Solución del primer parcial - Semestre par 2024

Ejercicio 1.

a) Usando la forma de Lagrange para el resto, vemos que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(c)\frac{h^2}{2},$$

para algún $c \in [a, a+h]$. Por lo tanto,

$$\delta_a(h) = \frac{f(a) + f'(a)h + f''(c)\frac{h^2}{2} - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(c)}{2}h.$$

Luego el error de truncamiento resulta,

$$|\delta_a(h) - f'(a)| = \frac{|f''(c)|}{2}h = O(h).$$

b) Para conseguir un error de truncamiento de mayor orden, procedemos como en la parte anterior pero calculamos el desarrollo a orden tres. Observamos que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f'''(c)\frac{h^3}{6}, \\ f(a-h) = f(a) - f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} - f'''(d)\frac{h^3}{6}, \end{cases}$$

para algún $c \in [a, a+h]$ y $d \in [a-h, a]$. Entonces,

$$\begin{cases} \delta_a(h) = f'(a) + f''(a)\frac{h}{2} + f'''(c)\frac{h^2}{6}, \\ \delta_a(-h) = f'(a) - f''(a)\frac{h}{2} + f'''(d)\frac{h^2}{6}. \end{cases}$$

Entonces,

$$|\alpha\delta_a(h) + \beta\delta_a(-h) - f'(a)| = \left| f'(a)(\alpha+\beta-1) + f''(a)\frac{h}{2}(\alpha-\beta) + \alpha f'''(c)\frac{h^2}{6} + \beta f'''(d)\frac{h^2}{6} \right|.$$

Entonces si queremos lograr un error de orden $O(h^2)$ llegamos al sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = 0, \\ \alpha - \beta = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es $\alpha = \beta = 1/2$.

c) Como f es suave,

$$f'''(c) \approx f'''(a) \quad \text{y} \qquad f'''(d) \approx f'''(a),$$

y por lo tanto,

$$|\alpha\delta_a(h) + \beta\delta_a(-h) - f'(a)| \approx \left| f'(a)(\alpha+\beta-1) + f''(a)\frac{h}{2}(\alpha-\beta) + f'''(a)\frac{h^2}{6}(\alpha+\beta) \right|.$$

Sustituyendo α y β en la expresión anterior, observamos que el error de truncamiento es $O(h^2)$. Sin embargo, no nos es posible eliminar el término que depende de h^3: si intentáramos agregar esta condición al sistema anterior, el sistema quedaría sobredeterminado y no tendría solución. Obtenemos entonces

$$|Df(a) - f'(a)| \lesssim \frac{|f'''(a)|}{6}h^2.$$

d) El error de redondeo del estimador obtenido es

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{2h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{2h}-\frac{fl(f(a+h))-fl(f(a))}{2h}-\frac{fl(f(a-h))-fl(f(a))}{2h}\right|.$$

Reordenando términos, esta expresión puede reescribirse como

$$\left|\frac{f(a+h)-fl(f(a+h))}{2h}+\frac{fl(f(a))-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-fl(f(a-h))}{2h}\right|.$$

Acotamos el primer término, los otros dos salen de la misma manera. Usando

$$fl(f(a+h))=(1+\varepsilon_{f(a+h)})f(a+h),\quad |\varepsilon_{f(a+h)}|\leq\frac{\varepsilon_M}{2},$$

se sigue que

$$\left|\frac{f(a+h)-fl(f(a+h))}{2h}\right|=\left|\frac{\epsilon_{f(a+h)}fl(f(a+h))}{2h}\right|\leq\frac{\varepsilon_M}{4}|f(a+h)|.$$

Usando nuevamente que f es suave, $f(a+h)\approx f(a)$ y por lo tanto

$$\left|\frac{f(a+h)-fl(f(a+h))}{2h}\right|\lesssim\frac{\varepsilon_M}{4h}|f(a)|.$$

La misma cota funciona para los otros términos. El error entonces queda acotado por

$$\text{error}_{\text{truncamiento}}\lesssim\varepsilon_M\frac{|f(a)|}{h}.$$

El paso óptimo se consigue considerando el error total,

$$\text{error}_{\text{redondeo}}+\text{error}_{\text{truncamiento}}\leq\frac{|f'''(a)|}{6}h^2+\varepsilon_M\frac{|f(a)|}{h}.$$

