Cartografía Matemática

1480

TCI13

Roberto Pérez Rodino - rodino@fing.edu.uy
Esteban Striewe - estriewe@fing.edu.uy

Año 2024

Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

tres condiciones

Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

- La superficie objetiva que representa a la Tierra será una esfera
- Los círculos máximos que pasan por el polo de proyección se representan como rectas que conservan los acimut.
- Los puntos de las superficie objetiva que equidistan del polo de proyección, se representarán en el plano por circunferencias con centro en la representación del polo de proyección.

tres condiciones

Proyecciones planas

Hasta ahora habíamos visto proyecciones planas en modo polar:

Proyecciones planas

Hasta ahora habíamos visto proyecciones planas en modo polar:

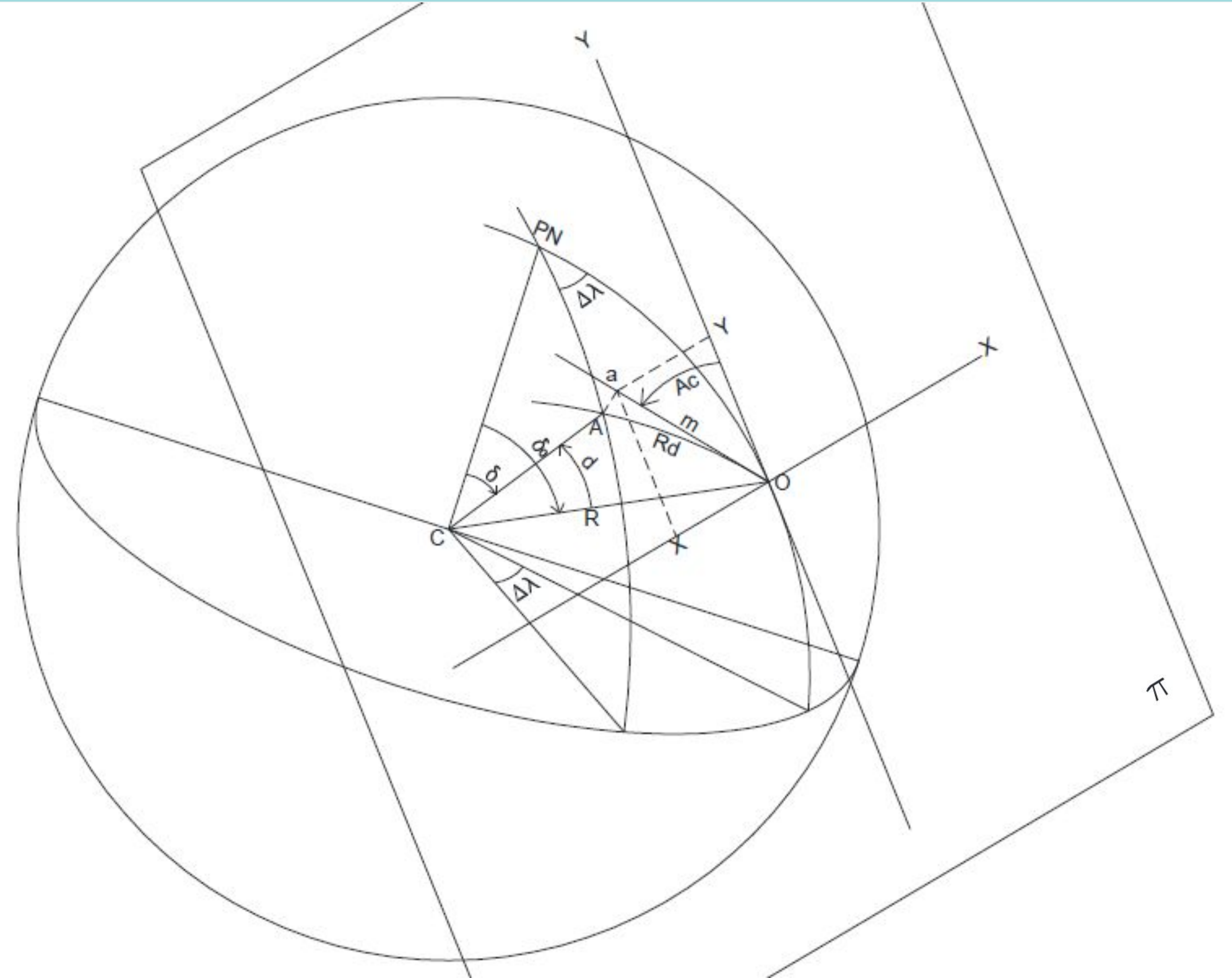
- el caso general
- la equidistante meridiana
- la equidistante transversal o paralela
- la equivalente

Proyecciones planas

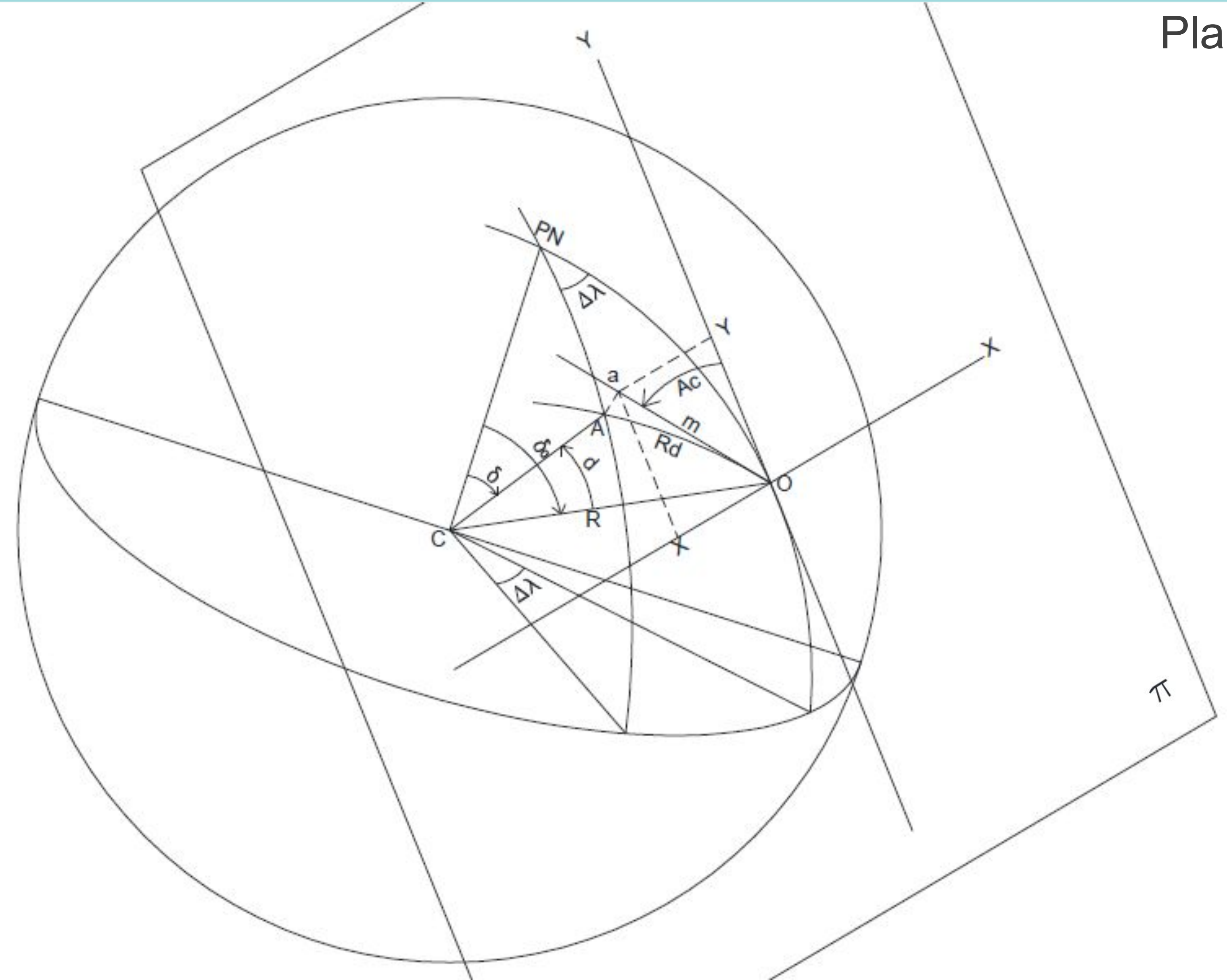
Ahora veremos una **proyección plana acimutal**

