Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables.**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Setiembre 2024.**

PRIMER PARCIAL – Sábado 28 de Setiembre de 2024

EJERCICIOS DE DESARROLLO

Nota: Hay muchas maneras de resolver los ejercicios, indicamos aquí alguna a modo de ejemplo.

Ejercicio 1. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Solución: Ver las notas del curso, justo después de la Definición 3.3.

Ejercicio 2. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales.

a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

b) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y que existe $m > 0$ tal que $m < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Solución 2.a: Sea $\epsilon > 0$ arbitario.
Dado que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, para $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$, se cumple que

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, para $\dfrac{\epsilon}{2}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_2$, se cumple que

$$|a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Para $n \geq \max(n_1, n_2)$, se tiene:

$$|b_n - L| \leq |b_n - a_n| + |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Solución 2.b:

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces, dado cualquier número real positivo $M > 0$, existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, se cumple que $a_n > \frac{M}{m} > 0$.

Por lo tanto, para todo $n \geq n_0$, tenemos:

$$a_n b_n > a_n m > \frac{M}{m} m = M.$$

Esto implica que, para cualquier $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n b_n > M$ para todo $n \geq n_0$, lo cual demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Ejercicio 3. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge .
Solución: Ver las notas del curso, Ejemplo 3.39.

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN

Ejercicio 1. Se consideran el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z^4$ y el conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : (f \circ g)(z) \in A\}$. Elegir la opción correcta:

A) $B = \{z = \rho e^{i\theta} : \rho \geq 0, \frac{-\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}\}$.

B) $B = \{z = \rho e^{i\theta} : \rho > 0, \frac{-\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}\}$.

C) $B = \{z = \rho e^{i\theta} : \rho > 0, \frac{-\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

D) $B = \{z = \rho e^{i\theta} : \rho \geq 0, \frac{-\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Solución: Dado $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $(f \circ g)(z) = f(z^4) = e^{z^4}$. Por lo tanto,

$$B = \{z \in \mathbb{C} : (f \circ g)(z) \in A\} = \{z \in \mathbb{C} : e^{z^4} \in A\} = \{z \in \mathbb{C} : |e^{z^4}| \geq 1\}.$$

Recordemos que si $z = a + ib$, entonces $|e^z| = e^a$. Esto implica que $|e^{z^4}| = e^{\mathrm{Re}(z^4)}$, donde $\mathrm{Re}(z^4)$ es la parte real de z^4.

Ahora, usando la notación polar, para $z = \rho e^{i\theta}$, tenemos que:

$$z^4 = \rho^4 e^{i4\theta} = \rho^4 \left(\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)\right).$$

Por lo tanto, la parte real de z^4 es $\rho^4 \cos(4\theta)$. Para que $|e^{z^4}| \geq 1$, necesitamos que:

$$e^{\rho^4 \cos(4\theta)} \geq 1,$$

lo que implica que:

$$\rho^4 \cos(4\theta) \geq 0.$$

Esto significa que $\rho \geq 0$ y $\cos(4\theta) \geq 0$. Es decir, θ debe estar en los intervalos donde $\cos(4\theta)$ es positivo. Esto es,

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 4\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la opción correcta es:

$$\boxed{D)} \quad B = \{\rho e^{i\theta} : \rho \geq 0, -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Otra forma: Observemos primero que la preimagen por la función exponencial del conjunto A es el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$. Es decir $f^{-1}(A) = S$. Por lo tanto, solo basta hallar la preimagen por g del conjunto S. Es decir queremos hallar $T = \{z \in \mathbb{C} : z^4 \in S\}$. De esta manera, $z \in T$ sii

$f(z^4) \in A$. Para hallar la preimagen del semiplano S por g, hay que tomar raíces cuartas, y vamos a obtener cuatro conos de ángulo un cuarto del original. Observar que el ángulo origial es π, por lo cual los conoces van a ser de ángulo $\frac{\pi}{4}$. Uno de los conos es

$$-\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8},$$

ya que al multiplicar el ángulo por 4 (lo que corresponde al aplicar la función g), obtenemos el semiplano $S = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Para obtener los otros tres conos basta multiplicar el cono original por $e^{i\frac{\pi}{2}}$, lo que nos da:

$$-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2. Hallar a y b para que $y(x) = e^{2x}\cos x$ sea solución de $y'' + ay' + by = 0$. Elegir la opción correcta:

A) No se pueden determinar a y b sin las condiciones iniciales.

