Solución del primer parcial
Geometría y Álgebra Lineal 1

Ejercicio 1.

Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & -2a+1 \\ -b & b & 2b+ab+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Indicar la opción correcta:

(A) $\operatorname{rg}(A) = 3$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(B) Existen exactamente dos valores de a para los cuales $\operatorname{rg}(A) = 2$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

(C) $\operatorname{rg}(A) = 2$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(D) $\operatorname{rg}(A) = 3$ sólo para un número finito de valores de a y para todo $b \in \mathbb{R}$.

(E) $\operatorname{rg}(A) = 3$ sólo para un número finito de valores de a y b.

Solución: Escalerizando

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & -2a+1 \\ -b & b & 2b+ab+a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to aF_1 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ -b & b & 2b+ab+a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - bF_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & ab+a \end{pmatrix}$$

Entonces $\operatorname{rg}(A) > 1$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
Si $a = 1 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
Si $b = -1 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
Si $a = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
Si $a \neq 0, 1$ y $b \neq -1 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$.

Entonces existen exactamente dos valores de a para los cuales $\operatorname{rg}(A) = 2$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2

Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ la matriz inversa de A. Entonces:

(A) $b_{11} = 1$, $b_{13} = \frac{1}{2}$ y $b_{32} = 0$.

(B) $b_{11} = \frac{1}{2}$, $b_{13} = 0$ y $b_{32} = 1$.

(C) $b_{11} = 2$, $b_{13} = \frac{1}{2}$ y $b_{32} = -1$.

(D) $b_{11} = 0$, $b_{13} = 1$ y $b_{32} = \frac{1}{2}$.

(E) $b_{11} = 1$, $b_{13} = 1$ y $b_{32} = 0$.

Solución:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ su matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Entonces, la respuesta correcta es: $b_{11} = 1$, $b_{13} = \frac{1}{2}$ y $b_{32} = 0$.

Ejercicio 3.

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -b & b & 3b+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$$

considerar el sistema de ecuaciones lineales $(S) : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Indicar la opción correcta:

(A) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible determinado para todo $b \in \mathbb{R}$.

(B) El sistema de ecuaciones lineales (S) es incompatible para todo $b \in \mathbb{R}$.

(C) Existe un único valor de b para el cual el sistema de ecuaciones lineales (S) es incompatible.

(D) Existe un único valor de b para el cual el sistema es compatible indeterminado.

(E) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible indeterminado para todo $b \in \mathbb{R}$.

Solución: Escalerizando la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -b & b & 3b+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -b & b & 3b+1 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - bF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - (b+1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{array}\right) \Longrightarrow$

- Si $b = 0$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $b \neq 0$ entonces el sistema es incompatible.

Entonces existe un único valor de b para el cual el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio 4.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 5$.

Entonces, el determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2g & 2i & 2h \\ a+d & c+f & b+e \\ 3d & 3f & 3e \end{pmatrix}$ es:

(A) 30. **(B)** -30. **(C)** -60. **(D)** -25. **(E)** 25.

Solución: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 5$.

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 2g & 2i & 2h \\ a+d & c+f & b+e \\ 3d & 3f & 3e \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2g & 2i & 2h \\ a & c & b \\ 3d & 3f & 3e \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2g & 2i & 2h \\ d & f & e \\ 3d & 3f & 3e \end{pmatrix}$$

$$= (2)(3) \det \begin{pmatrix} g & i & h \\ a & c & b \\ d & f & e \end{pmatrix} = -6 \det \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 6 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -6 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -30.$$

Por lo tanto la respuesta correcta es: $\det(B) = -30$.

Ejercicio 5.

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

donde λ es un parámetro real. Indique la opción correcta:

(A) Existen infinitos valores de λ para los cuales $A^{-1} = 2I - A$.

(B) No existen valores de λ para los cuales $A^{-1} = 2I - A$.

(C) Existe un único valor de λ para el cual $A^{-1} = 2I - A$.

(D) Existen exactamente dos valores de λ para los cuales $A^{-1} = 2I - A$.

(E) Existen exactamente tres valores de λ para los cuales $A^{-1} = 2I - A$.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \exists A^{-1} \ \forall \lambda.$$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-\lambda \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A(2I-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-\lambda \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-\lambda(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}.$

Entonces existen exactamente dos valores de λ para los cuales $A^{-1} = 2I - A$.