Proyección plana equidistante acimutal

Proyección plana equidistante acimutal

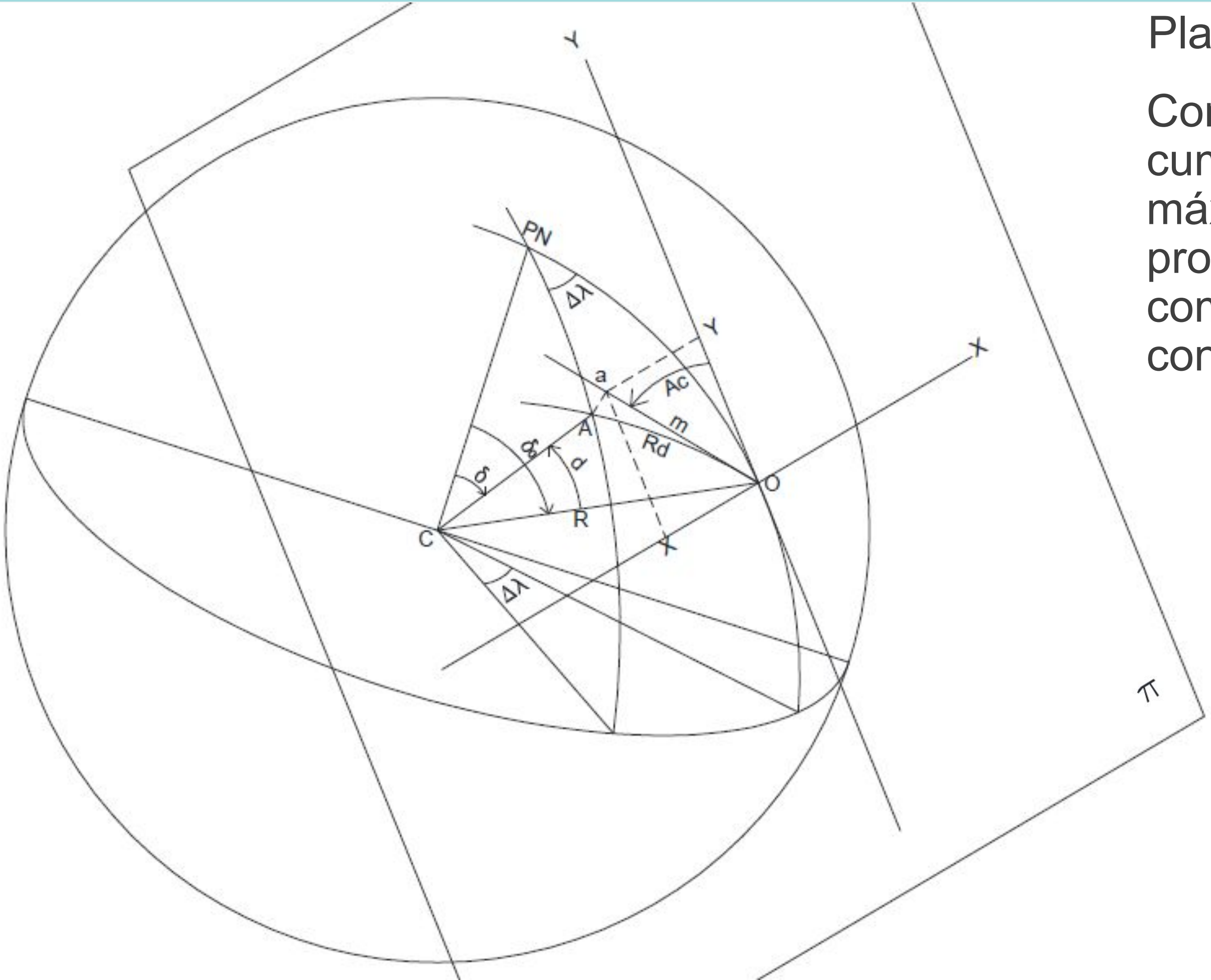


Proyección plana equidistante acimutal



Plano π tangente a la esfera por un punto O

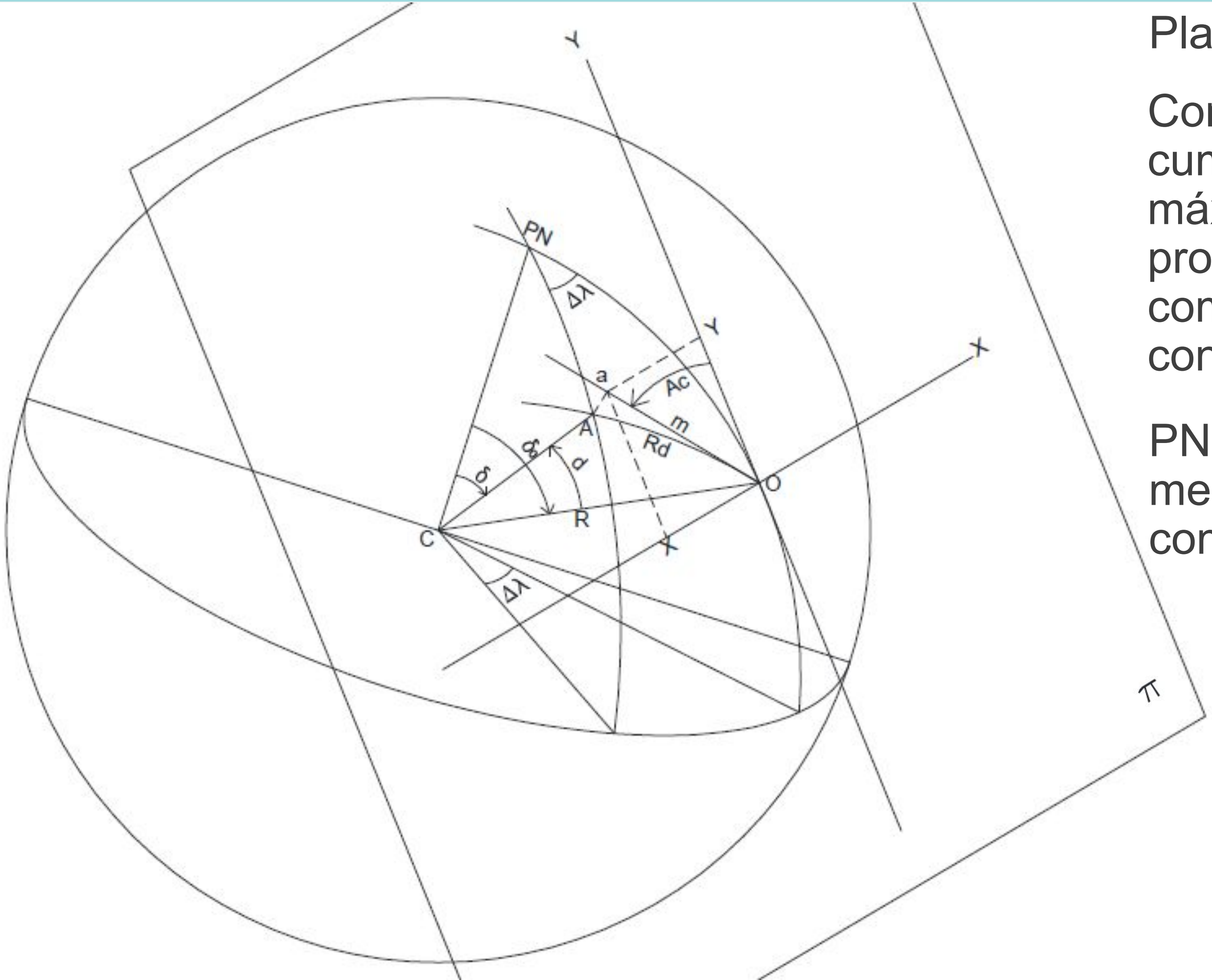
Proyección plana equidistante acimutal



Plano π tangente a la esfera por un punto O

Como debe ser en estas proyecciones, se cumple la premisa de que los círculos máximos que pasan por el polo de proyección O, se representan en el plano π como rectas que pasan por dicho polo y conservan los acimuts.

Proyección plana equidistante acimutal

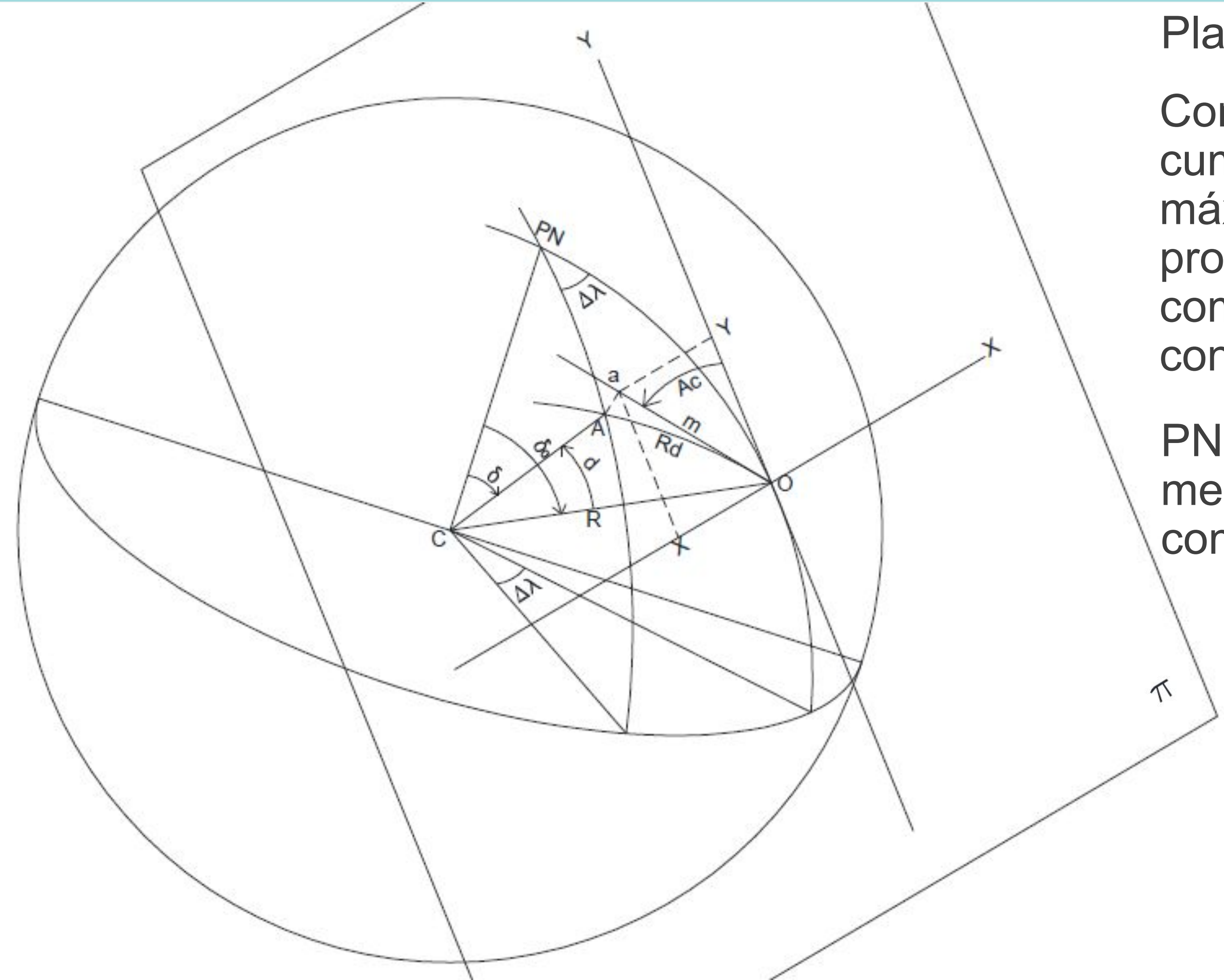


Plano π tangente a la esfera por un punto O

Como debe ser en estas proyecciones, se cumple la premisa de que los círculos máximos que pasan por el polo de proyección O, se representan en el plano π como rectas que pasan por dicho polo y conservan los acimuts.

PN-O (círculo máximo, y en particular meridiano por O), se representa en el plano como la recta OY.

Proyección plana equidistante acimutal



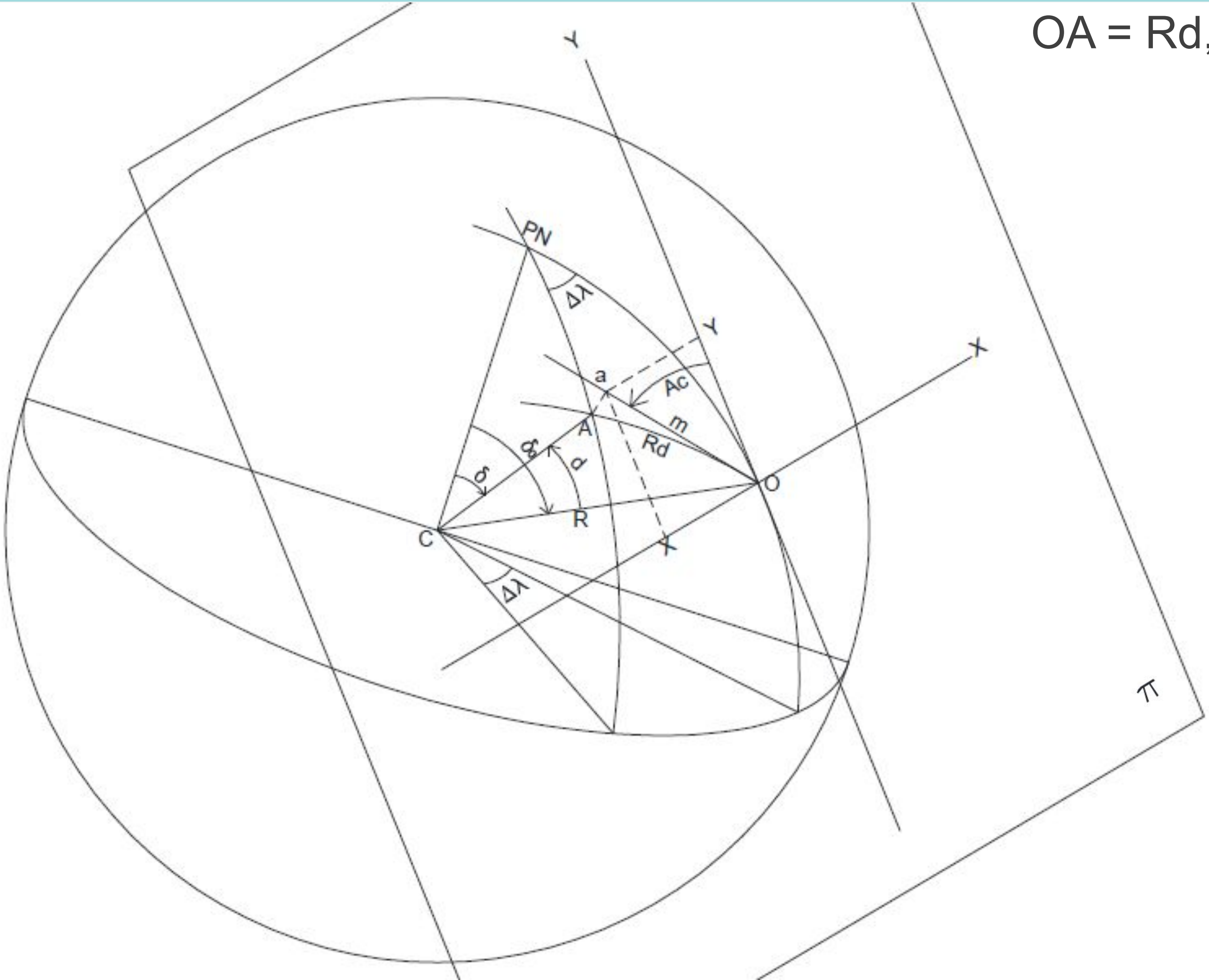
Plano π tangente a la esfera por un punto O

Como debe ser en estas proyecciones, se cumple la premisa de que los círculos máximos que pasan por el polo de proyección O, se representan en el plano π como rectas que pasan por dicho polo y conservan los acimuts.

PN-O (círculo máximo, y en particular meridiano por O), se representa en el plano como la recta OY.

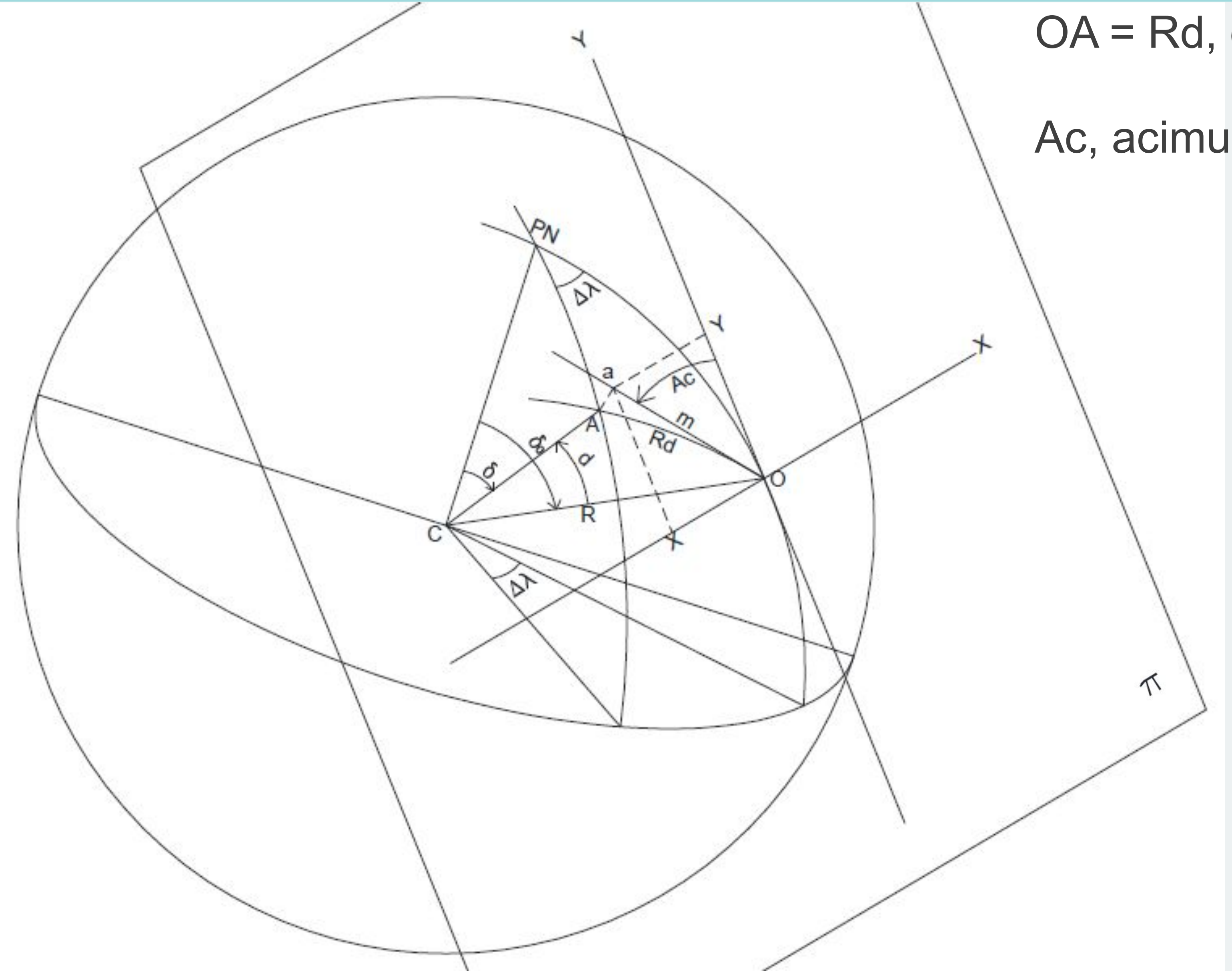
El círculo máximo OA se representa en el plano como la recta Oa.

