Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

PRIMER PARCIAL – 2024.

N° de parcial	Apellido y Nombre	Cédula

La prueba dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [8 puntos] Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, consideramos el *cociente incremental* en un punto $a \in \mathbb{R}$

$$\delta_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

como forma de aproximar $f'(a)$.

a) Demostrar que el error de truncamiento $|\delta_a(h) - f'(a)|$ es de orden $O(h)$.

b) Queremos usar una combinación lineal de dos cocientes incrementales como forma de obtener una aproximación más precisa de $f'(a)$. Dado $h > 0$, hallar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que
$$Df(a) := \alpha\delta_a(h) + \beta\delta_a(-h)$$
tenga un error de truncamiento del mayor orden posible.

c) ¿De qué orden (respecto a h) es el error de truncamiento para el estimador $Df(a)$?

d) Estimar el error de redondeo del nuevo estimador $Df(a)$ y proponer un paso h óptimo que sea un compromiso entre el error de redondeo y de truncamiento.

Ejercicio 2. [6 puntos] Consideremos el conjunto de puntos

x	0	1	2	3
y	0	0	0	2

a) Hallar el polinomio interpolante p por estos puntos utilizando la forma de Lagrange.

b) Utilizando la forma de Newton, hallar el polinomio interpolante q por los puntos anteriores y $(4, 4)$.

c) Estimar $\|p - q\|_{L^\infty([0,3])}$.

Ejercicio 3. [6 puntos]

a) Definir qué es el radio espectral de una matriz Q, y qué significa que un método iterativo matricial sea consistente.

b) Sea un método iterativo matricial de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}^{k+1} = Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r} \end{cases}, \tag{MIM}$$

y supongamos que converge a $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que el error $\mathbf{e}^k := \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*$ verifica $\mathbf{e}^k = Q^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \geq 0$.

c) Supongamos que en (MIM) $\mathbf{e}^0 \neq \mathbf{0}$ y la matriz Q es diagonal,

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

con $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$. Mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{e}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{e}^k\|_2} \leq \lambda_1,$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclídea. ¿Cuándo podría ocurrir que la desigualdad arriba fuese estricta?