Ejercicio 6.

Considerar los puntos $A = \big(1/3, 2/3, 0\big)$, $B = (1,0,0)$, $C = \big(0, 1/2, 1/2\big)$ y $D = (1,1,0)$.
Sea π el plano que pasa por los puntos A, B y C. Entonces la recta r que pasa por D y es perpendicular a π tiene ecuación:

(A) $r : \begin{cases} x - y &= 0 \\ x - z &= 1 \end{cases}$

(B) $r : \begin{cases} x + z &= -1 \\ y - z &= 1 \end{cases}$

(C) $r :\ x + y + z \ = \ 2$

(D) $r : \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{cases}$

(E) $r : \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1+\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$

Solución: El plano π que pasa por los puntos A, B y C es:

$$\begin{aligned} \pi : (x,y,z) &= (1,0,0) + \alpha\big((1/3,2/3,0) - (1,0,0)\big) + \beta\big((0,1/2,1/2) - (1,0,0)\big) \\ &= (1,0,0) + \alpha(-2/3, 2/3, 0) + \beta(-1, 1/2, 1/2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ -2/3 & 2/3 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x + y + z = 1$$

La dirección perpendicular a π es $u = (1,1,1)$. Por lo tanto la ecuación paramétrica es

$$r : \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$$

Usando que $\lambda = x - 1$ tenemos que la ecuación implícita es: $r : \begin{cases} x - y &= 0 \\ x - z &= 1 \end{cases}$

Ejercicio 7.

Sean los puntos $A = \big(1/3, 2/3, 0\big)$, $B = \big(0, 1/2, 1/2\big)$ y $C = (1,1,0)$.
La intersección del plano $x + y + z = 1$ con el plano que pasa por los puntos A, B y C es:

(A) El plano $x + y + z = 1$.

(B) El conjunto vacío.

(C) El punto $P = \{(-1,0,2)\}$

(D) La recta $r: \begin{cases} x &= -1+2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 2-3\lambda \end{cases}$ **(E)** La recta $r: \begin{cases} x &= 1+\frac{2}{3}\lambda \\ y &= 1+\frac{1}{3}\lambda \\ z &= 0 \end{cases}$

Solución: Llamemos π_1 al plano $x+y+z=1$. Sea π_2 el plano que pasa por los puntos A, B y C:

$$\pi_2 : \det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : -x+2y = 1.$$

Es claro que $\pi_1 \neq \pi_2$ y que no son paralelos, entonces $\pi_1 \cap \pi_2$ es la recta $r: \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ -x+2y &= 1 \end{cases}$
Si consideramos $y=\lambda$, la ecuación paramétrica es:

$$r: \begin{cases} x &= -1+2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 2-3\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 8.

Considerar las rectas r que pasa por los puntos $A = \big(1/3, 2/3, 0\big)$ y $B=(1,0,0)$ y s que pasa por los puntos $C = \big(0, 1/2, 1/2\big)$ y $D=(1,1,0)$.
Indicar la opción correcta:

(A) $r \cap s = \emptyset$ y las rectas son paralelas.

(B) $r \cap s = \emptyset$ y las rectas no son paralelas.

(C) $r \cap s$ es un conjunto infinito.

(D) $r \cap s = \{(1,1,0)\}$.

(E) $r \cap s = \{(1,0,0)\}$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (2/3, -2/3, 0), \quad \overrightarrow{CD} = (1, 1/2, -1/2),$$

es claro que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$. Entonces las rectar r y s no son paralelas.
Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$$r: \begin{cases} x &= 1+\frac{2}{3}\lambda \\ y &= -\frac{2}{3}\lambda \\ z &= 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x &= 1+\mu \\ y &= 1+\frac{1}{2}\mu \\ z &= -\frac{1}{2}\mu \end{cases}$$

Para estudiar la intersección consideremos el sistema:

$$(S): \begin{cases} 1+\frac{2}{3}\lambda &= 1+\mu \\ -\frac{2}{3}\lambda &= 1+\frac{1}{2}\mu \\ 0 &= -\frac{1}{2}\mu \end{cases}$$

De la última ecuación concluimos que $\mu = 0$, sustituyendo en las dos primeras obtenemos que $\lambda = 0$ y $\lambda = -\frac{3}{2}$. Lo cual implica que (S) es incompatible. Entonces $r \cap s = \emptyset$ y las rectas no son paralelas.