Proyección plana equidistante acimutal



OA = Rd, debe ser igual a: Oa = m

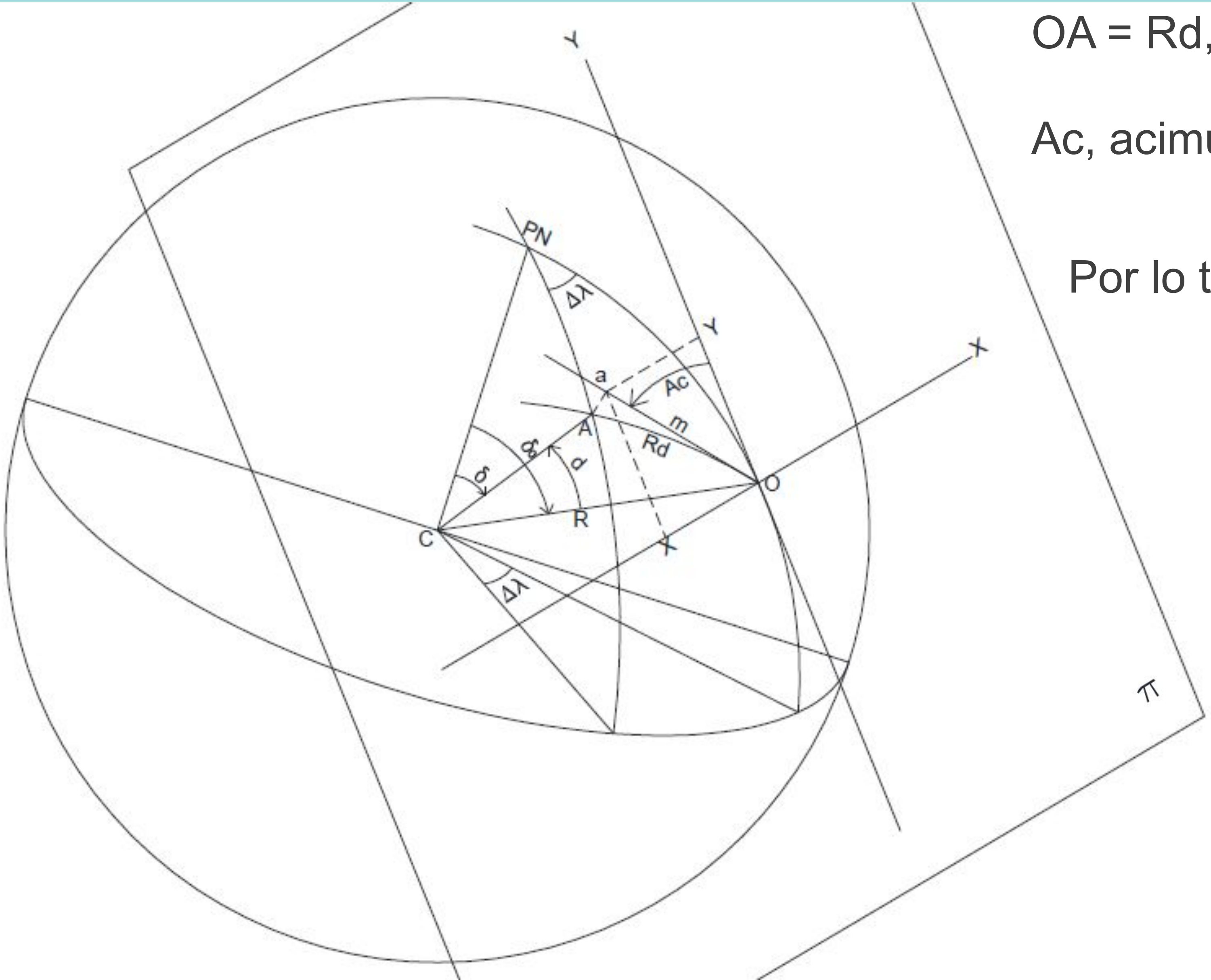
Proyección plana equidistante acimutal



OA = Rd, debe ser igual a: Oa = m

Ac, acimut en la esfera, debe ser igual a:
Ac’ acimut en el plano

Proyección plana equidistante acimutal



OA = Rd, debe ser igual a: Oa = m

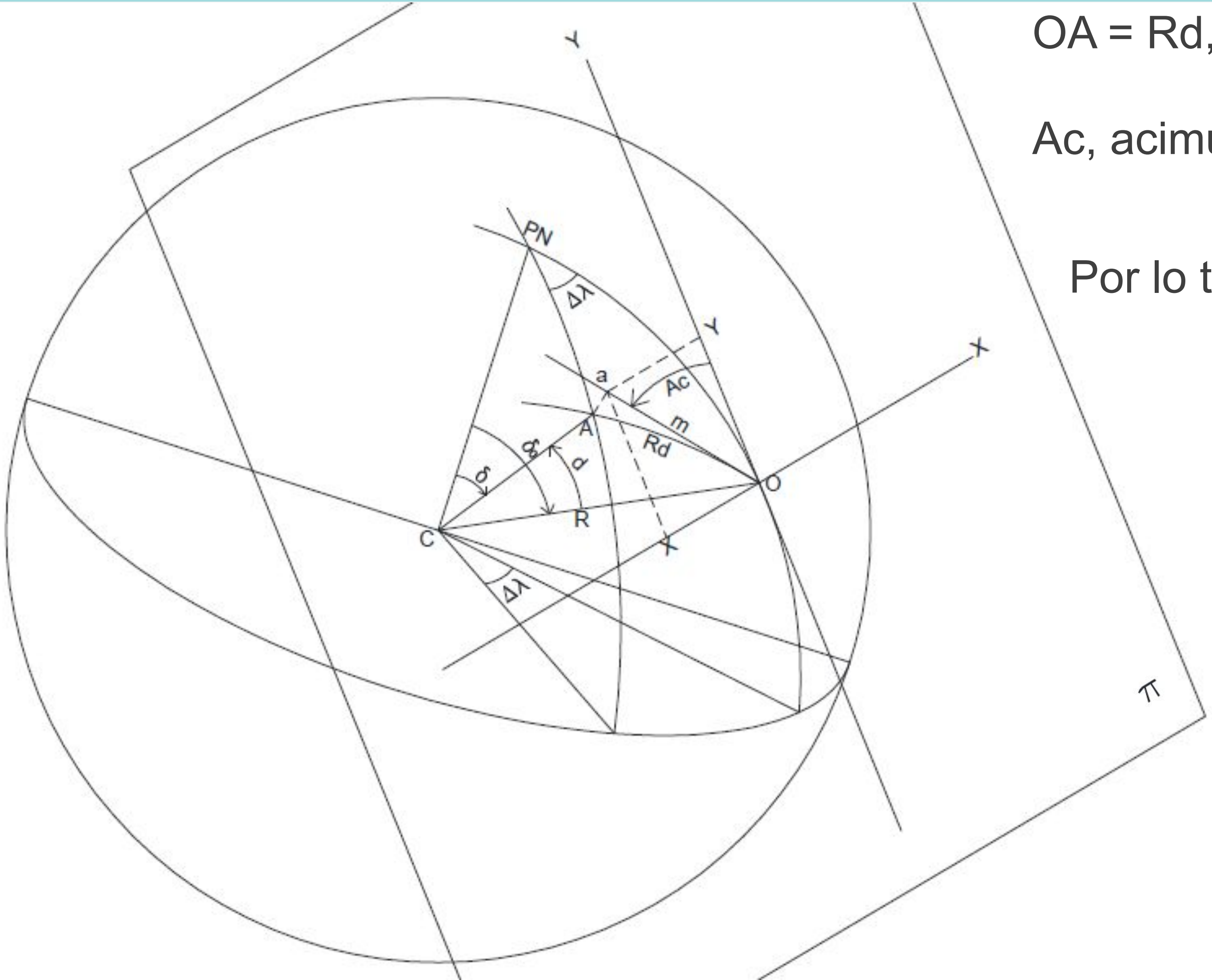
Ac, acimut en la esfera, debe ser igual a:
Ac’ acimut en el plano

Por lo tanto, la expresión genérica de la Ley es:

m=Rd

Ac’=Ac

Proyección plana equidistante acimutal



OA = Rd, debe ser igual a: Oa = m

Ac, acimut en la esfera, debe ser igual a:
Ac' acimut en el plano

Por lo tanto, la expresión genérica de la Ley es:

m=Rd

Ac'=Ac

Y la expresión cartesiana será:

