Práctico 7 – Espacios y Subespacios Vectoriales.

1. Investigar si $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial en caso de que las operaciones de suma y producto se definan de las siguientes maneras:

   a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (3\lambda y_1, x_1);$
   b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, 0);$
   c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$
   d) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, x_2 + y_2), \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$
   e) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|), \quad \lambda(x_1, y_1) = (|\lambda x_1|, |\lambda y_1|).$

2. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ dado por $V = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
   Definimos la suma $+_V$ como:
   $$(x_1, y_1, 1) +_V (x_2, y_2, 1) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, 1\right);$$
   y definimos $\times_V$ como:
   $$\lambda \times_V (x_1, y_1, 1) = (\lambda x, \lambda y, 1).$$
   Determinar si $(V, \mathbb{R}, +_V, \times_V)$ es un espacio vectorial.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. A partir de los axiomas de espacio vectorial, probar las siguientes propiedades (se pueden ver los axiomas en las notas).

   a) El neutro de la suma es único. Es decir, si $v_1, v_2 \in V$ verifican que $v_1 + v = v_2 + v = v$ para todo $v \in V$ entonces $v_1 = v_2$.
   b) El opuesto es único. Es decir, dado $v \in V$, si $v + v_1 = v + v_2 = O_V$, entonces $v_1 = v_2$.
   c) Sea $0 \in \mathbb{K}$ (el neutro del cuerpo con respecto a la suma). Para todo $v \in V$ se tiene que $0v = O_V$.
   d) Sea $O_V \in V$ (el neutro del espacio vectorial). Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda O_V = O_V$
   e) Probar que para todo $v \in V$, el opuesto de v es $(-1)v$, donde -1 es el opuesto de 1 en el cuerpo $\mathbb{K}$.

4. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   a) Sean $u, v \in V$ dos vectores tal que $3v + 5w = 7v - 2w$, mostrar que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda v = w$.
   b) Sea $v \in V$ tal que $3v = v$, probar que $v = 0$, es decir, v es el vector nulo.

5. Sea X un conjunto no vacío cualquiera, y $(V, \mathbb{K}, +, .)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones de X que toman valores en V. Es decir,
   $$\mathcal{F} = \{f \text{ tales que } f : X \to V\}.$$
   Definimos

   - SUMA DE DOS FUNCIONES: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X;$
   - PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN f POR UN ESCALAR λ: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in X.$

   Mostrar que $(\mathcal{F}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

6. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{F}$ formado por todas las funciones reales de variable real. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}$ son subespacios vectoriales:

   a) para un $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, el conjunto de las funciones f tales que $f(x_0) = 0$;
   b) el conjunto de funciones f que tiene al menos una raíz. Es decir, aquellas funciones f para las que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

7. Determinar si los subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales.

a) El conjunto de las matrices simétricas, es decir, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\colon A^T = A\}$.
b) El conjunto de las matrices antisimétricas, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})\colon A^T = -A\}$.
c) El conjunto de las matrices invertibles.
d) El conjunto de las matrices no invertibles.
e) El conjunto de matrices de rango k, para $k = 0, 1, \ldots, n$;
f) El conjunto de matrices de traza 0 (recordar que la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal).
g) El conjunto de matrices triangulares superiores.
h) Fijado $X \in \mathbb{K}^n$, el conjunto de matrices A tales que $AX = 0$;
i) Fijado $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ el conjunto de matrices A tales que $AB = BA$;
j) el conjunto de matrices nilpotentes, es decir las matrices A tal que existe $k \in \mathbb{N}$ que verifica $A^k = 0$;
k) el conjunto de matrices idempotentes, es decir las matrices A tal que $A^2 = A$.

8. Determinar en qué condiciones los siguientes conjuntos S son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $S = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = d\}$.
b) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : (x,y,z) \wedge (a,b,c) = v\}$.
c) Fijo $r \in \mathbb{R}$, $S = \{(x,y,z) : \|(x,y,z)\| = r\}$.

