Matemática Inicial

Primer Parcial, 27 de setiembre de 2024.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

El parcial dura 3 horas y es sin material ni calculadora.

Ejercicio 1 (7 puntos)

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación:

$$\log(x) + \log(x+2) = \log(x+6).$$

Solución: Comencemos analizando el dominio de la ecuación. Para que la ecuación quede bien definida necesitamos $x > 0$, $x+2 > 0$ y $x+6 > 0$, o sea, $x > 0$, $x > -2$ y $x > -6$ y eso se obtiene simplemente pidiendo $x > 0$ por los tanto nuestras soluciones deberán ser positivas.
Primero podemos restar en ambos lados $\log(x+6)$ y obtenemos la ecuación $\log(x) + \log(x+2) - \log(x+6) = 0$
Apliquemos ahora las propiedades de logaritmos:

$$\log(x) + \log(x+2) - \log(x+6) = \log\left(\frac{(x)(x+2)}{x+6}\right) = 0$$

Entonces $\frac{(x)(x+2)}{x+6} = 1$ lo que implica que $x(x+2) = x+6$. Operando obtenemos que la ecuación anterior es equivalente a $x^2 + x - 6 = 0$ y aplicando Bhaskara obtenemos que las soluciones de dicha ecuación son -3 y 2. Como $-3 < 0$ la única solución de la ecuación es $x = 2$, o sea,

$$Sol = \{2\}.$$

Ejercicio 2 (8 puntos)

Resolver en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación:

$$|x^2 - 9| < 5$$

Solución: Comencemos estudiando el signo de $x^2 - 9$ para aplicar la definición de valor absoluto. Las raíces de $x^2 - 9$ son 3 y -3. Con respecto al signo tenemos que $x^2 - 9 \geq 0$ si $x \geq 3$ o $x \leq -3$ y $x^2 - 9 < 0$ si $-3 < x < 3$ por lo tanto:

$$|x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \leq -3 \text{ o } x \geq 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Consideremos entonces dos zonas:

1. $x \leq -3$ o $x \geq 3$
2. $-3 < x < 3$

Para la zona 1. la inecuación queda:

$$x^2 - 9 < 5$$

y luego $x^2 - 14 < 0$. El signo de $x^2 - 14$ es similar al anterior y obtenemos que $x^2 - 14 < 0$ si $-\sqrt{14} < x < \sqrt{14}$.
Como $-\sqrt{14} < -3$ y $\sqrt{14} > 3$ la solución en la zona 1 es

$$Sol_1 = (-\sqrt{14}, \sqrt{14}) \cap ((-\infty, -3] \cup [3, +\infty)) = (-\sqrt{14}, -3] \cup [3, \sqrt{14})$$

Para la zona 2. la inecuación queda:

$$-x^2 + 9 < 5$$

y luego $0 < x^2 - 4$. Analizando el signo obtenemos que $x^2 - 4 > 0$ si $x > 2$ o $x < -2$ por lo tanto la solución en esta zona es:

$$Sol_2 = ((-\infty, -2) \cup (2, +\infty)) \cap (-3, 3) = (-3, -2) \cup (2, 3)$$

y la solución total es:

$$Sol = (-\sqrt{14}, -2) \cup (2, \sqrt{14}).$$

Ejercicio 3 (7 puntos) *Considera la afirmación:*

$$(A) \quad \forall x \in [0, \pi], \cos(x) \geq 0$$

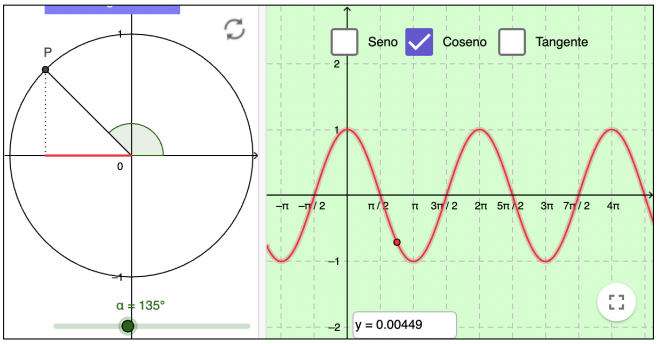
1. *Escribir la negación de la afirmación.*

   Solución:

   $$\exists x \in [0, \pi], \cos(x) < 0$$

2. *Probar que la afirmación (A) es falsa. Justificar con el círculo trigonométrico.*

   Solución: *Para cualquier* $x \in (\pi/2, \pi], \cos(x) < 0$, *por ejemplo para* $x = 3\pi/4$.



Ejercicio 4 (8 puntos) *Probar utilizando inducción completa que:*

$$\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

Solución:
Paso base: se cumple para $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} 3^i = 3 = \frac{3^{1+1} - 3}{2}$$

Paso inductivo:

(H_i) : Se cumple para $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k} 3^i = \frac{3^{k+1} - 3}{2}$$

(T_i) : Se cumple para $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k+1} 3^i = \frac{3^{k+2} - 3}{2}$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{k+1} 3^i = \sum_{i=1}^{k} 3^i + 3^{k+1} = \frac{3^{k+1} - 3}{2} + 3^{k+1} = \frac{3^{k+1} - 3 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2} = \frac{3^{k+1}(1+2) - 3}{2} = \frac{3^{k+1}(3) - 3}{2} = \frac{3^{k+2} - 3}{2}$$