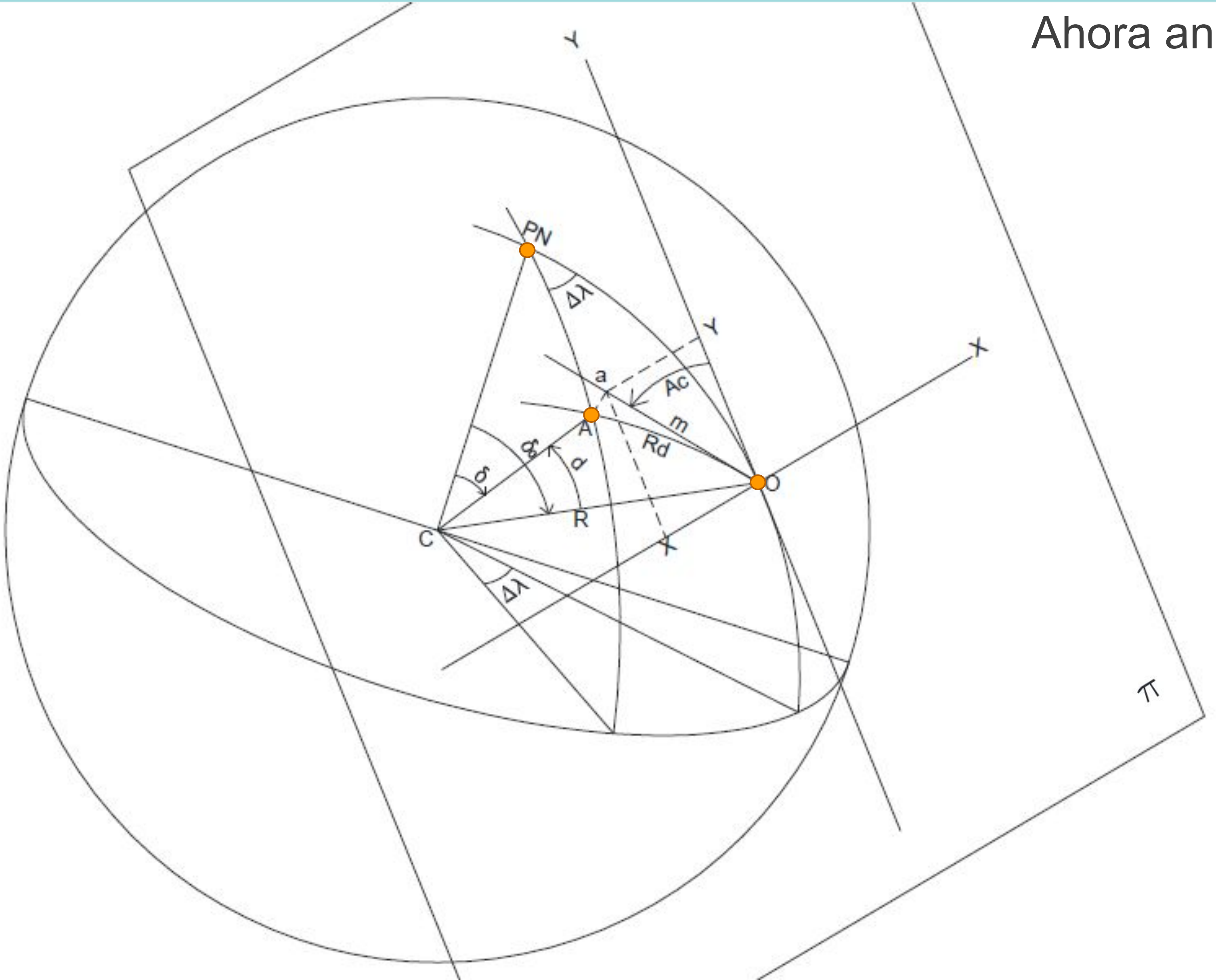
$$X = Rd \sin Ac$$

$$Y = Rd \cos Ac$$

Proyección plana equidistante acimutal

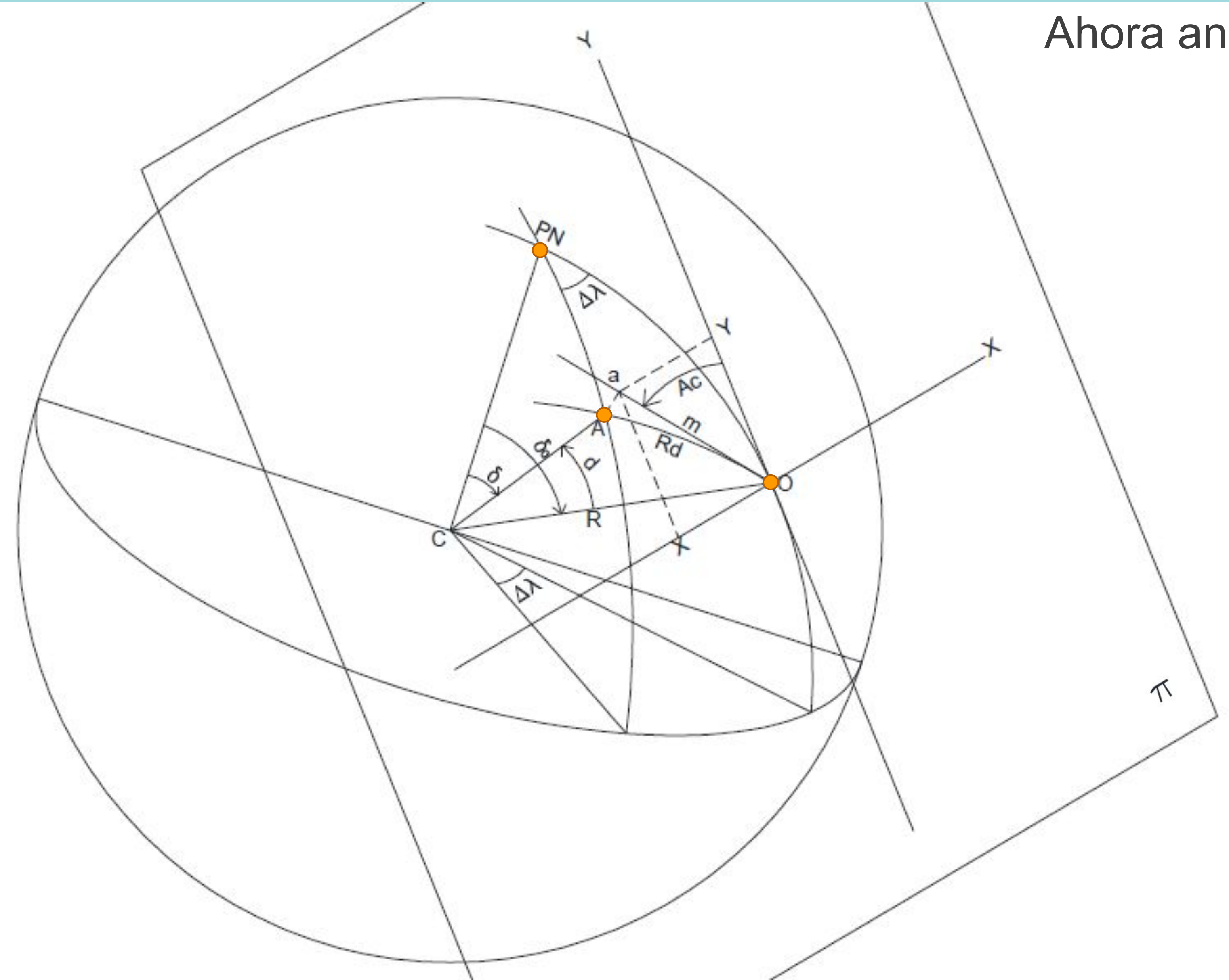
Ahora analicemos el triángulo esférico PN, A, O

Proyección plana equidistante acimutal



Ahora analicemos el triángulo esférico PN, A, O

Proyección plana equidistante acimutal

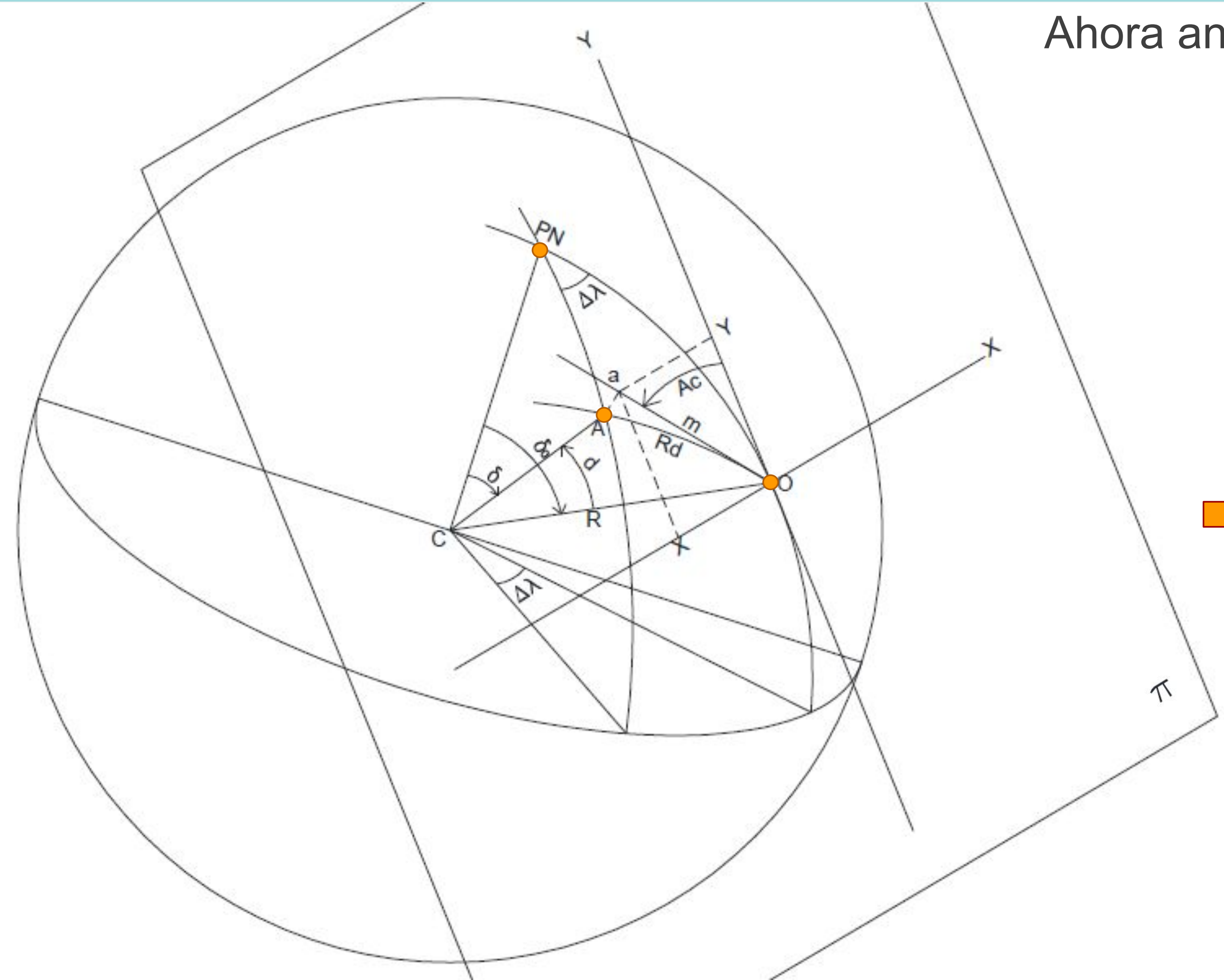


Ahora analicemos el triángulo esférico PN, A, O

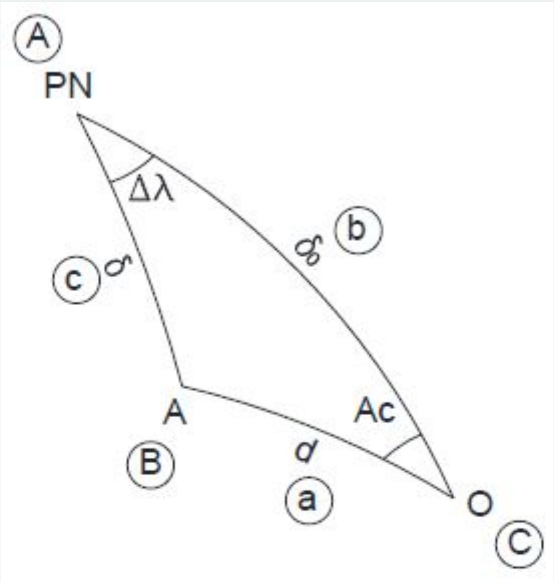
Para calcular la expresión de d y Ac.

Proyección plana equidistante acimutal

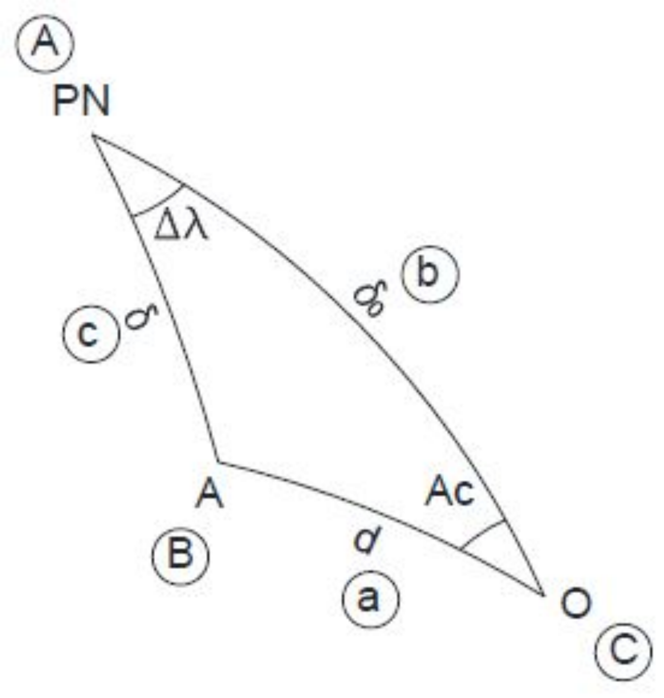
Ahora analicemos el triángulo esférico PN, A, O



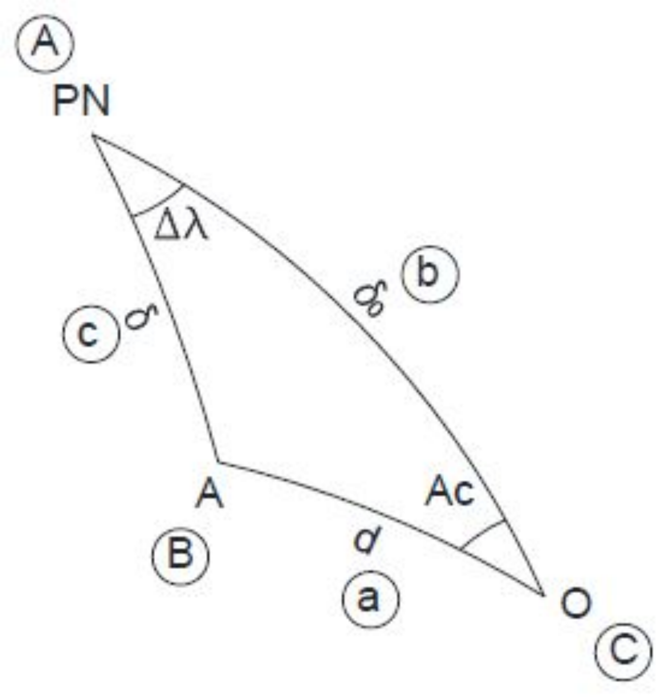
Para calcular la expresión de d y Ac.



