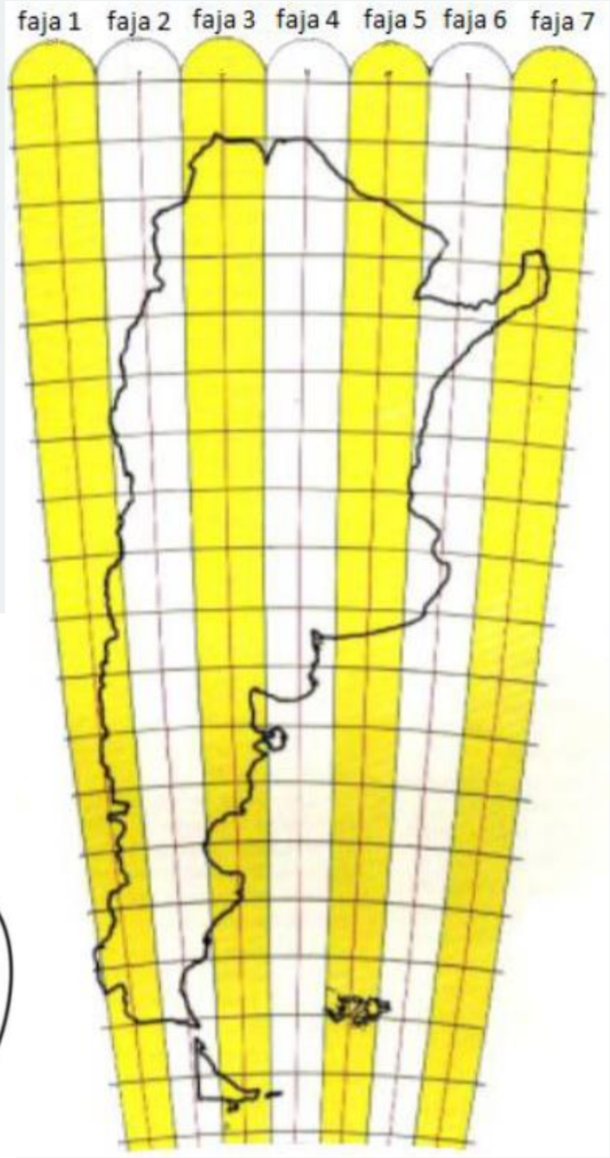
Argentina

El marco de referencia oficial es el POSGAR 07.
Densificación del ITRF, época de referencia 2006.632

Tiene asociado un sistema de proyección que incluye 7 fajas (o husos) que abarcan a todo el país. Cada huso tiene 3° de ancho.

De esta forma se aseguran de tener un factor de deformación lineal ***k*** que no alcanza el valor 1.0003.





G A U S S – K R Ü G E R

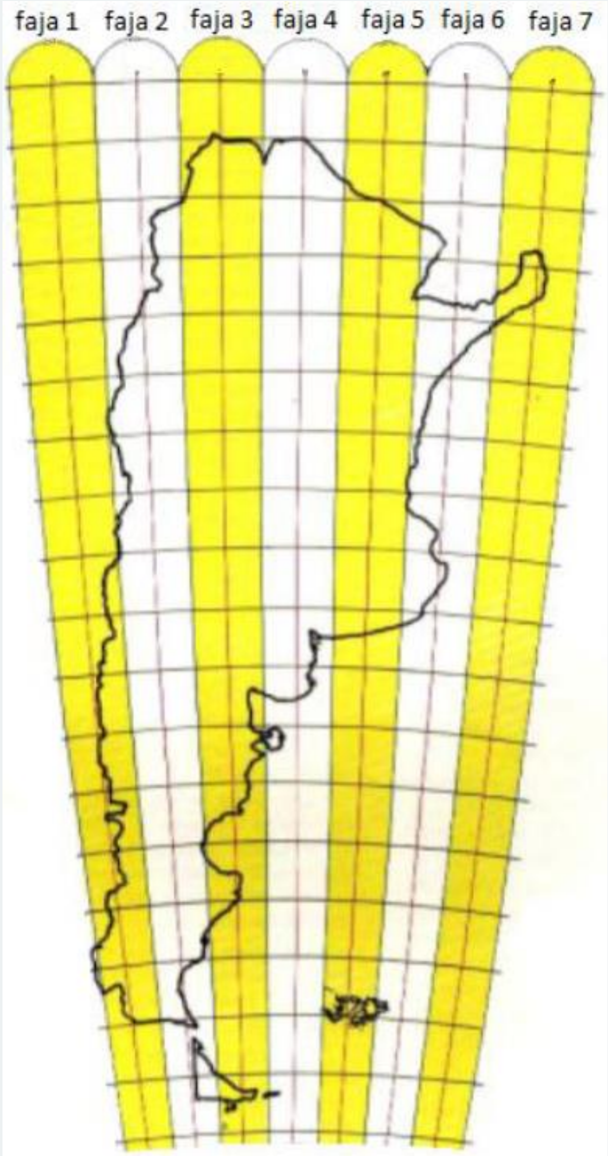
<u>Algún ejemplo de la utilización de esta proyección</u>

