

PRÁCTICO 10: HOMOMORFISMOS E ISOMORFISMOS DE GRUPOS

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no homomorfismos de grupo.

- La función traza $tr : (M_{n \times n}(\mathbb{R}), +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$.
- La función $f : (M_{n \times n}(\mathbb{R}), +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, dada por: $f(A) = tr(A^2)$.
- La función determinante $det : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$; donde $GL_n(\mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} .
- La función $f : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(A) = det(A^2)$.
- La función $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dada por: $f(\lambda) = \lambda A$; donde $A \in GL_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada. Hallar condiciones sobre A para que f sea morfismo.
- La función trasponer $T : (M_{n \times n}(\mathbb{R}), +) \rightarrow (M_{n \times n}(\mathbb{R}), +)$, dada por: $T(A) = A^t$.
- La función trasponer $T : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \rightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dada por: $T(A) = A^t$.
- La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(x, y, z) = e^{x-2y+z}$.

Ejercicio 2. Sea $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos finitos.

- Sea $g \in G_1$. Probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\text{mcd}(|G_1|, |G_2|)$.
- Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial.
- Supongamos que φ es un isomorfismo de grupos. Sea $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2 .
- Probar que \mathbb{Z}_4 y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

Ejercicio 3. En cada caso, determinar si existe algún morfismo no trivial $f : G \rightarrow K$ (es decir, que no mande todos los elementos al neutro). Cuando exista, construir uno; y si no existe explicar por qué.

- $G = \mathbb{Z}_7$ con la suma y $K = S_6$ con la composición.
- $G = \mathbb{Z}_8$, $K = U(24)$. Sugerencia: G es cíclico.
- $G = U(9)$, $K = \mathbb{Z}_{12}$. Sugerencia: G es cíclico.
- $G = S_6$, $K = \mathbb{Z}_3$ con la suma.
- $G = U(15)$, $K = \mathbb{Z}_6$. Sugerencia: hallar el orden de todos los elementos de G .

Ejercicio 4. En cada caso, determinar si los siguientes grupos son isomorfos. En caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

- Los grupos $(\mathbb{Z}_4, +)$ y $(U(10), \cdot)$.
- Los grupos D_3 y S_3 (ambos con la composición).

Subgrupos normales y Teoremas de isomorfismos

Ejercicio 5. Sea $f : G \rightarrow G'$ un morfismo de grupos. Pruebe que $\text{Ker}(f)$ es un subgrupo normal de G . Dar un ejemplo en el cual $\text{Im}(f)$ no sea un subgrupo normal de G' .

Ejercicio 6. Sea $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. Pruebe que $SL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $GL_n(\mathbb{R})$. Sugerencia: considere $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* \mid \phi(A) = \det(A)$.

Ejercicio 7. Sea G un grupo, con neutro e_G . Probar que $G/\{e_G\} \simeq G$ y $G/G \simeq \{e_G\}$.

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $f(x, y) = 17x - 12y$.

- Probar que f es un morfismo de grupos.
- Probar que $\text{Ker}(f)$ es el subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por $(12, 17)$.
- Concluir que $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (12, 17) \rangle} \simeq \mathbb{Z}$

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow U(7)$ dado por $f(n) = 3^n \pmod{7}$.

- Probar que f es un morfismo de grupos.
- Probar que $\text{Ker}(f) = 6\mathbb{Z}$.
- Concluir que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq U(7)$

Ejercicio 10. Se consideran los siguientes subconjuntos de plano complejo \mathbb{C} :

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}.$$

- Probar que G y H son subgrupos de \mathbb{C} .
- Probar que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$, dado por $\phi(x) = e^{2\pi i x}$ es un morfismo de grupos sobreyectivo.
- Probar que G es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
- Probar que H es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Ejercicio 11. Sea $f : G \rightarrow K$ un homomorfismo de grupos sobreyectivo, con K grupo cíclico de orden 10. Recordar que el índice de un subgrupo normal H , se define como la cantidad de elementos de G/H .

- Pruebe que $G/\text{ker}(f)$ tiene orden 10. Es decir: $\text{ker}(f)$ es un subgrupo normal de G de índice 10.
- Construya un homomorfismo $\hat{f} : K \rightarrow \hat{K}$ sobreyectivo, para algún grupo \hat{K} de orden 5 a definir. Sugerencia: dado un generador h de K , considere el subgrupo generado por h^2 .
- Usando la parte anterior, pruebe que existe un subgrupo normal de G , de índice 5. Sugerencia: considere el homomorfismo $\hat{f} : G \rightarrow \hat{K}$, tal que: $\hat{f} = \hat{f} \circ f$.
- Pruebe que existe un subgrupo normal de G , de índice 2. Sugerencia: razonar como en las partes anteriores.

Ejercicio 12. ¿Cuántos homomorfismos sobreyectivos existen del grupo diedral D_{13} en \mathbb{Z}_{12} ? Sugerencia: Recordar que el grupo diedral D_n es un grupo de orden $2n$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 13. Sea G un grupo con 4 elementos.

- Probar que G es abeliano.
- Probar que o bien $G \simeq \mathbb{Z}_4$ o bien $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 14. (Examen Julio 2012)

- Sea $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos finitos. Probar que se cumple:

$$o(\phi(g)) \mid \text{mcd}(|G_1|, |G_2|), \forall g \in G_1.$$

- Hallar todos los homomorfismos $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow U(8)$.
- Hallar p primo, sabiendo que existe un homomorfismo no trivial $\phi : \mathbb{Z}_{51} \rightarrow \mathbb{Z}_p$, tal que $\phi(\overline{17}) = \overline{0}$.