Proyección plana equidistante acimutal



Proyección plana equidistante acimutal

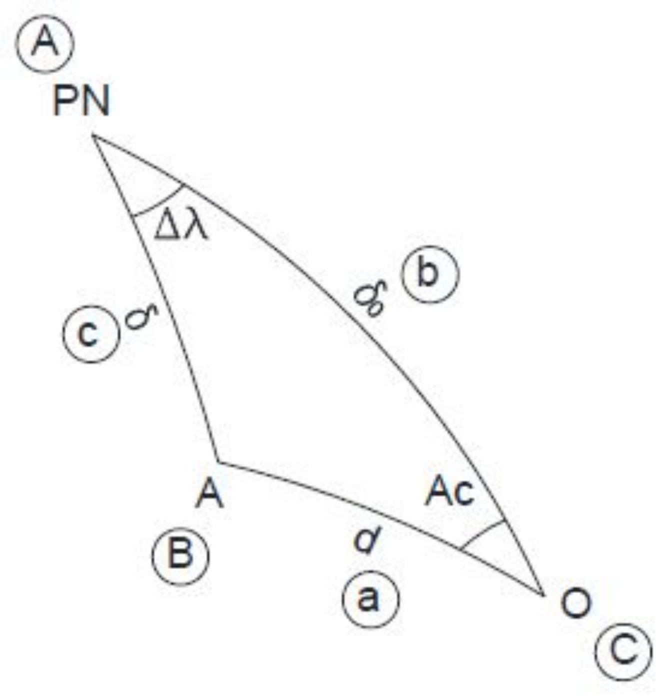


Partiendo de:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos A \cos b$$

Proyección plana equidistante acimutal



Partiendo de:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

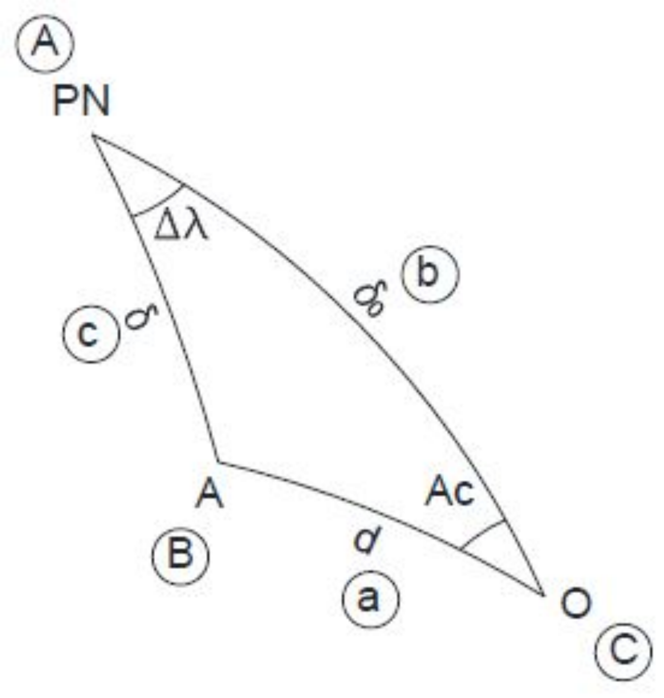
$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos A \cos b$$

Sustituyendo según el triángulo que analizamos:

$$\cos d = \cos \delta_0 \cos \delta + \sin \delta_0 \sin \delta \cos \Delta\lambda$$

$$\cot \delta \sin \delta_0 = \cot Ac \sin \Delta\lambda + \cos \Delta\lambda \cos \delta_0$$

Proyección plana equidistante acimutal



Partiendo de:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos A \cos b$$

Sustituyendo según el triángulo que analizamos:

$$\cos d = \cos \delta_0 \cos \delta + \sin \delta_0 \sin \delta \cos \Delta\lambda$$

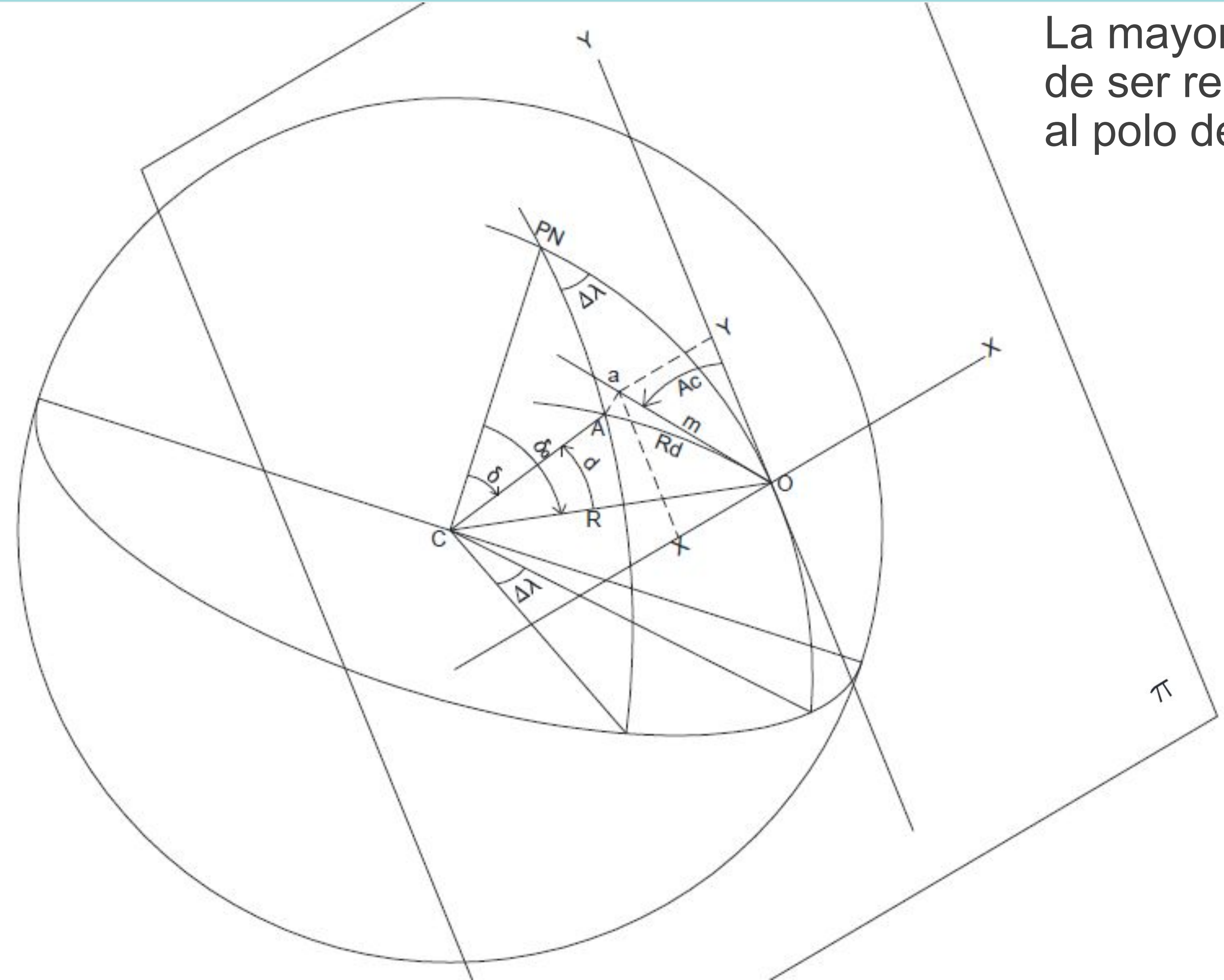
$$\cot \delta \sin \delta_0 = \cot Ac \sin \Delta\lambda + \cos \Delta\lambda \cos \delta_0$$

Incluyendo a las latitudes y despejando Ac:

$$\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

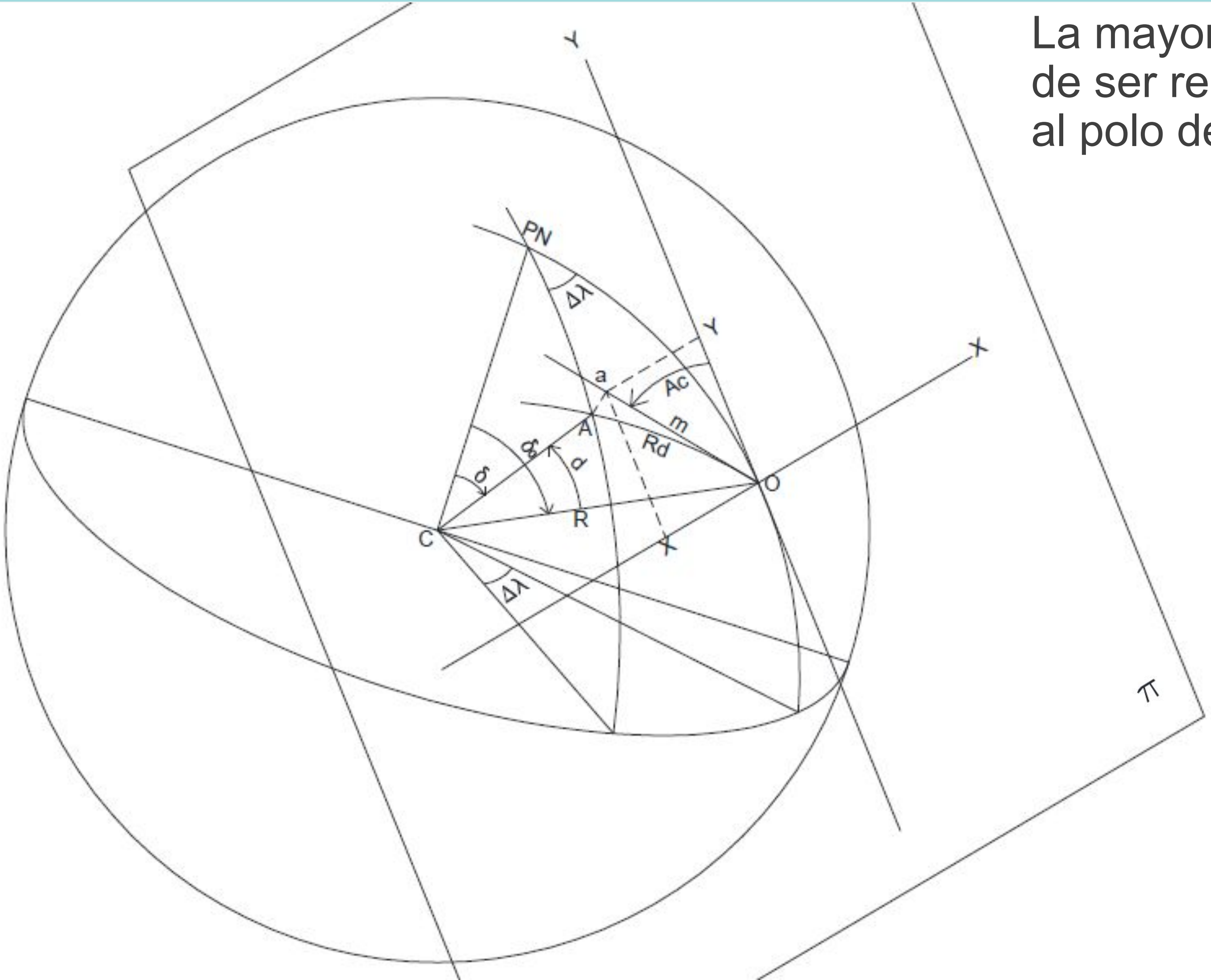
$$\cot Ac = \frac{\tan \varphi \cos \varphi_0 - \cos \Delta\lambda \sin \varphi_0}{\sin \Delta\lambda}$$

Proyección plana equidistante acimutal



La mayor porción de superficie terrestre posible de ser representada es el hemisferio que contiene al polo de la proyección, O.

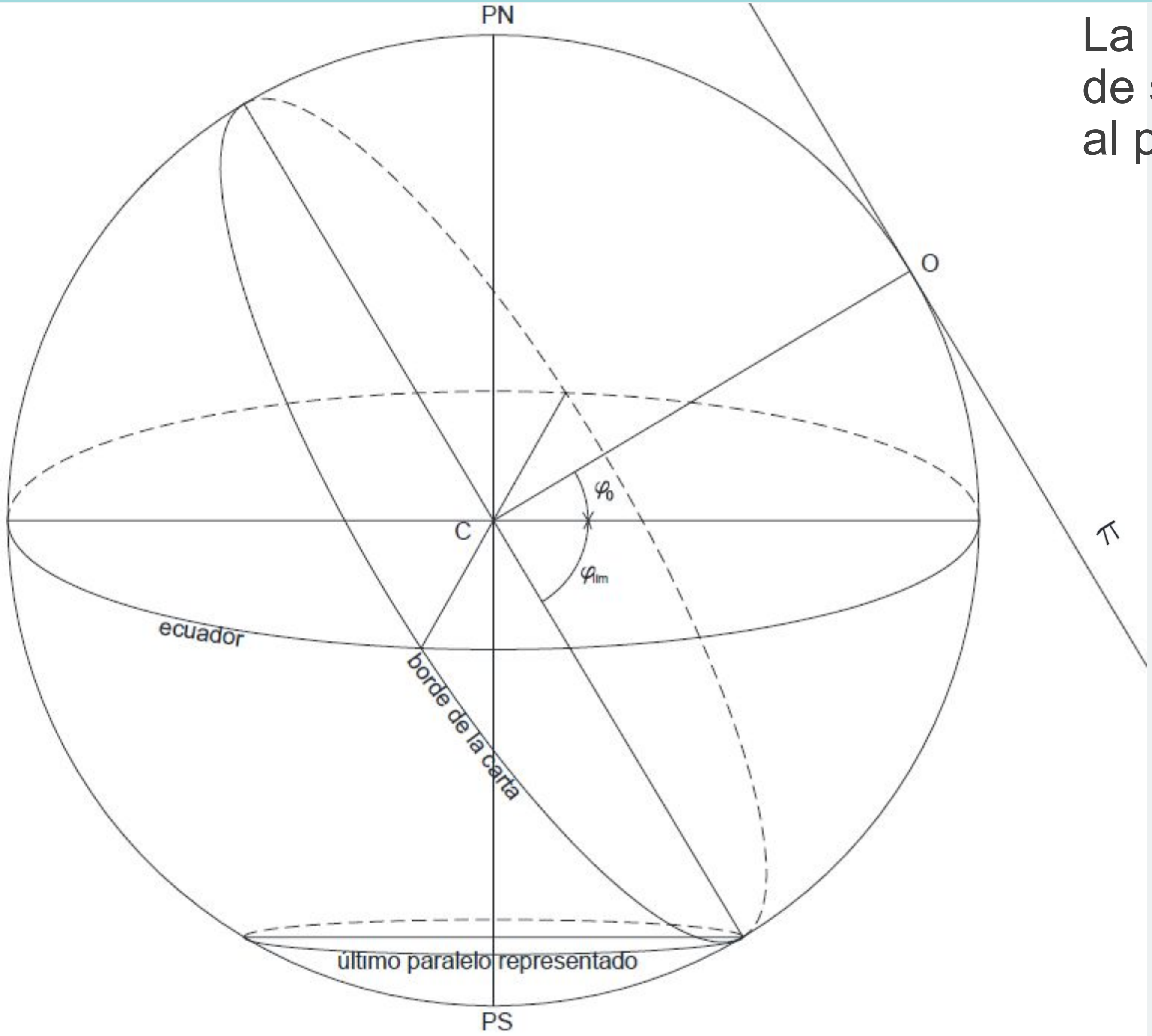
Proyección plana equidistante acimutal



La mayor porción de superficie terrestre posible de ser representada es el hemisferio que contiene al polo de la proyección, O.