B) $a = 4, b = -11$.

C) $a = -4, b = 5$.

D) $a = \pm 4$ y para determinar b se necesita la condición inicial $y(0)$.

Solución: Dada la función $y(x) = e^{2x}\cos(x)$, primero calculamos sus derivadas:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\cos(x)\right) = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\sin(x) = e^{2x}(2\cos(x) - \sin(x)),$$
$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}(2\cos(x) - \sin(x))\right) = 2e^{2x}(2\cos(x) - \sin(x)) + e^{2x}(-2\sin(x) - \cos(x)).$$

$$y''(x) = 3e^{2x}\cos(x) - 4e^{2x}\sin(x).$$

Ahora sustituimos y, y' y y'' en la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$:

$$3e^{2x}\cos(x) - 4e^{2x}\sin(x) + 2ae^{2x}\cos(x) - ae^{2x}\sin(x) + be^{2x}\cos(x).$$

Factorizando e^{2x}:

$$(3 + 2a + b)\cos(x) + (-4 - a)\sin(x) = 0.$$

Usando la independencia lineal de las funciones seno y coseno tenemos que:

$$3 + 2a + b = 0, \quad -4 - a = 0.$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$a = -4.$$

Sustituyendo $a = -4$ en la primera ecuación:

$$3 + 2(-4) + b = 0 \implies 3 - 8 + b = 0 \implies b = 5.$$

Por lo tanto, la opción correcta es:

$$\boxed{C)} \text{ los valores de } a \text{ y } b \text{ son: } a = -4, \quad b = 5.$$

Ejercicio 3. Clasificar las series (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{e^n}$ y (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!}$. Elegir la opción correcta:

A) (1) diverge y (2) converge.

B) (1) converge y (2) diverge.

C) Ambas divergen.

D) Ambas convergen.

Solución: Podemos aplicar el criterio del cociente (Proposición 3.42 de las Notas del curso) para estudiar la convergencia de la series.

La opción correcta es:

$$\boxed{D)} \text{ ambas convergen}$$

Ejercicio 4. Se considera la integral $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$. Elegir la opción correcta:

A) El valor de la integral es $\frac{\pi}{2}$.

B) La integral diverge.

C) El valor de la integral es $\arctan(\frac{\pi}{4})$.

D) El valor de la integral es $-\log(\frac{\pi}{2})$.

Solución: La función tangente se puede expresar como

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Por lo tanto, la integral se puede reescribir como:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx.$$

Notamos que la función $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es continua en su dominio. Luego, evaluamos la integral impropia tomando el límite:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx.$$

La primitiva de $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ es $-\log|\cos(x)|$. Por lo tanto:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} (-\log|\cos(t)| + \log|\cos(0)|) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} -\log|\cos(t)|.$$

Dado que $\cos(t) \to 0$ cuando $t \to \frac{\pi}{2}^-$, tenemos que $\log|\cos(t)| \to -\infty$, lo que implica que

$$-\ln|\cos(t)| \to +\infty.$$

Por lo tanto, la opción correcta es:

$$\boxed{B)}\ \text{La integral diverge.}$$

Ejercicio 5. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(1) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que: dado $\epsilon > 0$ existe $s \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq s$, se tiene $|\int_a^t f(x)dx - L| < \epsilon$.

(2) $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ está acotada.

(3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(4) Dado $K > 0$ existe $s \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \geq s$, se tiene $|\int_a^t f(x)dx| > K$.

Elegir la opción correcta:

A) Solamente (1),(2) y (3) son correctas.

B) Solamente (2) y (3) son correctas.

C) Las 4 afirmaciones son correctas.

D) Solamente (1) y (2) son correctas.

Solución:

(1) La afirmación 1 es verdadera. Esto se deduce directamente de la definición de integral impropia:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx = L.$$

(2) La afirmación 2 es verdadera y se deduce del item anterior.

(3) La afirmación 3 es falsa. Véase el Ejemplo 4.4 en las notas del curso.

(4) La afirmación 4 es falsa, ya que contradice la definición de convergencia de la integral

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = L.$$

.

Por lo tanto, la opción correcta es:

$$\boxed{D)}\ \text{Solamente (1) y (2) son correctas.}$$