Señales aleatorias y modulación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

26 de septiembre de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [5 pts.]

`Dithering y Noise Shaping`

1. Explicar cuál es el problema que aparece al cuantizar una señal con pocos niveles de cuantización
2. ¿En qué consiste la técnica el Dithering? Explicar cualitativamente como esta técnica mitiga el problema anterior
3. Explicar en qué consiste la técnica de Noise Shaping y que objetivo tiene.

Pregunta [5 pts.]

`Procesos estacionarios y ergódicos.`

1. Definir un proceso estocástico en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).
2. Enunciar y detallar la hipótesis del teorema de ergodicidad en media cuadrática. Dar al menos dos condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla.

Problema 1 [20 pts.]

Un proceso en tiempo discreto $x[n]$ se obtiene muestreando un proceso estacionario en sentido amplio de tiempo continuo $x_c(t)$, de manera que $x[n] = x_c(nT_s)$, donde $P(|x_c(t)| > 1) \approx 0$.

(a) Probar que la autocorrelación del proceso en tiempo discreto es igual a la autocorrelación del proceso en tiempo continuo muestreada, es decir que $R_x[m] = R_{x_c}(mT_s)$.

Considerar que la autocorrelación de $x_c(t)$ es

$$R_{x_c(t)} = 0.1[\text{sinc}(t/T_s) + \frac{1}{2}\text{sinc}((t - T_s)/T_s) + \frac{1}{2}\text{sinc}((t + T_s)/T_s)]$$

.

(b) Calcular la autocorrelación del proceso discreto $R_x[m]$, y la densidad espectral de potencia del proceso $x[n]$, $S_x(e^{j\theta})$.

(c) Enunciar el teorema de muestreo para procesos estacionarios y verificar que se trabaja en las hipótesis del teorema

El proceso x_c es muestreado utilizando un cuantizador Q de 10 bits y posteriormente es filtrado con un fitro H lineal e invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1])$$

.

(d) Dar el diagrama de bloques del sistema completo.

(e) Calcular la relación señal a ruido luego del cuantizador y antes del filtro H. Indicar las hipótesis de trabajo y el modelo utilizado para el ruido de cuantización

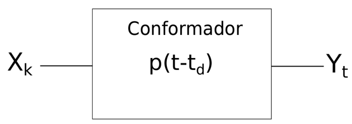
Teniendo en cuenta que la salida del sistema es WSS.

(f) Dar la potencia del ruido a la salida del sistema.

(g) Dar la relación señal a ruido a la salida del sistema. Comparar con la SNR previa al filtro H.

Problema 2 [20 pts.]

Se desea transmitir una secuencia binaria X_k iid a una tasa de $r = \frac{1}{T} bits/s$, donde los bits 1 tienen una probabilidad p_b, y se les asigna el valor A, mientras que los bits 0 tienen probabilidad $1 - p_b$, y se les asigna el valor $-A$. Para adaptar la señal al canal analógico, se genera una señal PAM $Y(t)$ utilizando un pulso conformador $p(t)$.



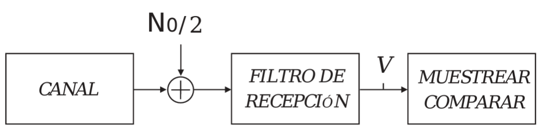
(a) Hallar y graficar la autocorrelación de la secuencia discreta de entrada y su densidad espectral de potencia.

Para que el proceso $Y(t)$ sea estacionario, se supone que el pulso conformador está retrasado un tiempo t_d respecto al origen de la secuencia, donde t_d está uniformemente distribuido en el intervalo $[0, T]$.

(b) Hallar y graficar la densidad espectral de potencia de Y(t) en el caso en que el pulso conformador sea rectangular de ancho T.

(c) Discutir cómo afecta p_b la forma del espectro.

La señal PAM será transmitida a través de un canal que introduce ruido blanco gaussiano aditivo con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$. Se supone que los bits son equiprobables y que el filtro receptor es un filtro pasabajos ideal de ancho de banda B, que no modifica los pulsos.



(d) Sea $V[k]$ la señal a la entrada del comparador. Hallar y graficar las densidades de probabilidad $p_V(v|0)$ y $p_V(v|1)$, que corresponden a las probabilidades condicionales de V cuando se transmite un 0 o un 1 lógico, respectivamente.