Notemos que el hemisferio es la porción de superficie terrestre determinada entre el plano paralelo a π que pasa por el centro de la Tierra y el propio plano π.

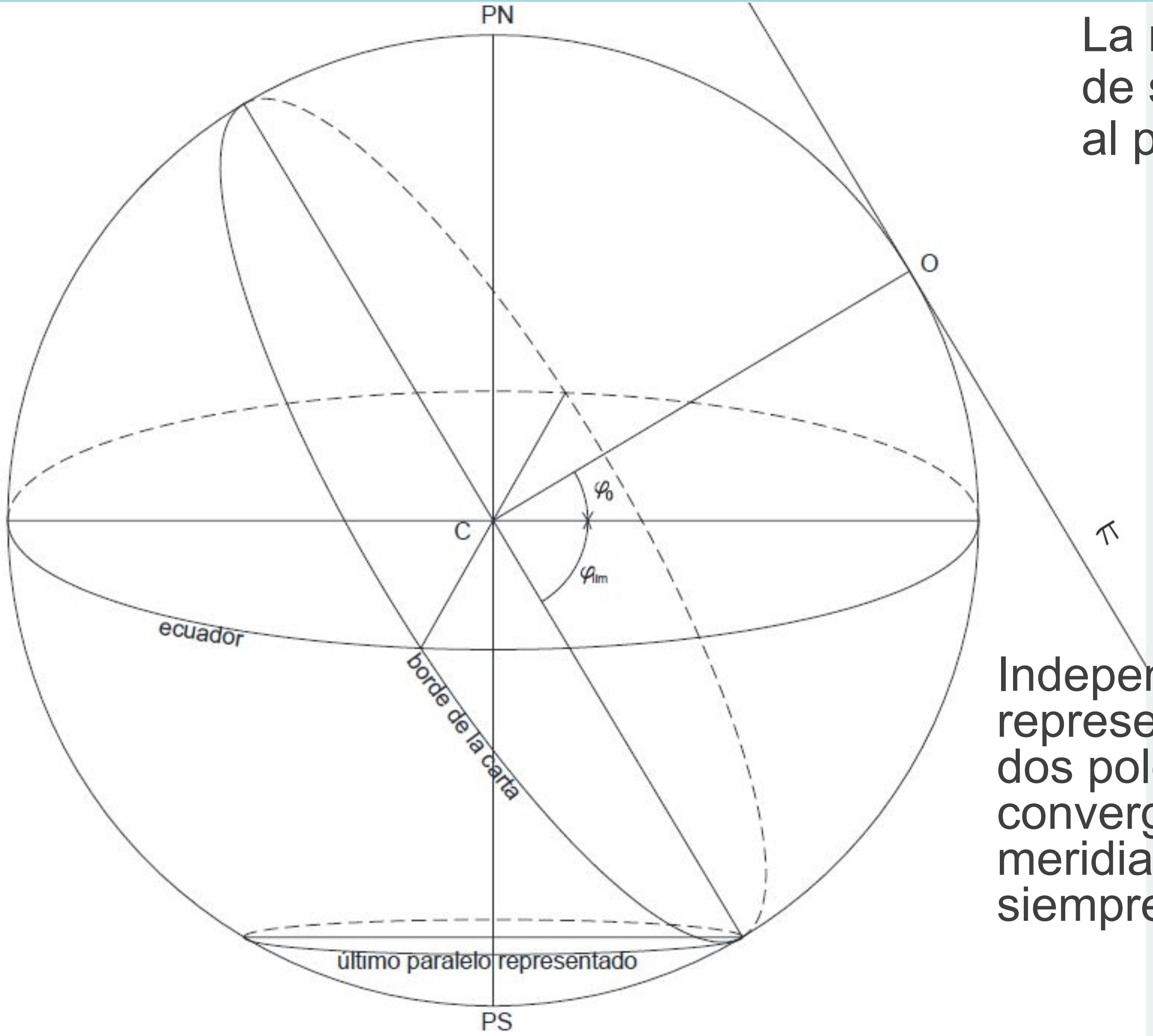
Proyección plana equidistante acimutal



La mayor porción de superficie terrestre posible de ser representada es el hemisferio que contiene al polo de la proyección, O.

Notemos que el hemisferio es la porción de superficie terrestre determinada entre el plano paralelo a π que pasa por el centro de la Tierra y el propio plano π.

Proyección plana equidistante acimutal

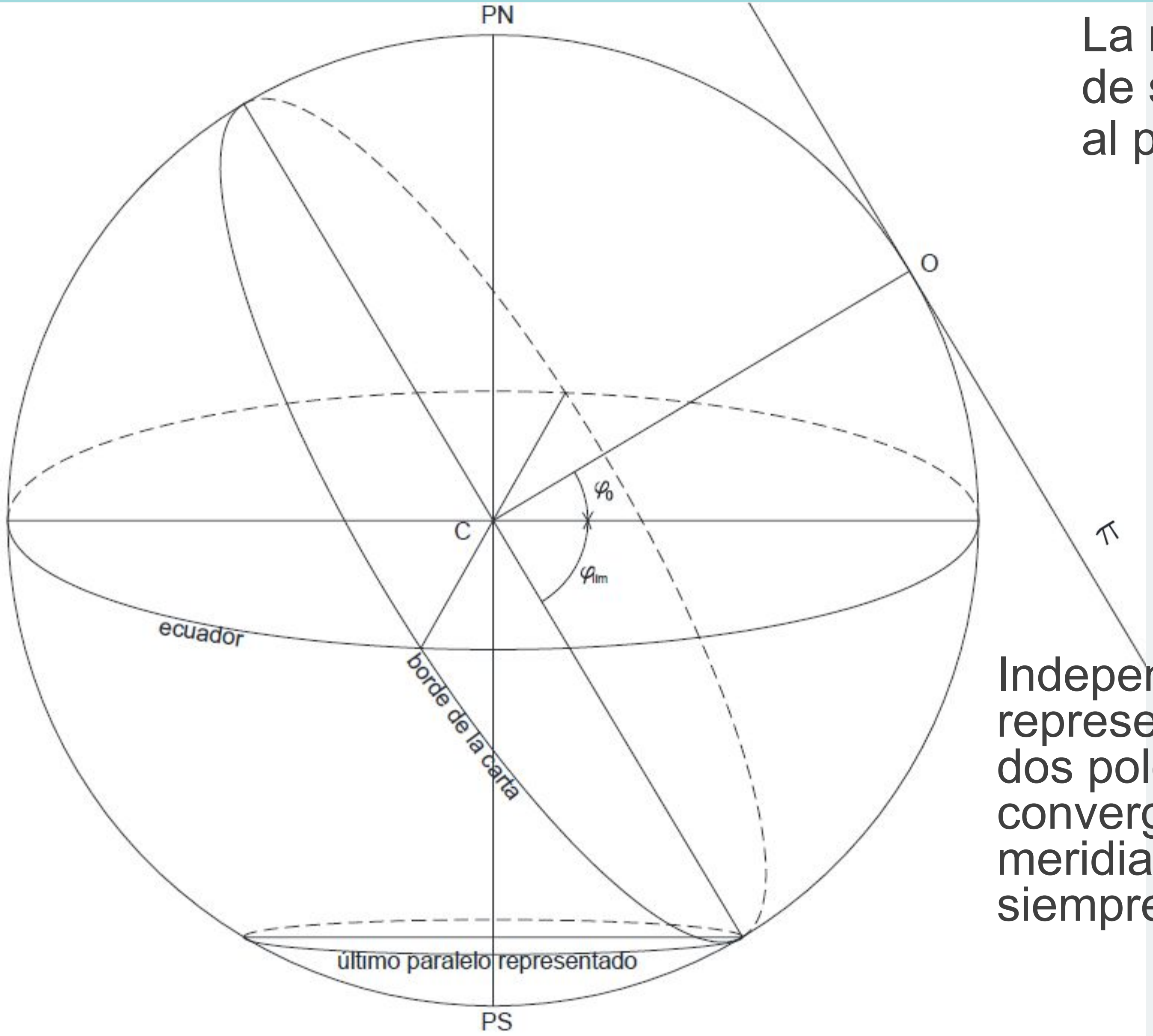


La mayor porción de superficie terrestre posible de ser representada es el hemisferio que contiene al polo de la proyección, O.

Notemos que el hemisferio es la porción de superficie terrestre determinada entre el plano paralelo a π que pasa por el centro de la Tierra y el propio plano π.

Independientemente de qué hemisferio se esté representando, siempre se representará a uno de los dos polos (PN o PS) en la carta. En dichos polos convergen todos los meridianos, por lo que todos los meridianos estarán representados en la carta, siempre!

Proyección plana equidistante acimutal



La mayor porción de superficie terrestre posible de ser representada es el hemisferio que contiene al polo de la proyección, O.

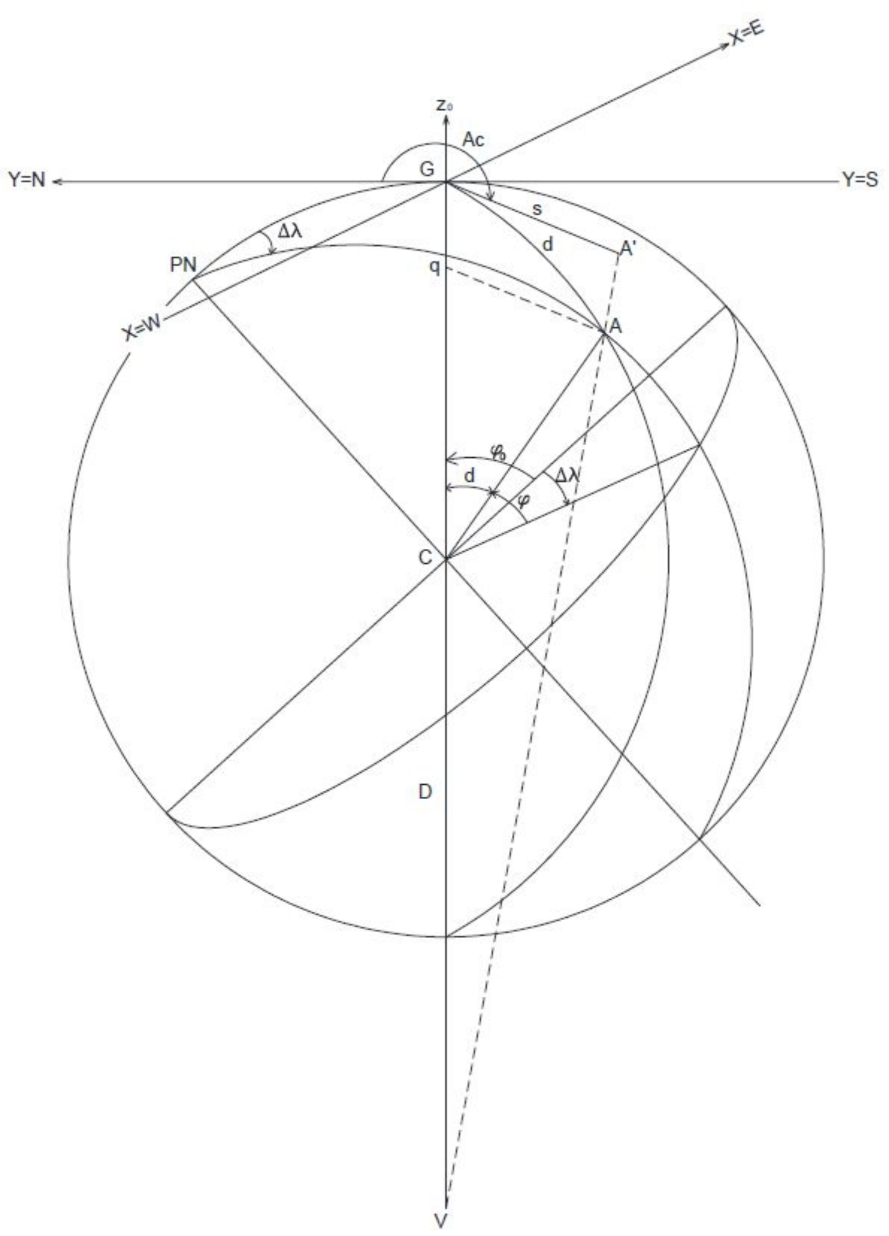
Notemos que el hemisferio es la porción de superficie terrestre determinada entre el plano paralelo a π que pasa por el centro de la Tierra y el propio plano π.

