

Soluciones Primer parcial Ec. dif 2024.

Ejercicio 1: $\ddot{x} = -x - ax$

a) Si $y = \dot{x}$ obtenemos el sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - ay \end{cases}$.
Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$ el sistema en formato matricial es $(\dot{x}, \dot{y}) = F(t, x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (lineal)

- Observar que F es de clase C^∞ por lo que es loc. Lipschitz en var espacial.
- $\text{Dom } F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

Por lo tanto F se encuentra en las cond. del teo. de Picard
En particular las soluc. son únicas.

b) Las soluc de un sistema lineal $\dot{X} = AX$ (con A con coef. const)

son de la forma $\varphi(t) = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, siendo esta expresión válida para $t \in \mathbb{R}$

(de forma tal que $\text{dom } \varphi = \mathbb{R}$). Por lo tanto los intervalos max son no acotados.

c) En función de los vaps de A podemos describir el comportamiento de la dinámica.

$$\bullet \det(A - \lambda \text{Id}) = (-\lambda)(-a-\lambda) + 1 = \lambda^2 + a\lambda + 1 \rightarrow \text{raíces } \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

tres casos: (I) $a \in (0, 2)$: raíces complejas con parte real $-a/2 \in (-1, 0)$

(II) $a = 2$: raíz real doble $-a/2 = -1$

(III) $a \in (2, +\infty)$: dos raíces reales negativas ($\sqrt{a^2 - 4} < a$)

Caso I: A es semejante a una matriz de la forma $B_\eta = \begin{pmatrix} -a/2 & b \\ -b & -a/2 \end{pmatrix}$

Las soluc al sistema $(\dot{u}, \dot{v}) = B_\eta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ son de la forma

$$(u(t), v(t)) = r_0 e^{-a/2 t} \begin{pmatrix} \cos(-bt + \theta_0) \\ \sin(-bt + \theta_0) \end{pmatrix}$$

Caso II: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Veamos si A diagonalizable. (vap. -1)

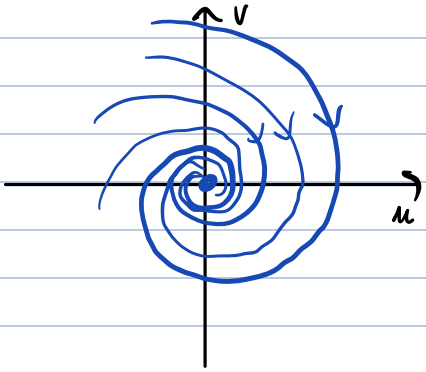
$$(A - (-1)\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + \text{Id}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sii } v_1 + v_2 = 0 \quad ((1, -1) \text{ vect. p}) \\ \Rightarrow \ker(A + \text{Id}) \text{ tiene dim } 1$$

Por lo tanto A no es drag y es semejante a $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

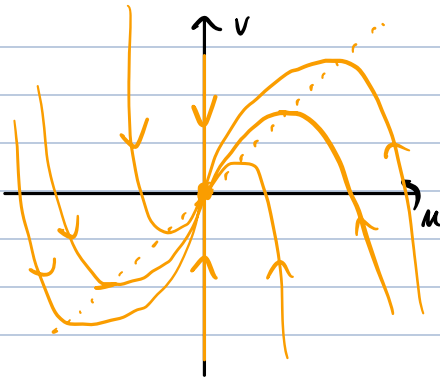
Caso III: A es semejante a $B_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ siendo λ_i los vaps negativos distintos.

Por lo tanto a menos de un cambio de base las dinámicas en cada caso son:

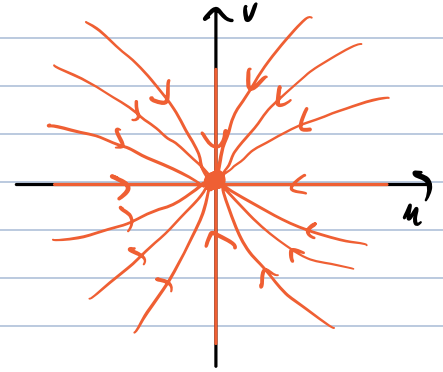
Caso (I)



Caso (II)



Caso (III)



Interpretación: Al agregar rozamiento, en todos los casos el punto de equilibrio es un atractor. Todas las soluciones tienden al punto estacionario.

Sin embargo las aproximaciones al pto de equilibrio son distintas, dependen de cuánto rozamiento tenga el sistema.

Caso I ($\alpha \in (0, 1)$): El sistema tiende al pto de equilibrio oscilando, de forma tal que el vector (posición, velocidad) da infinitas vueltas al pto de equilibrio.

Caso II ($\alpha = 1$): El sistema tiene más rozamiento y ya no tiende oscilando. Sin embargo la posición y velocidad no van de forma monótona al caso, se puede dar una "vuelta" antes de que se frene la partícula.

