Desigualdad de Chebyshov y Ley Fuerte de los Grandes Números
Práctico 8

Desigualdad de Chebyshov

Ejercicio 1 : Se realiza una encuesta para tratar de estimar el porcentaje de votos de determinado candidato. Al final de la misma se tendrán n respuestas, representadas en la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de realizaciones de la variable de Bernoulli de parámetro p (la probabilidad de que una persona elegida al azar en la población vote por el candidato en cuestión).

1. A partir de la mencionada muestra ¿Qué valor usaría usted para estimar p?.
2. Usando la Desigualdad de Chebyshov (y antes de tomar la muestra) ¿Cuántos datos tomaría para que, con una probabilidad de al menos 0,95, el estimador no distara del valor de p más de un 0,03?. (Sugerencia: Demuestre y use que para cualquier valor de $p \in [0, 1]$ se cumple $p(1-p) \leq 1/4$).

Ejercicio 2 (Parcial junio 2023): En una fábrica de productos electrónicos, se sabe que la duración promedio de determinados componentes de un juguete electrónico para niñs es de 800 horas con una desviación estándar de 40 horas. Entonces de acuerdo a la Desigualdad de Chebyshov la probabilidad de que un juguete elegido al azar de la fábrica tenga una duración de entre 720 y 880 horas es de al menos

(A) 1/2; (B) 3/4; (C) 7/8; (D) 1/4; (E) 2/5

Ejercicio 3 (Parcial julio 2024): En un proyecto de ingeniería, la resistencia de cierto tipo de material es crítica. Se sabe que la media de resistencia a la tracción de un tipo específico de material es $\mu = 1000 MPa$ (Mega Pascales) y la desviación estándar es de $\sigma = 50 MPa$. Si se toma uno de estos materiales y se mide su resistencia y le llamamos p a la probabilidad de que dicha resistencia se encuentre entre 935 y 1065. Entonces, según la Desigualdad de Chebyshov podemos concluir que:

(A) $p \geq 0{,}612$; (B) $p \geq 0{,}408$; (C) $p \leq 0{,}408$; (D) $p \leq 0{,}612$; (E) $p = 0{,}421$.

Ley Fuerte de los Grandes Números

Definición. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias. Se dice que $X_n \xrightarrow{c.s.} a \in \mathbb{R}$ si se cumple que $P(\{X_n \to a\}) = 1$. Se dice en este caso que la sucesión X_n converge casi seguramente a a. Análogamente se dice que $X_n \xrightarrow{c.s.} +\infty$ si se cumple que $P(\{X_n \to +\infty\}) = 1$. Se dice en este caso que la sucesión X_n diverge casi seguramente a $+\infty$. De forma similar se define $X_n \xrightarrow{c.s.} -\infty$.

Ejercicio 4 : Este ejercicio describe el *método de Montecarlo* para el cálculo de integrales.

1. Sean $(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{U}[a,b]$ iid y $f \in R[a,b]$ (f es integrable Riemann en $[a,b]$), mostrar que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Sea D una región arbitraria de $[0,1]\times[0,1]$ y sean $U_1,\ U_2,\dots$ variables aleatorias *idd* con distribución $\mathcal{U}([0,1]\times[0,1])$, es decir que se cumple que $P(U \in A) = \text{área}(A \cap [0,1]\times[0,1])$.
Si $a_n = \dfrac{\#\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y } U_i \in D\}}{n}$ probar que $a_n \xrightarrow{c.s.} \text{área}(D)$.

Ejercicio 5 : Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables independientes e idénticamente distribuidas.
Suponga que $E(X_1) = 0$ y sea $Y_i = \dfrac{X_i + X_{i+1}}{2}$.
Demostrar que $\overline{Y}_n \xrightarrow{c.s.} 0$, aunque $Y_n,\ Y_{n+1}$ pueden ser dependientes para todo n.

Ejercicio 6 : Demostrar que si $X_n \xrightarrow{c.s.} a$, $Y_n \xrightarrow{c.s.} b$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua entonces

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{c.s.} a + b$.
2. $X_n Y_n \xrightarrow{c.s.} ab$.
3. $g(X_n) \xrightarrow{c.s.} g(a)$.

Ejercicio 7 : Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de v.a. *iid* con $E(X_1) = a > 0$. Probar que entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{c.s.} +\infty$$

Ejercicio 8 : Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de v.a. *iid* con distribución exponencial de parámetro λ.

1. Hallar el límite casi seguro de $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$.
2. Hallar el límite casi seguro de $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.