Independientemente de qué hemisferio se esté representando, siempre se representará a uno de los dos polos (PN o PS) en la carta. En dichos polos convergen todos los meridianos, por lo que todos los meridianos estarán representados en la carta, siempre!

No ocurre lo mismo con los paralelos.

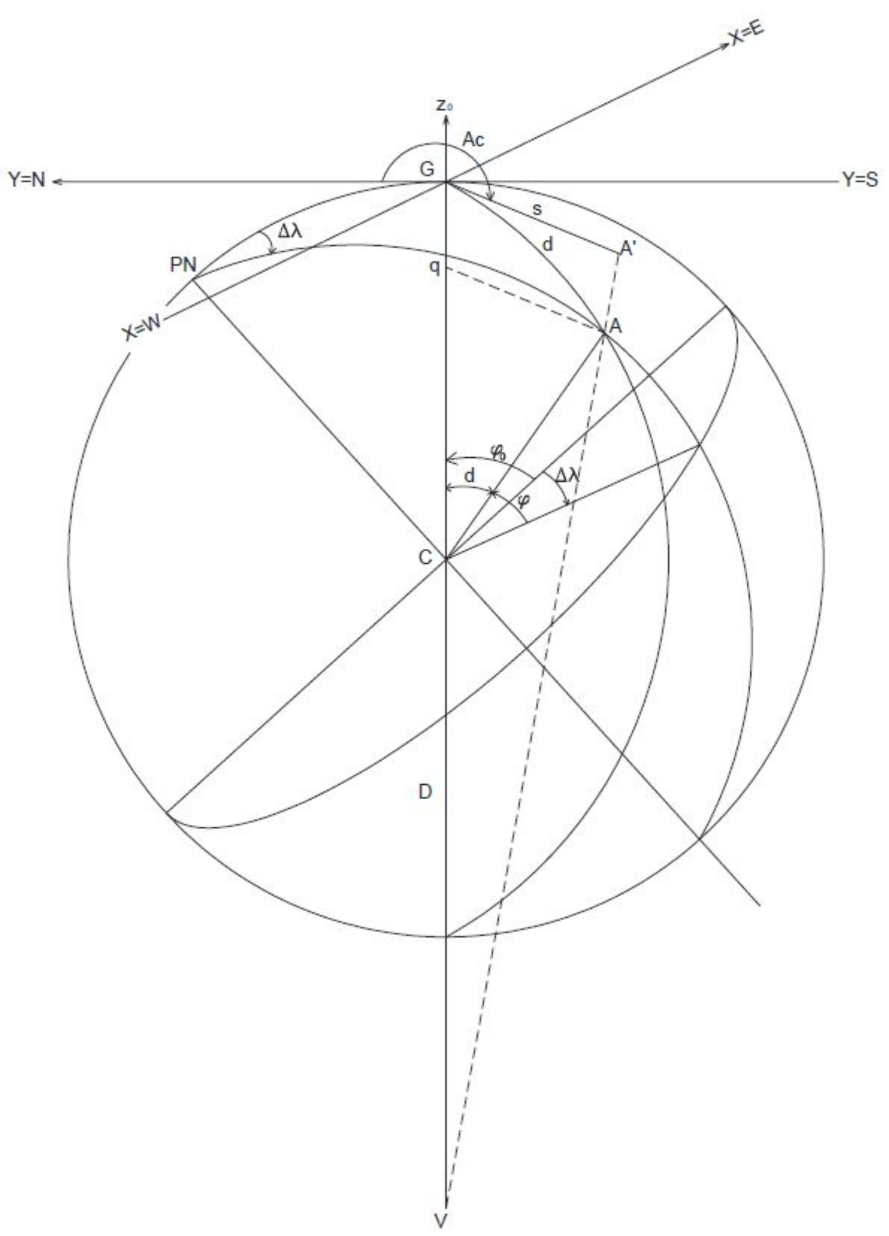
Proyecciones planas perspectivas

Proyecciones planas perspectivas



En esta modalidad, se establece una proyectividad mediante un haz de rectas desde un vértice V.

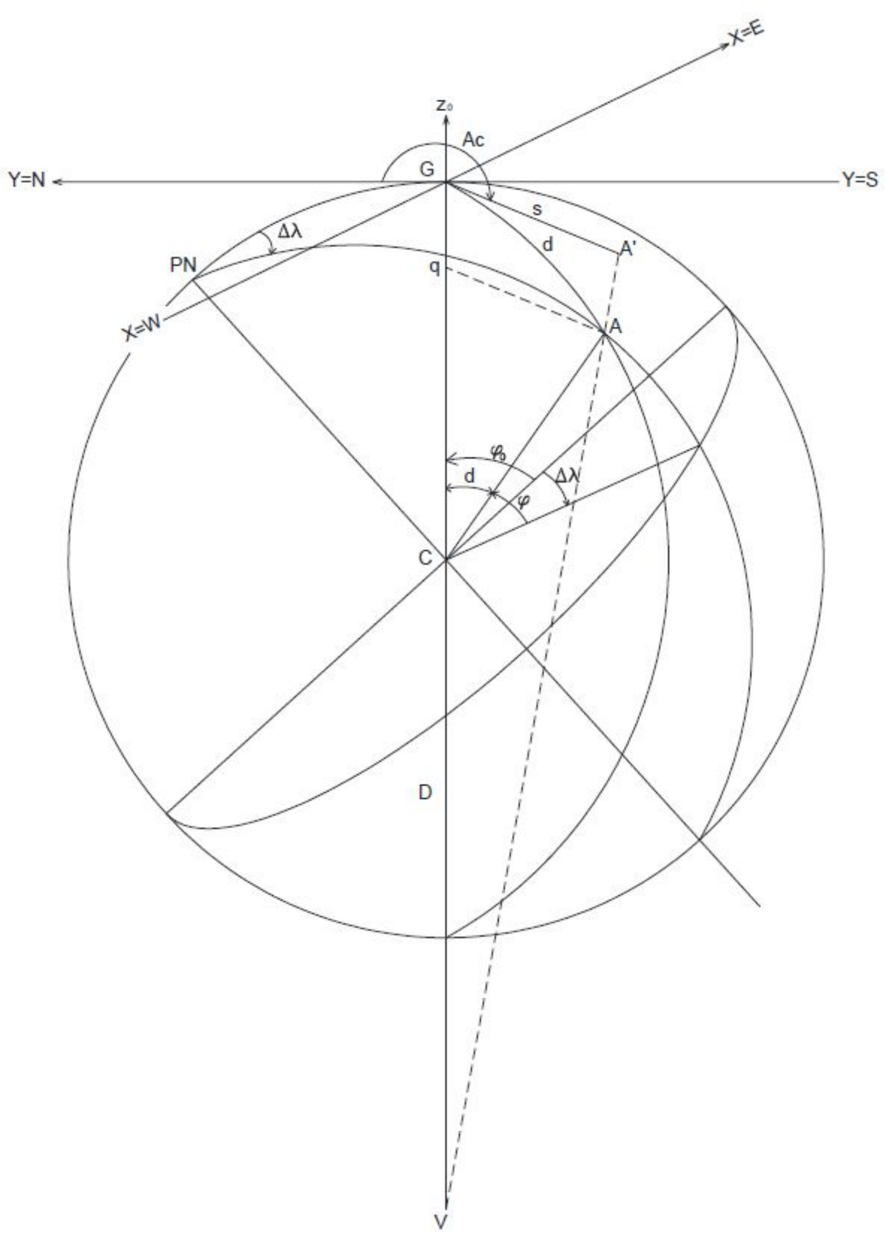
Proyecciones planas perspectivas



En esta modalidad, se establece una proyectividad mediante un haz de rectas desde un vértice V.

D

Proyecciones planas perspectivas

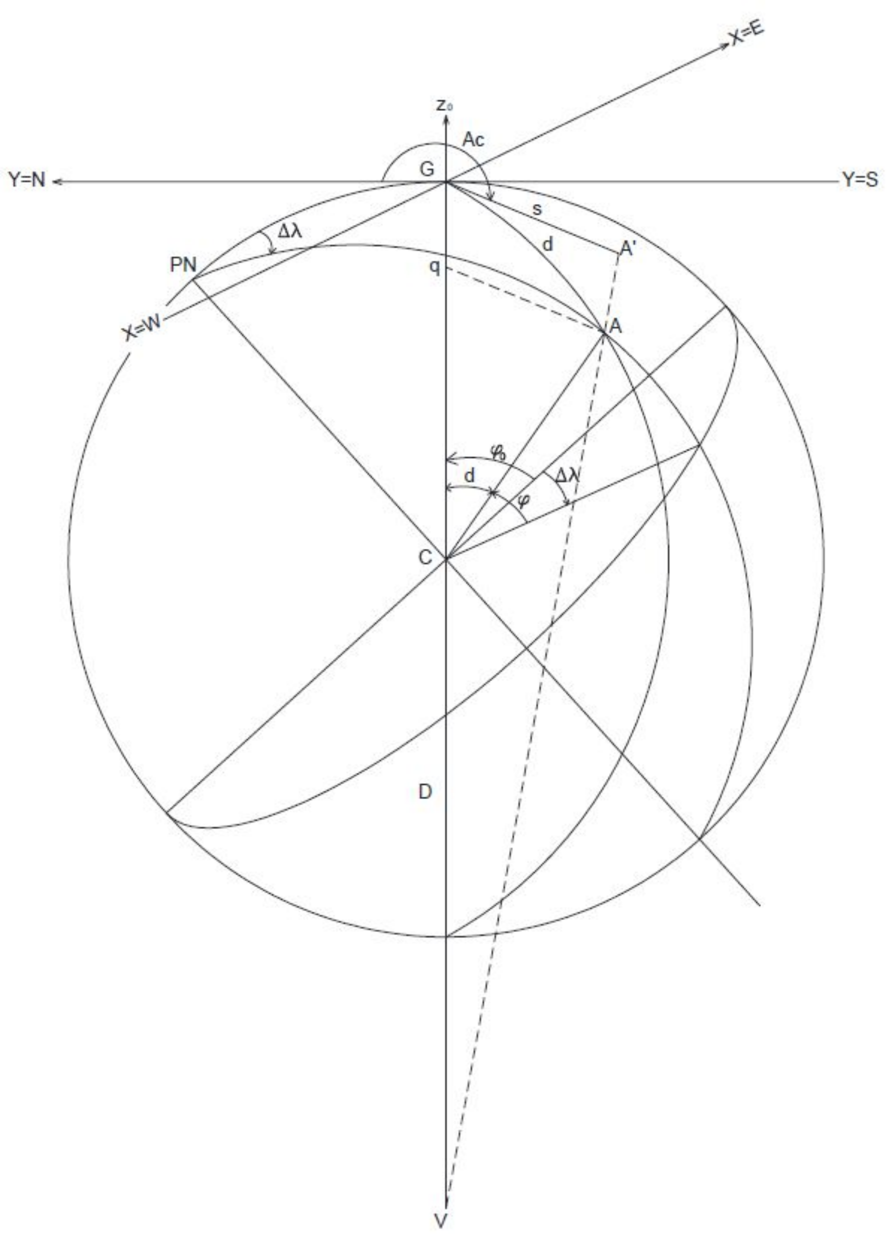


En esta modalidad, se establece una proyectividad mediante un haz de rectas desde un vértice V.

D

G: polo de proyección

Proyecciones planas perspectivas



En esta modalidad, se establece una proyectividad mediante un haz de rectas desde un vértice V.