Argentina

Falso Este: Cada faja tiene en su meridiano de contacto el origen de la coordenada E dado por:

> 500.000m + *característica millonésima*, que viene dada por
>
> *k* x 1.000.000, donde *k* es el número de faja.

Falso Norte: El valor es 0m para todas las fajas y el origen es en el Polo Sur.



GAUSS–KRÜGER

<u>Algún ejemplo de la utilización de esta proyección</u>

Argentina

Falso Este: Cada faja tiene en su meridiano de contacto el origen de la coordenada E dado por:

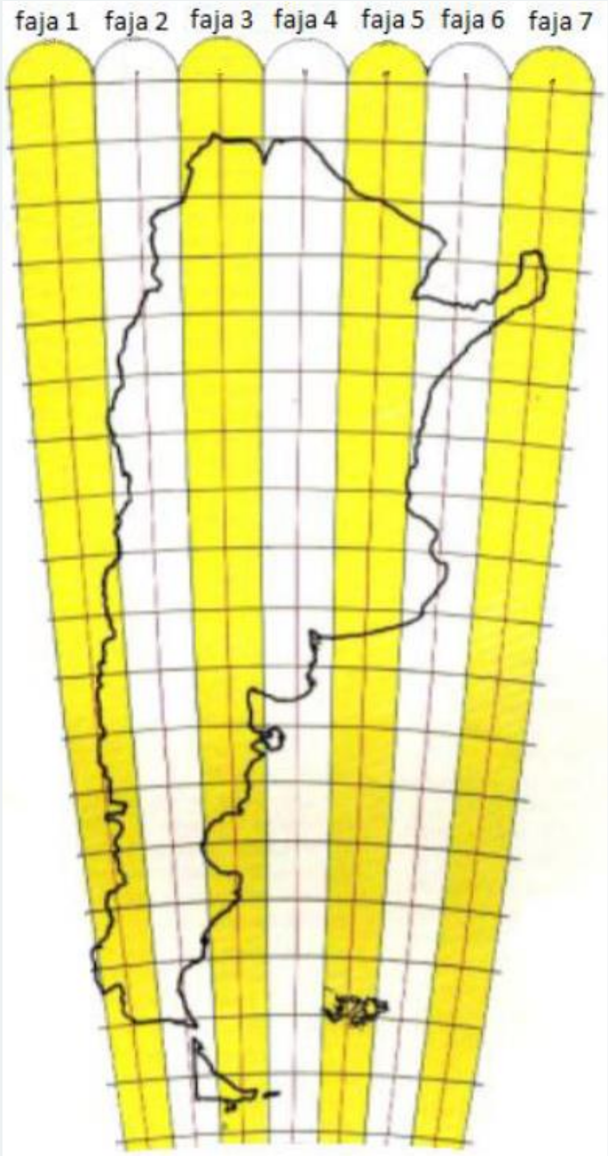
500.000m + *característica millonésima*, que viene dada por

k x 1.000.000, donde *k* es el número de faja.

Falso Norte: El valor es 0m para todas las fajas y el origen es en el Polo Sur.

* En sistemas de proyección utilizados en el hemisferio norte que involucran la Gauss-Krüger, el Falso Norte también es 0m, pero el origen es en el Ecuador.

