Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

PRIMER PARCIAL – 2024.

N° de parcial	Apellido y Nombre	Cédula

La prueba dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [8 puntos]

a) Escribir la iteración asociada al método de Gauss-Seidel.

b) Consideremos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

El método de Gauss-Seidel para resolver este sistema se puede escribir como $\mathbf{x}^{k+1} = Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r}$, donde

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 3/2 \\ 0 & -14/9 & -9/2 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que existe algún vector inicial $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$ para el cual el método de Gauss-Seidel no converge.

c) Se considera el método de Gauss-Seidel relajado, con parámetro de relajación $\omega \in (0, 1)$. Escribir la matriz de iteración asociada a este método.

d) Mostrar que si se toma $\omega = 1/5$, entonces la la iteración de Gauss-Seidel relajada es convergente independientemente de cómo se tome $\mathbf{x}^0$.

Ejercicio 2. [6 puntos] El formato de precisión simple es uno de 32 bits. Los números en dicho formato están definidos por

$$x = \pm(1 + f) \cdot 2^e,$$

donde

- el signo ocupa 1 bit;
- la mantisa ocupa 23 bits, esto es, $0 \leq f < 1$, y $2^{23} f$ es un número natural;
- el exponente ocupa 8 bits, esto es, $-126 \leq e \leq 127$.

a) Para este formato, hallar los valores de `eps`, `realmax`, y `realmin`.

b) La función de Octave `single` convierte una variable a precisión simple. Se tiene una cierta variable `x` y se corre el siguiente código:

```
>> y=single(x)
>> y - 4
ans = 0
```

Indicar el menor intervalo posible en el que puede estar x.

Ejercicio 3. [6 puntos]
Consideremos el conjunto de puntos

x	0	1	2	3
y	0	4	0	0

.

a) Queremos hallar un polinomio p que interpola estos puntos. ¿De qué grado debería ser? Escribir p en la forma de Lagrange.

b) Recordar el siguiente resultado:

<u>Teorema.</u> Si f es de clase C^{n+1} en $[a, b]$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ están en el intervalo $[a, b]$, y p_n es el polinomio interpolante por $\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$, entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\gamma_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

El polinomio de la parte *a*) fue usado para interpolar una función f de clase C^∞. Usar el teorema de arriba para obtener una cota del error de interpolación en $x = 3/2$. Se puede expresar la cota en términos de alguna(s) derivada(s) de f.

c) Sea n un número entero grande. Queremos interpolar la función $f(x) = \sin(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1]$ usando $n + 1$ nodos equiespaciados, $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. ¿Usarías una interpolación polinomial de grado máximo o una interpolación lineal a trozos? Justificar la respuesta.