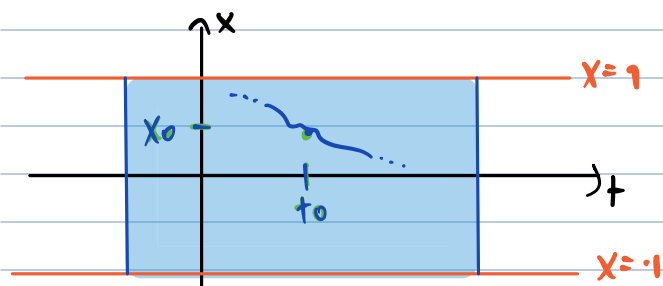
Caso III ($\alpha > 1$): El rozamiento es tanto que el sistema no rebota, va de forma monótona de su posición inicial al pto de equilibrio.

Obs: Si bien no era necesario, se puede estudiar con más detalle cada sistema encontrando un cambio de base adecuado y una soluc. explícita.
De todas formas, a quien lo haya hecho se lo valoraré.

Ejercicio 2:

- a) $\dot{x} = x^2 - 1$
- Observar que la ecuación se encuentra en las hipótesis de Picard por lo tanto las soluciones son únicas.
Además existen dos soluciones: $x(t) = 1$ y $x(t) = -1$
 - También observar que la ecuación es autónoma, por lo tanto si $x(t)$ solución, $x(t-c)$ también $\forall c \in \mathbb{R}$.
 - Si $f(t,x) = x^2 - 1$, $\begin{cases} f(t,x) > 0 & \text{si } |x| > 1 \\ f(t,x) < 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$

Afirmación 1: Si $(t_0, x_0) \in \{(t,x) : |x| < 1\}$, la solución $\dot{x} = x^2 - 1$ con $x(t_0) = x_0$ tiene intervalo maximal no acotado ($\text{todo } \mathbb{R}$).



Para probarlo nos consideraremos el compacto $K = [t_0 - L, t_0 + L] \times [-1, 1]$ con $L > 0$.

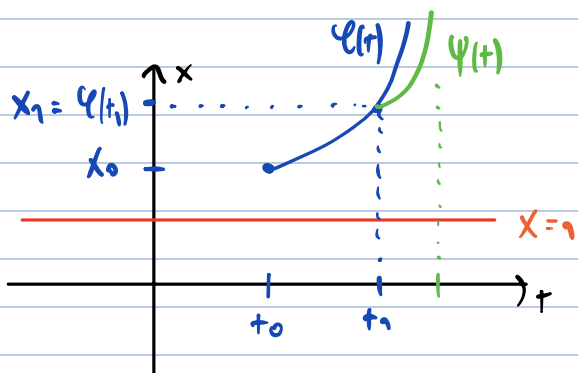
Observar que dos lados del rectángulo K están incluidos en las soluciones.

- Entonces:
- Por teo de escape de compactos, la soluc por (t_0, x_0) corta ∂K
 - Por unicidad de soluciones la soluc por (t_0, x_0) no corta las horizontales de K

Por tanto la solución se escapa por lados laterales $\Rightarrow [t_0 - L, t_0 + L] \subset \text{intervalo maximal de la soluc.}$

Como L es arbitrario. \mathbb{R} es el intervalo maximal de la solución. \checkmark

Afirmación 2: Si $(t_0, x_0) \in \{(t,x) : x > 1\}$ y φ soluc al problema con c.i. $\varphi(t_0) = x_0$ entonces, si \mathcal{I} dominio maximal de φ , $\mathcal{I} = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.



- Fijamos (t_0, x_0) con $x_0 > 1$. Como $f' > 0$ en la región $x > 1$ $\varphi(t)$ estrictamente creciente. De hecho $\varphi''(t) = 2\varphi'(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

- Consideramos $t_1 > t_0$ tal que si $x_1 = \varphi(t_1)$

$$x^2 - 1 \geq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq x_1 \quad (\text{alcanza } x_1 > \sqrt{2})$$

- Luego, si $\begin{cases} f_1(t,x) = x^2 - 1 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$, $\textcircled{+}$ $\begin{cases} f_2(t,x) = x^2/2 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$, Como $f_1(t,x) > f_2(t,x) \quad \forall x \geq x_1$
por comparación $\Rightarrow \varphi(t) > \psi(t) \quad \forall t > t_1$

Siendo $\Psi(t)$ soluc a \textcircled{F} . ($\rightarrow \Psi(t)$ u del estilo $\frac{1}{\pm + cte}$).

• Como $\text{dom}(\Psi)$ u de la forma $(-\infty, cte)$, necesariamente $\text{dom}(\Psi)$ acot. superiormente.

• Por último, como $\Psi > 0$ en región $x > 1$ y $x=1$ soluc cte, tomando un compacto K de la forma $K = [-T, t_0] \times [1, x_0]$ tenemos que necesariamente a pasado la soluc corta el lado lateral izq de K . Como $T > 0$ arbitrario, $\text{dom}(\Psi)$ no acotado inferiormente.

Concluimos $\text{dom}(\Psi)$ u de la forma $(-\infty, cte)$

Afirmación 3: Si $(t_0, x_0) \in \{(t, x) : x < -1\}$ y Ψ soluc al problema con c.i. $\Psi(t_0) = x_0$ entonces, si \mathcal{I} dominio maximal de Ψ , $\mathcal{I} = (a, t_0)$ con $a \in \mathbb{R}$.

