

Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales.

5 de octubre de 2024.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Tiempo para entregar: 3 horas

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Considere la ecuación $\ddot{x} = -x - a\dot{x}$ que modela el fenómeno de una partícula sometida a la fuerza de un resorte moviéndose en una superficie (unidimensional) con cierto grado de rozamiento dado por el coeficiente $a > 0$.
 - a) Definiendo una variable auxiliar $y = \dot{x}$ se obtiene un sistema de dimensión dos. Hallar dicho sistema y probar que está en las condiciones de Picard.
 - b) Determinar si los intervalos maximales son acotados (superior o inferiormente) o no acotados.
 - c) Esbozar los diagramas de fase discutiendo según $a > 0$. Interprete los comportamientos en referencia a la situación modelada (partícula-resorte-rozamiento).
2.
 - a) Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2 - 1$. En función de la condición inicial (t_0, x_0) indicar si los intervalos maximales de las soluciones son o no acotados (superior o inferiormente). Bosquejar soluciones.
 - b) Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - 1, y)$ y consideramos la ecuación diferencial dada por $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$, es decir:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

- (I) Mostrar existencia y unicidad de la solución para cualquier condición inicial en el plano.
 - (II) Hallar los puntos de equilibrio.
 - (III) Bosquejar el diagrama de fase y en función de este describir la estabilidad de los puntos críticos.
 - (IV) Discutir en función de la condición inicial si los intervalos maximales son o no acotados (a pasado o a futuro). Justifique.
 - (V) Si (\hat{x}, \hat{y}) es un punto de equilibrio escribimos $Jf_{(\hat{x}, \hat{y})}$ a la matriz jacobiana de f en el punto de equilibrio.
Considerar para cada punto de equilibrio el sistema lineal $(\dot{x}, \dot{y}) = Jf_{(\hat{x}, \hat{y})}(x, y)$. Estudiar la estabilidad del crítico del sistema lineal. Dibuje diagrama de fase y verifique la similitud con el diagrama de fase del sistema original en un entorno suficientemente chico del punto (\hat{x}, \hat{y}) . ¿Siguen existiendo similitud si consideramos un entorno más grande o incluso todo el plano?
- c) Repetir el estudio anterior para el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$