* Para representar todo el globo con husos de esta proyección, con este criterio de tolerancia a la deformación, se necesitarían 120 husos.



GAUSS–KRÜGER

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Uruguay

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Uruguay

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Uruguay

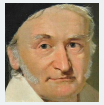
Desde 1965 a 1998, la cartografía nacional de nuestro país fue elaborada en base al Sistema de Referencia Geodésico ROU-USAMS.

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Uruguay

Desde 1965 a 1998, la cartografía nacional de nuestro país fue elaborada en base al Sistema de Referencia Geodésico ROU-USAMS.

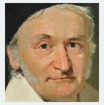
Tenía asociado una proyección cartográfica Gauss-Krüger con meridiano de contacto 62° W.

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Uruguay

Desde 1965 a 1998, la cartografía nacional de nuestro país fue elaborada en base al Sistema de Referencia Geodésico ROU-USAMS.



Tenía asociado una proyección cartográfica Gauss-Krüger con meridiano de contacto 62° W.

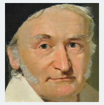
¡Sí! 62°, pero 62° centesimales, que corresponden a 55°48’ sexagesimales.

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección

Uruguay

Desde 1965 a 1998, la cartografía nacional de nuestro país fue elaborada en base al Sistema de Referencia Geodésico ROU-USAMS.



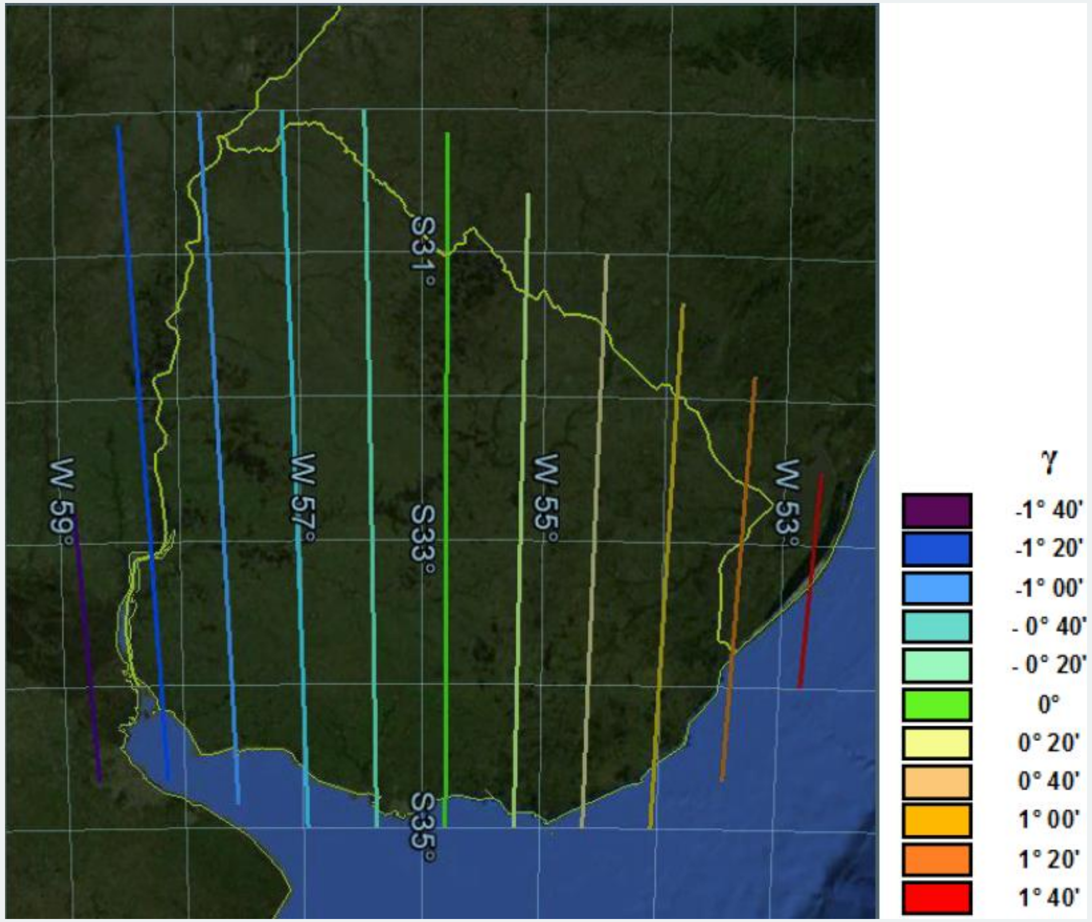
Tenía asociado una proyección cartográfica Gauss-Krüger con meridiano de contacto 62° W.