Derivando el término de la derecha e igualando a cero, obtenemos el paso óptimo,

$$h=\sqrt[3]{\frac{3|f(a)|\varepsilon_M}{|f'''(a)|}}.$$

Ejercicio 2. a) Como $y^0=y^1=y^2=0$ e $y^3=2$, el polinomio interpolante es

$$p(x)=y^3L_3^3(x)=2\frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)}=\frac{1}{3}x(x-1)(x-2).$$

b) Tomando $(x^4,y^4)=(4,4)$,

$$p_4(x)=p(x)+(y^4-p(x^4))\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4(4-1)(4-2)(4-3)}=\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)-\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

c)

$$\|p-q\|_{L^\infty([0,3])} = \max_{x\in[0,3]} \left|\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(x-3)\right|.$$

Como $|x-3| \leq 3$ en $[0,3]$,

$$\max_{x\in[0,3]} \left|\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(x-3)\right| \leq \max_{x\in[0,3]} \left|\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)\right|.$$

Para hallar el máximo de ese polinomio (que es de grado tres), podemos derivar e igualar a cero y comparar con su valor en los bordes. Un cálculo sencillo muestra que el máximo se da en $x=3$ y que ese máximo es 3. Entonces,

$$\|p-q\|_{L^\infty([0,3])} \leq \max_{x\in[0,3]} \left|\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)\right| \leq 3.$$

Otra alternativa sería acotar todos los monomios como en el caso de $(x-3)$, obteniendo así que $\|p-q\|_{L^\infty([0,3])} \leq 6$, o usar el teorema de interpolación de error del Corolario 3.3.2 y acotar el polinomio nodal definido por los primeros 4 puntos.

Ejercicio 3. a) Ver las Definiciones 2.6.1 y 2.6.2 en las notas de teórico.

b) Lo probamos por inducción: el caso $k=0$ es trivial, y suponemos que es cierto para $k=n$. Veamos que entonces se cumple para $k=n+1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{k+1} &= \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* \\
&= Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r} - (Q\mathbf{x}^* + \mathbf{r}) \\
&= Q(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) \\
&= Q\mathbf{e}^k \\
&= Q^{k+1}\mathbf{e}^0,
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea usamos que $\mathbf{x}^*$ es punto fijo y en la última línea usamos la hipótesis inductiva.

c) Usando la parte anterior,

$$\frac{\|\mathbf{e}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{e}^k\|_2} = \frac{\|Q\mathbf{e}^k\|_2}{\|\mathbf{e}^k\|_2} = \left\|Q\frac{\mathbf{e}^k}{\|\mathbf{e}^k\|_2}\right\|_2 \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|Q\mathbf{x}\|_2.$$

Escribiendo $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, notamos que e_i es vector propio de Q con valor propio λ_i para todo $i=1,\dots,n$. Entonces,

$$\|Q\mathbf{x}\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i Q e_i\right\|_2 = \left\|\sum_{i=1} \lambda_i x_i e_i\right\|_2 \leq \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| \left\|\sum_{j=1} x_j e_j\right\|_2 = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| \, \|\mathbf{x}\|_2 = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_2.$$

Juntando ambas estimaciones, se tiene que

$$\frac{\|\mathbf{e}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{e}^k\|_2} \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|Q\mathbf{x}\|_2 \leq \lambda_1,$$

donde para la última desigualdad usamos que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$. Como la cota vale para todo k,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{e}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{e}^k\|_2} \le \lambda_1.$$

Si $\mathbf{e}^0 \perp e_1$, la desigualdad será estricta. Por ejemplo, tomamos $\mathbf{x}^0 = e_2 + \mathbf{x}^*$. En este caso, $\mathbf{e}^0 = e_2$ y por la parte a), $\mathbf{e}^k = Q^k \mathbf{e}^0 = (\lambda_2)^k e_2$. Entonces,

$$\frac{\|\mathbf{e}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{e}^k\|_2} \frac{\lambda_2^{k+1}}{\lambda_2^k} = \lambda_2 < \lambda_1.$$