(e) Hallar el umbral de decisión y expresar la probabilidad de error en función de A, B y N_0.

Solución

Pregunta

Ver teórico

Pregunta

Ver teórico

Problema 1

(a)

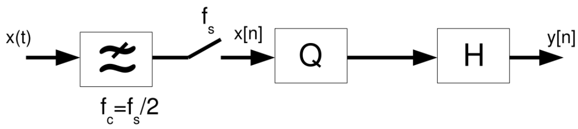
$$R_x[m] = \mathsf{E}\big[x[n]x[n+m]\big] = \mathsf{E}\big[x_c(nT_s)x_c((n+m)T_s)\big] = R_{x_c}(mT_s)$$

(b)

$$R_x[m] = R_{x_c}(mT_s) = 0.1(\delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1]))$$

$$S_x(e^{j\theta}) = F(R_x[m]) = F(0.1(\delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1]))) = 0.1(1 + cos(\theta))$$

(c) Ver teórico. Observando el proceso, vemos que el ancho de banda es justo el correspondiente a $f_s/2$ por lo que estamos en las hipótesis del teorema.



(d)

(e) Del modelo de ruido y la autocorrelación de x se tiene:

$$P_{ruido} = q^2/12, \text{ con } q = 2/2^{10} = 2^{-9}$$

$$P_x = R_x[0] = 0.1$$

Planteando simplemente el cociente de las mismas obtenemos la SNR:

$$SNR = P_x/P_{ruido} = 0,1 \times 12/2^{-18} = 55dB$$

Ver hipótesis de trabajo y modelo de ruido en teórico.

(f)

$$P_{ruido,salida} = P_{ruido} \sum |h[n]|^2 = \frac{q^2}{12}(1 + 1/4 + 1/4) = q^2/8$$

(g) Calculamos la potencia de señal a la salida del filtro y luego planteamos el cociente:

$$P_{x,salida} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} S_x(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 0.1(1 + cos(\theta))^3 d\theta$$

$$P_{x,salida} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 0.1(1 + 3cos(\theta) + 3cos(\theta)^2 + cos(\theta)^3) d\theta = 0.25$$

$$SNR = P_{x,salida}/P_{ruido,salida} = \frac{0.25}{q^2/8} = 57dB$$

Problema 2

(a) Planteamos el cálculo de la autocorrelación:

- Para $n \neq m$:

$$R_X[n,m] = E\{X_n X_m\} = E\{X_n\}E\{X_m\} = m_X^2 = (p_b A + (1-p_b)(-A))^2 = A^2(2p_b - 1)^2$$

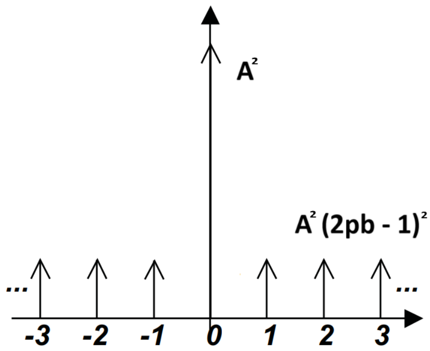
- Para $n = m$:

$$R_X[n,n] = E\{X_n^2\} = A^2 p_b + (-A)^2(1-p_b) = A^2$$

Entonces:

$$R_X[n] = A^2\delta[n] + \sum_{k\neq 0} A^2(2p_b-1)^2\delta[n-k]$$

La forma de la autocorrelación se muestra en la siguiente figura.



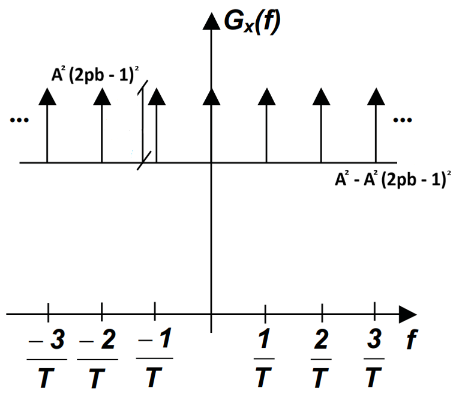
Para hallar la densidad espectral de potencia de X_t, escribimos la autocorrelación en la forma:

$$R_X[n] = A^2\left(1 - (2p_b-1)^2\right)\delta[n] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2(2p_b-1)^2\delta[n-k]$$

Aplicando la transformada de Fourier a esta expresión y utilizando la fórmula de Poisson, obtenemos la densidad espectral de potencia $S_X(f)$:

$$S_X(f) = A^2\left(1-(2p_b-1)^2\right) + A^2(2p_b-1)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - \frac{k}{T})$$

Su forma se muestra en la siguiente figura.