¡Sí! 62°, pero 62° centesimales, que corresponden a 55°48’ sexagesimales.

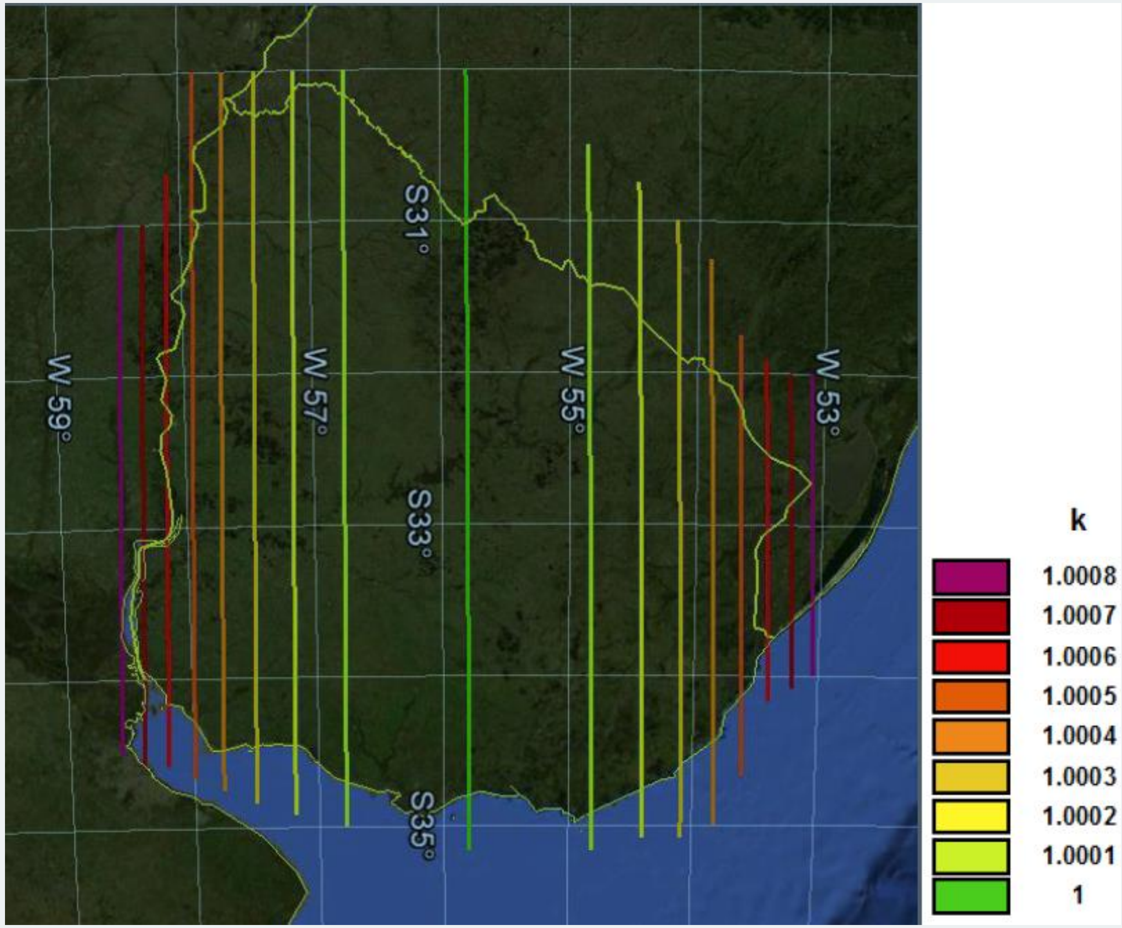
Faja o huso había uno sólo, y comprendía a todo el ancho del país.