• Observar que si $\Psi : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ soluc de $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ x(t_0) = x_0 < -1 \end{cases}$, entonces

$$\Psi : (a, t_0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ soluc de } \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ x(-t_0) = -x_0 < -1 \end{cases} \text{ donde } \Psi(t) = -\Psi(-t)$$

Es decir, las soluciones con c.i. < -1 son simétricas a las estudiadas en la región $x > 1$, de donde inmediatamente se desprende la afirmación 3.

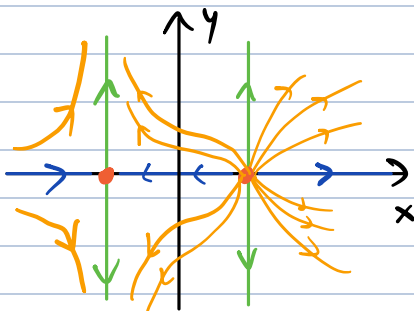
(También se puede probar la afirmación repitiendo argumento anterior con comparación.)

b) $f(x, y) = (x^2 - 1, y) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = y \end{cases}$

I) f u de clase C^∞ y por lo tanto loc-lipschitz en var. espacial.
Además $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$ por lo que f está en las hipótesis del teorema de Picard.
Esto garantiza existencia y unicidad para cualquier cond. inicial.

II) $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ sii $(x, y) = (-1, 0)$ o $(x, y) = (1, 0)$

III)



Observar que el punto $(-1, 0)$ es un punto silla, en particular u de equilibrio inestable.

Por otro lado $(1, 0)$ u un repulsor, por lo tanto también de equilibrio inestable.

IV) La ecuación es desacoplada, u decir, si $\begin{cases} x(t) \text{ soluc a } \dot{x} = x^2 - 1 \text{ con } x(t_0) = x_0 \\ y(t) \text{ soluc a } \dot{y} = y \text{ con } y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Entonces $(x(t), y(t))$ soluc a $(\dot{x}, \dot{y}) = (x^2 - 1, y)$ con $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$

Las soluciones de x ya las estudiamos, y las soluc de y son $y(t) = y_0 e^t$.
Como $y(t)$ definido en \mathbb{R} , solo la primer componente es la que puede restringir el intervalo max de definici3n.

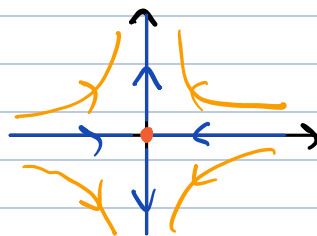
Concluyendo que si (x_0, y_0) cond inicial y $\varphi(t)$ soluc maximal,

- Si $x_0 > 1$, $\text{dom}(\varphi)$ de la forma $(-\infty, cte)$
- Si $x_0 \in (-1, 1)$, $\text{dom}(\varphi)$ de la forma $(-\infty, +\infty)$
- Si $x_0 < -1$, $\text{dom}(\varphi)$ de la forma $(cte, +\infty)$

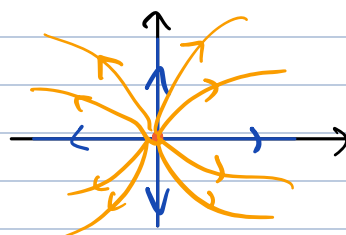
$$\text{II) } J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A_{-1} := J_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_1 := J_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- A_{-1} es diagonal con vaps -2 y $1 \Rightarrow (0, 0)$ inestable silla
- A_1 es diagonal con vaps 2 y $1 \Rightarrow (0, 0)$ inestable repulsor.

• diagram fase $(\dot{x}, \dot{y}) = A_{-1}(x, y)$:



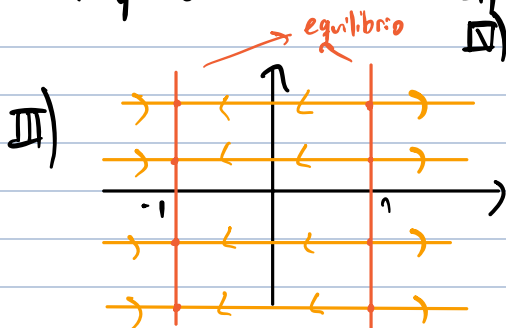
• diagram fase $(\dot{x}, \dot{y}) = A_1(x, y)$:



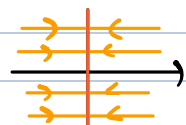
Ambos diagramas son muy similares en los entornos de los criticos, sin embargo a gran escala claramente difieren. Por ejemplo en la ecuaci3n original tenemos una 3bita que tanto a pasado como a futuro tiende a un pto de equilibrio.

$$c) \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

- I) Mismo argumento.
- II) Puntos de equilibrio de la forma $(-1, y), (1, y), y \in \mathbb{R}$.
- III) Mismo argumento.



$$\text{IV) } J_f(-1, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$



$$J_f(1, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