(b) Sabemos que $Y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k p(t-kT-t_d)$ es una señal PAM cuyas símbolos no se encuentran correlacionados. Por lo tanto su densidad espectral de potencia está dada por:

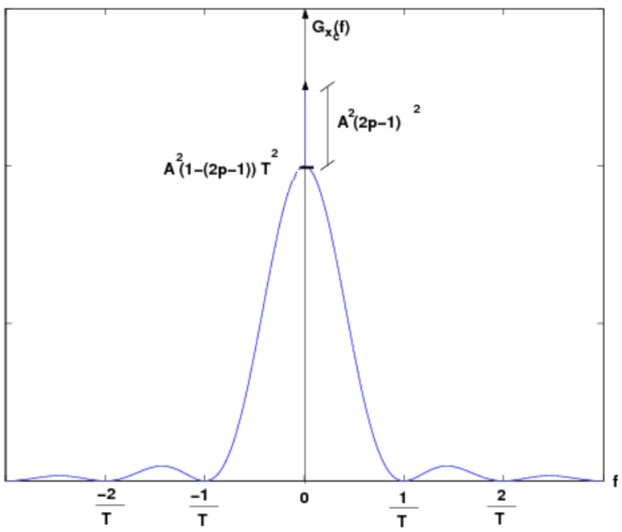
$$S_Y(f) = \frac{\sigma^2}{T}\,|P(f)|^2 + \frac{m^2}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(k/T)|^2\;\sigma(f-k/T)$$

donde:

- $m^2 = A^2(2p_b-1)^2$
- $\sigma^2 = 2\,A^2\,p_b\,(1-2p_b))$
- $P(f) = T\,sinc(fT)$

Sustituyendo en la expresión original obtenemos:

$$S_Y(f) = 2\,A^2\,p_b\,(1-2p_b))\;T\,sinc^2(fT) + A^2(2p_b-1)^2\sigma(0)$$



(c) El valor de p_b afecta a los valores de m y σ. Específicamente, si $p_b = \frac{1}{2}$, entonces $m_X = 0$ y no hay un delta en $f = 0$ en el espectro. Esto es deseable ya que permite ahorrar potencia de transmisión que antes no se aprovechaba. En este caso, $S_X(f) = 2\,A^2\,p_b\,(1-2p_b))\,T\mathrm{sinc}^2(fT)$.

Para los casos $p_b = 0$ o $p_b = 1$, el espectro queda solo formado por las deltas.

(d) A la entrada del comparador, la señal $v[k]$ es de la forma:

$$v[k] = y[k] + n[k]$$

donde $y[k]$ es la señal PAM enviada y $n[k]$ representa el ruido AWGN.

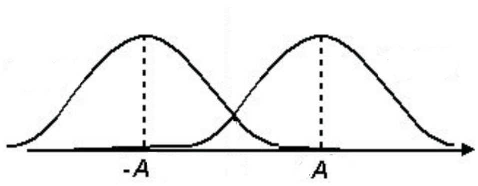
Tenemos entonces que:

- $v[k] = -A + n[k]$ si se transmite un 0.
- $v[k] = A + n[k]$ si se transmite un 1.

Si no hubiese ruido, las densidades de probabilidad serían dos deltas: una centrada en 0 y otra en A. Pero debido al ruido blanco gaussiano, las densidades de probabilidad reales son:

$$p_V(v|0) = p_N(v+A)$$

$$p_V(v|1) = p_N(v-A)$$



(e) Sea V_T el umbral óptimo de decisión. La probabilidad de error se calcula como:

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1}$$

donde:

$$P_{e0} = \int_{V_T}^{\infty} p_V(v|0)dv$$

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^{V_T} p_V(v|1)dv$$

El umbral óptimo es aquel que satisface:

$$p_V(V_T|0) = p_V(V_T|1) \quad \Rightarrow \quad V_T = 0$$

Entonces, la probabilidad de error es:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0\, B}}\right)$$