G A U S S – K R Ü G E R

Algún ejemplo de la utilización de esta proyección



Mapa de Uruguay con curvas de isoconvergencia meridiana, para la proyección Gauss-Krüger MC = 55°48’ W



Mapa de Uruguay con curvas de isodeformación lineal ***k***, para la proyección Gauss-Krüger MC = 55°48’ W

GAUSS–KRÜGER

Aplicación de los factores de deformación

Conociendo en el elipsoide (o en el campo) las magnitudes a representar, ¿cómo puedo saber cuán deformadas terminarán una vez que las proyecto?

G A U S S – K R Ü G E R

Aplicación de los factores de deformación

Conociendo en el elipsoide (o en el campo) las magnitudes a representar, ¿cómo puedo saber cuán deformadas terminarán una vez que las proyecto?

G A U S S – K R Ü G E R

Aplicación de los factores de deformación

- Una vez calculado el valor de la convergencia plana meridiana y conocido o medido el acimut de una línea, bastará con hacer la suma de estas dos magnitudes para conocer el acimut de la línea en el plano de la proyección.

G A U S S – K R Ü G E R

Aplicación de los factores de deformación

- ɣ Una vez calculado el valor de la convergencia plana meridiana y conocido o medido el acimut de una línea, bastará con hacer la suma de estas dos magnitudes para conocer el acimut de la línea en el plano de la proyección.

  Si ɣ es positivo el acimut transformado aumentará, y si ɣ es negativo el acimut transformado disminuirá.

GAUSS–KRÜGER

Aplicación de los factores de deformación

- γ Una vez calculado el valor de la convergencia plana meridiana y conocido o medido el acimut de una línea, bastará con hacer la suma de estas dos magnitudes para conocer el acimut de la línea en el plano de la proyección.

  Si γ es positivo el acimut transformado aumentará, y si γ es negativo el acimut transformado disminuirá.

  En las aplicaciones que nos incumben, aplicar el valor de deflexión angular de la geodésica (Ψ) puede considerarse despreciable.

GAUSS–KRÜGER

Aplicación de los factores de deformación

k Conociendo el largo de la línea geodésica, se suelen utilizar tres maneras de calcular la deformación lineal que sufrirá al proyectarla.

G A U S S – K R Ü G E R

Aplicación de los factores de deformación

k Conociendo el largo de la línea geodésica, se suelen utilizar tres maneras de calcular la deformación lineal que sufrirá al proyectarla.

1- Multiplicar el largo de la línea por el valor promedio de k de los puntos extremos de la línea.

GAUSS–KRÜGER

Aplicación de los factores de deformación

k Conociendo el largo de la línea geodésica, se suelen utilizar tres maneras de calcular la deformación lineal que sufrirá al proyectarla.

1- Multiplicar el largo de la línea por el valor promedio de ***k*** de los puntos extremos de la línea.

2- Multiplicar el largo de la línea por un valor de ***k*** calculado para el punto medio de la línea.

GAUSS–KRÜGER

<u>Aplicación de los factores de deformación</u>

k Conociendo el largo de la línea geodésica, se suelen utilizar tres maneras de calcular la deformación lineal que sufrirá al proyectarla.

1- Multiplicar el largo de la línea por el valor promedio de ***k*** de los puntos extremos de la línea.

2- Multiplicar el largo de la línea por un valor de ***k*** calculado para el punto medio de la línea.

3- Multiplicar el largo de la línea por un valor de ***k*** calculado así:

$$k = \frac{k_1 + 4 \times k_m + k_2}{6}$$

G A U S S – K R Ü G E R

Aplicación de los factores de deformación

k Conociendo el largo de la línea geodésica, se suelen utilizar tres maneras de calcular la deformación lineal que sufrirá al proyectarla.

1- Multiplicar el largo de la línea por el valor promedio de ***k*** de los puntos extremos de la línea.

2- Multiplicar el largo de la línea por un valor de ***k*** calculado para el punto medio de la línea.

3- Multiplicar el largo de la línea por un valor de ***k*** calculado así:

$$k = \frac{k_1 + 4 \times k_m + k_2}{6}$$

Donde k_1 y k_2 son los valores de ***k*** para los puntos extremos y k_m el valor de ***k*** para el punto medio de la línea.

GAUSS–KRÜGER