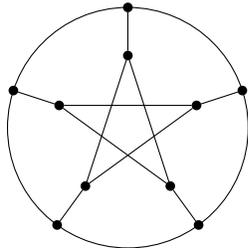


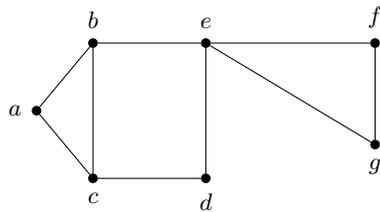
PRÁCTICO 8
 Grafos I: Caminos, conexidad, subgrafos

Ejercicio 1. Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine:

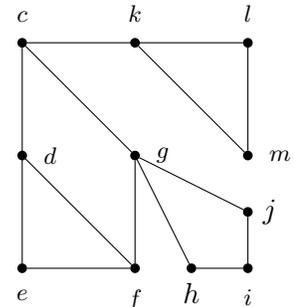
- a. Un camino abierto que no sea un recorrido.
- b. Un recorrido que no sea camino simple.
- c. Un camino simple de b a d de longitud 3.
- d. Un camino cerrado que no sea un circuito.
- e. Un circuito que no sea un ciclo.
- f. Todos los ciclos que pasan por b .
- g. Todos los caminos simples de b a f .



(i) Grafo de Petersen



(ii)



(iii)

Figure 1:

Ejercicio 2.

- a. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 1 (iii)?
- b. Halle el diámetro de K_n , $K_{n,m}$, P_n , C_n y del grafo de Petersen (Figura 1(i)).
- c. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?

Ejercicio 3. (1^{er} parcial 2017) Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20} .

¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y ?

Ejercicio 4. ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4 ?

Ejercicio 5. Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n + 1$ vértices v_0, v_1, \dots, v_n , tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y v_1, \dots, v_n, v_1 es un ciclo. En la Figura 2 se muestra W_3 , W_4 y W_5 .

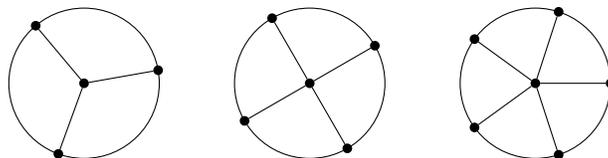


Figure 2:

- a. ¿Cuántas aristas tiene W_n ?
- b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3 ? ¿y W_4 ?
- c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3 , W_4 y W_5 ?
- d. Ídem para 5-ciclos.
- e. Ídem para 6-ciclos.
- f. Determine cuántos k -ciclos tiene W_n .

Ejercicio 6. Pruebe que dos caminos simples de la mayor longitud posible, en un grafo conexo, poseen un vértice en común.

Ejercicio 7. Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G ?

Ejercicio 8. Encuentre un grafo G que tenga tres vértices u , v y w tales que

$$\kappa(G - u) = \kappa(G), \quad \kappa(G - v) > \kappa(G), \quad \kappa(G - w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 9. Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, a la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

- a. Indique una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.
- b. Encuentre una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

Ejercicio 10. Sea G el grafo de la Figura 3 (a).

- a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
- b. Describa los subgrafos G_1 y G_2 de G (Figura 3 (b) y (c)) como subgrafos inducidos y en términos de la eliminación de vértices de G .
- c. Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
- d. Considere las aristas $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$ del grafo G y trace el subgrafo $G - \{e_1, e_2\}$.
- e. Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.
- f. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G ?
- g. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
- h. ¿Cuántos subgrafos de la parte g. tienen el vértice a como vértice aislado?

Ejercicio 11. (Examen marzo 2001)

El hipercubo H_n de dimensión n , es el grafo cuyos vértices son las n -uplas de ceros y unos, tales que dos n -uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, \dots, 0)$ es adyacente a $(1, 0, \dots, 0)$ pero no a $(1, 0, \dots, 0, 1)$.

- a. Halle los conjuntos de vértices de H_1 , H_2 , H_3 y dibuje dichos grafos.
- b. ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n ?
- c. Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
- d. Demuestre que H_n no tiene 3-ciclos.
- e. ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n ? (*Sugerencia:* cuente cuántos 4-ciclos pasan por un vértice fijo.)

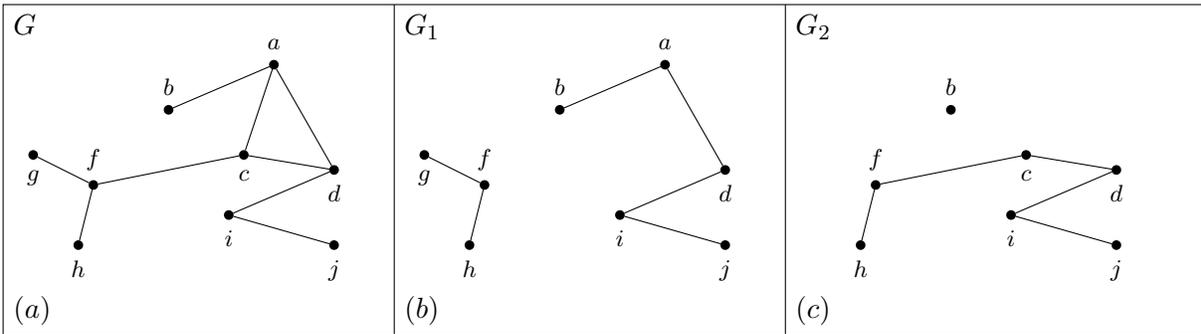


Figure 3:

Ejercicio 12. Sea G_n el grafo con vértices las n -uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n -uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n , $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.

- Dibuje G_2 , G_3 y G_1 .
- ¿Para qué valores de n es G_n conexo?
- ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n ?

Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.