9. En cada caso, determinar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial dado.

a) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ considerar:
1) $S = \{(a,b,c) \in V;\ a+b+c = 2\}$;
2) $S = \{(a,b,c) \in V;\ 3a-2 = 3b+c\}$;
3) $S = \{(a,b,c) \in V;\ a = b = c\}$;
4) $S = \{(a,a+b,a+b+c) \in V;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$;
5) $S = \{(b-6c,b,c) \in V;\ b,c \in \mathbb{R}\}$;
6) $S = \{(b/c,b,c) \in V;\ b,c \in \mathbb{R},\ c \neq 0\}$;
7) $S = \{(x,y,z) \in V;\ z \geq x^2+y\}$.

b) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ considerar:
1) $S = \{(x_1,\ldots,x_n) \in V;\ x_1 \geq 0\}$;
2) $S = \{(x_1,\ldots,x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;
3) $S = \{(x_1,\ldots,x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1\}$;
4) $S = \{(x_1,\ldots,x_n) \in V;\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$;
5) $S = \{(x_1,\ldots,x_n) \in V;\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0\}$;
6) $S = \{(x_1,\ldots,x_n) \in V;\ x_i \leq x_j$ para todo $i \leq j\}$.

c) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_n[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales, considerar:
1) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
2) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = p'(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
3) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];$ el grado de p es $n\}$;
4) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(1-x) = p(1+x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
5) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(x) \leq p(2x)\}$;
6) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ |p(x)| \leq |p(2x)|\}$.

d) Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, considerar:
1) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(1) = f(0)\}$;
2) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(x^2) = f(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
3) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es par$\}$.
4) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es impar$\}$;

5) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ es periódica con período $\pi\}$;
6) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ con 1 como raíz$\}$;
7) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f$ con alguna raíz$\}$.

10. Sea (S) un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n incógnitas. Probar que las soluciones de (S) son un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

11. **Intersección de una colección de subespacios.**

   a) Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una colección subespacios de un espacio vectorial V. Mostrar que la intersección $S = \bigcap\limits_{i\in I} S_i$ de todos los subespacios es un subespacio vectorial.

   b) Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales. Mostrar que el conjunto de las funciones f reales y continuas tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ es un espacio vectorial real.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Dados W_1, W_2 dos subespacios de V. Probar que si $W = W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V entonces $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.

13. **Espacios vectoriales de funciones.** Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios.

   a) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es continua$\}$;
   b) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es derivable$\}$;
   c) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es derivable y $f' = -f\}$;
   d) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es acotada$\}$.
   e) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$;
   f) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ es finito$\}$;
   g) $S = \left\{f \in \mathcal{F} :\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ es finito}\right\}$;
   h) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es integrable$\}$;
   i) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f$ es monótona$\}$.

14. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Probar que los conjuntos

$$\mathbb{Im} = \{v \in \mathcal{M}_{m\times 1} :\ \text{existe } u \in \mathcal{M}_{n\times 1} \text{ tal que } v = Au\} \subset \mathcal{M}_{m\times 1} \text{ y } \mathrm{Ker} = \{u \in \mathcal{M}_{n\times 1} : Au = 0_{m\times 1}\} \subset \mathcal{M}_{n\times 1},$$

son subespacios vectoriales.

15. Sea V un $\mathbb{K}$ esp vectorial. Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ tres vectores de V. Probar que el conjunto

$$A = \{v \in V : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio de V.

16. **Suma de subespacios.** Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Se define el subconjunto de V dado por:

$$W = \{v \in V :\ \text{tal que existen } w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2 \text{ con } v = w_1 + w_2\}.$$

   a) Probar que W es un subespacio de V.
   b) Mostrar que W contiene a W_1 y W_2.
   c) Probar que cualquier otro subespacio S que contenga a W_1 y W_2 también debe contener a W.
   Se dice que W es la suma de los subespacios W_1 y W_2.

17. Sean $V = \mathbb{R}^+$ y las siguientes operaciones $+ : V \times V \to V$ y $* : \mathbb{R} \times V \to V$ dadas por $+(u, v) = uv$ y $*(\lambda, u) = u^\lambda$. Probar que $(V, \mathbb{R}, +, *)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1: tres partes
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 4: una parte
- Ejercicio 7: cinco partes
- Ejercicio 8
- Ejercicio 9: dos partes de cada uno de los ítems a),b),c),d)
- Ejercicio 10
- Ejercicio 13: dos partes
- Ejercicio 14