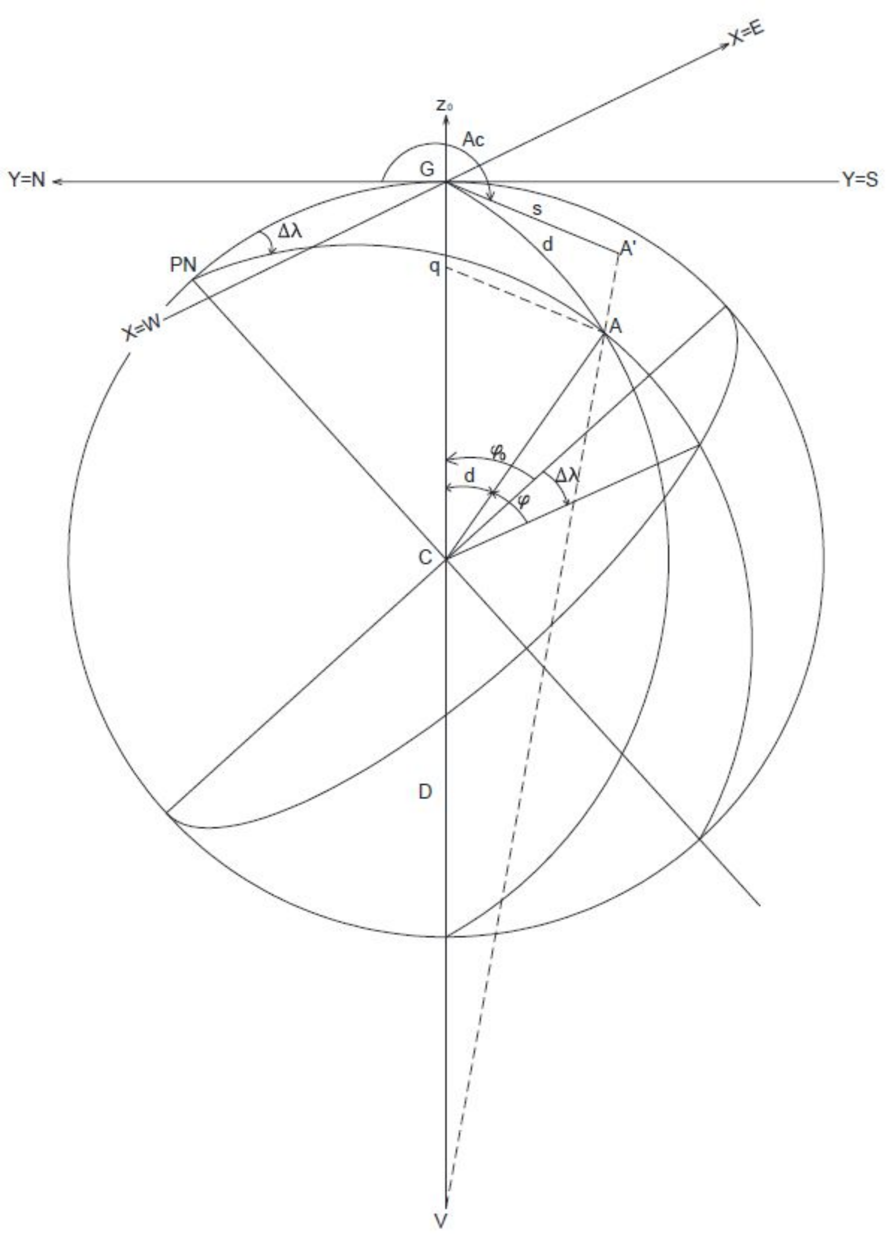
D

G: polo de proyección

Dependiendo de *D* y de la posición del polo G, surgen diferentes proyecciones y modos.

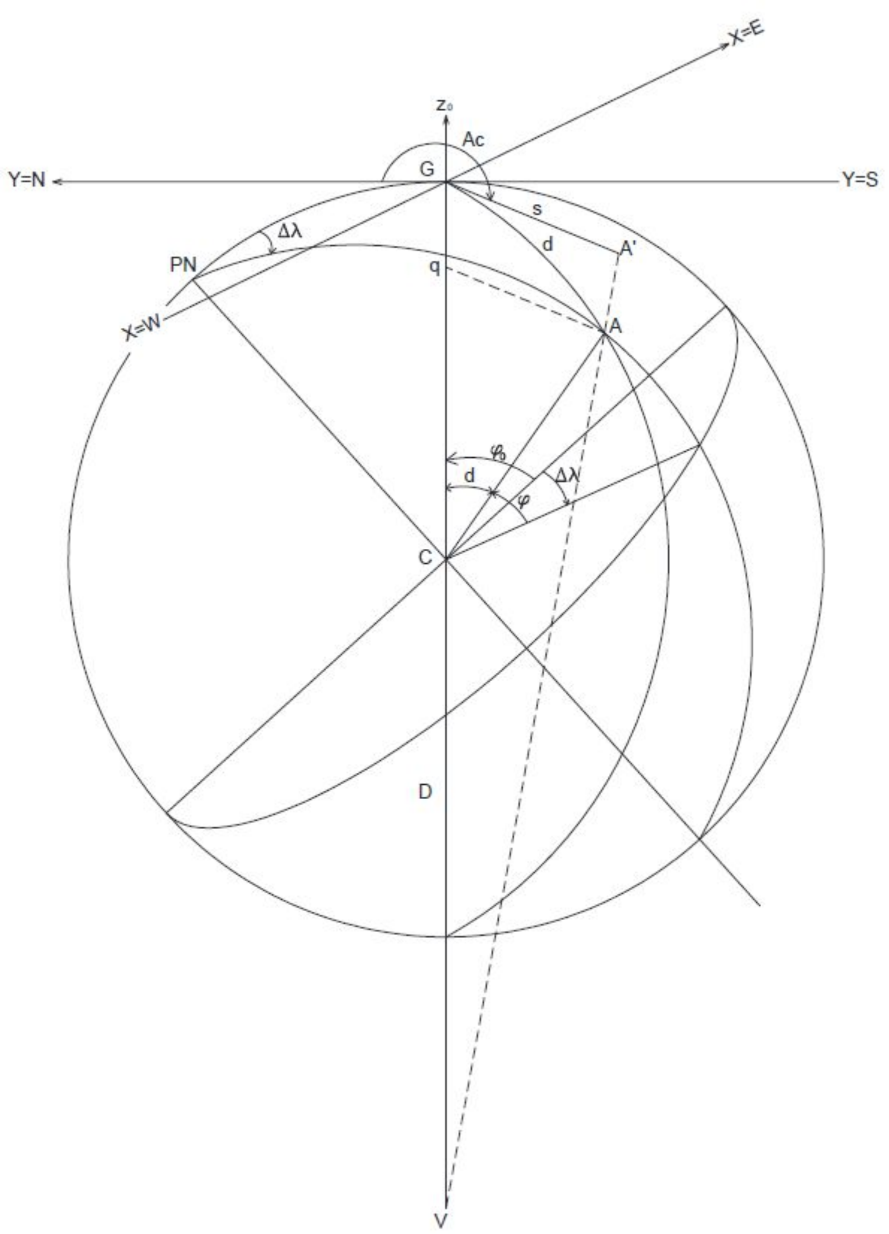
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica



Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

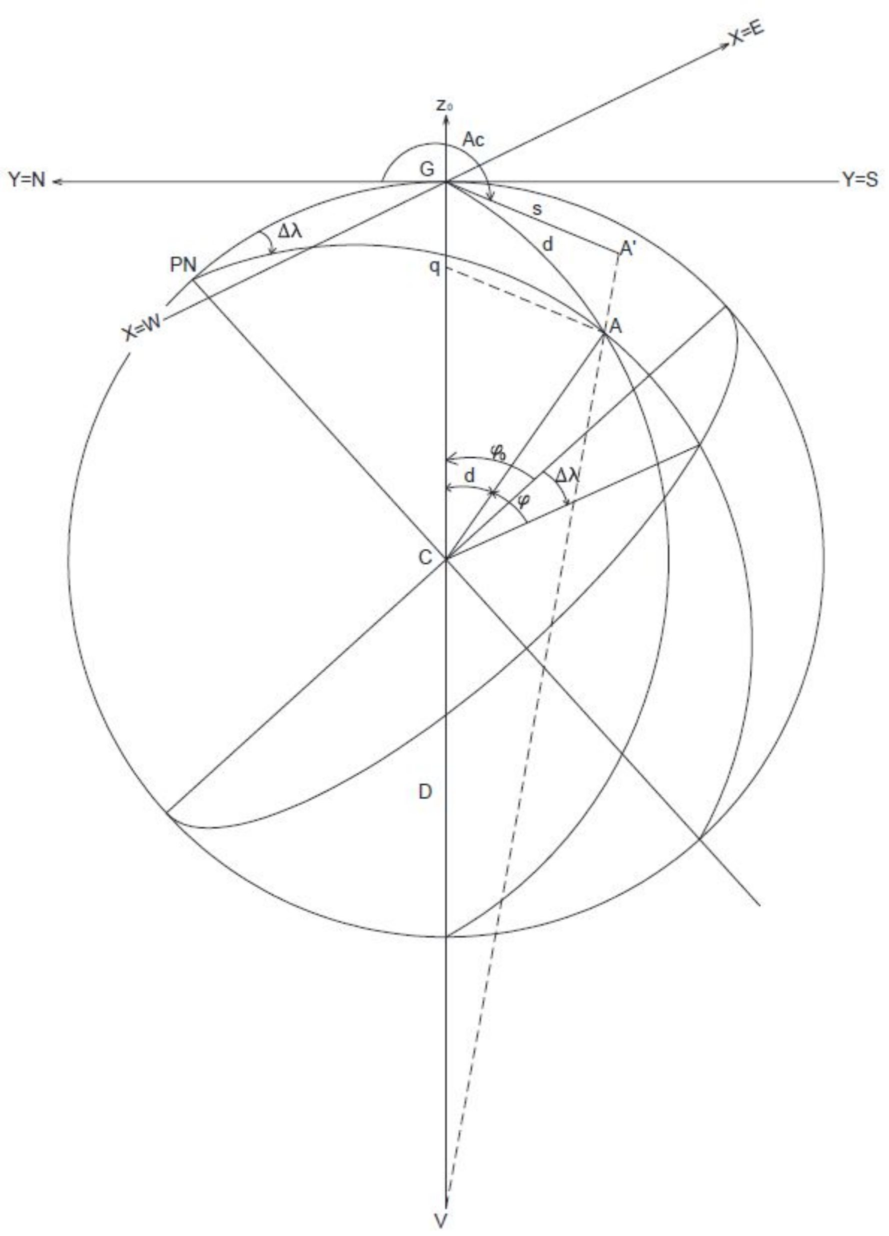


El vértice V se encuentra a una distancia finita de C, y mayor al radio de la esfera modelo considerado 1:

$$1 < D < \infty$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica



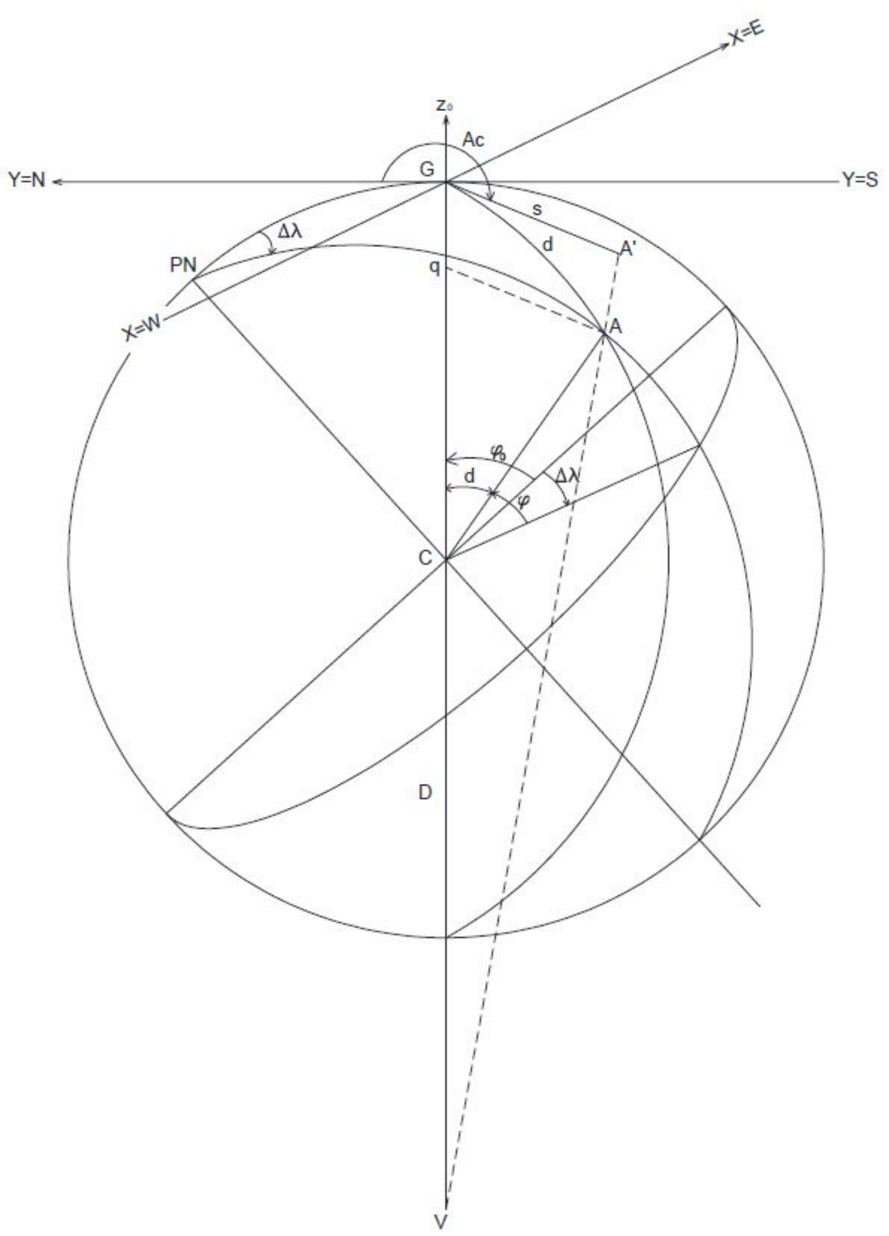
El vértice V se encuentra a una distancia finita de C, y mayor al radio de la esfera modelo considerado 1:

$$1 < D < \infty$$

Comenzaremos analizando el caso más general, que es el **acimutal u oblicuo**.

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$

Proyección Escenográfica



El vértice V se encuentra a una distancia finita de C, y mayor al radio de la esfera modelo considerado 1:

$$1 < D < \infty$$

Comenzaremos analizando el caso más general, que es el **acimutal u oblicuo**.

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$

V-A proyecta un punto genérico A en A' en el plano.
Tenemos:

$$D = \overline{V - C}$$

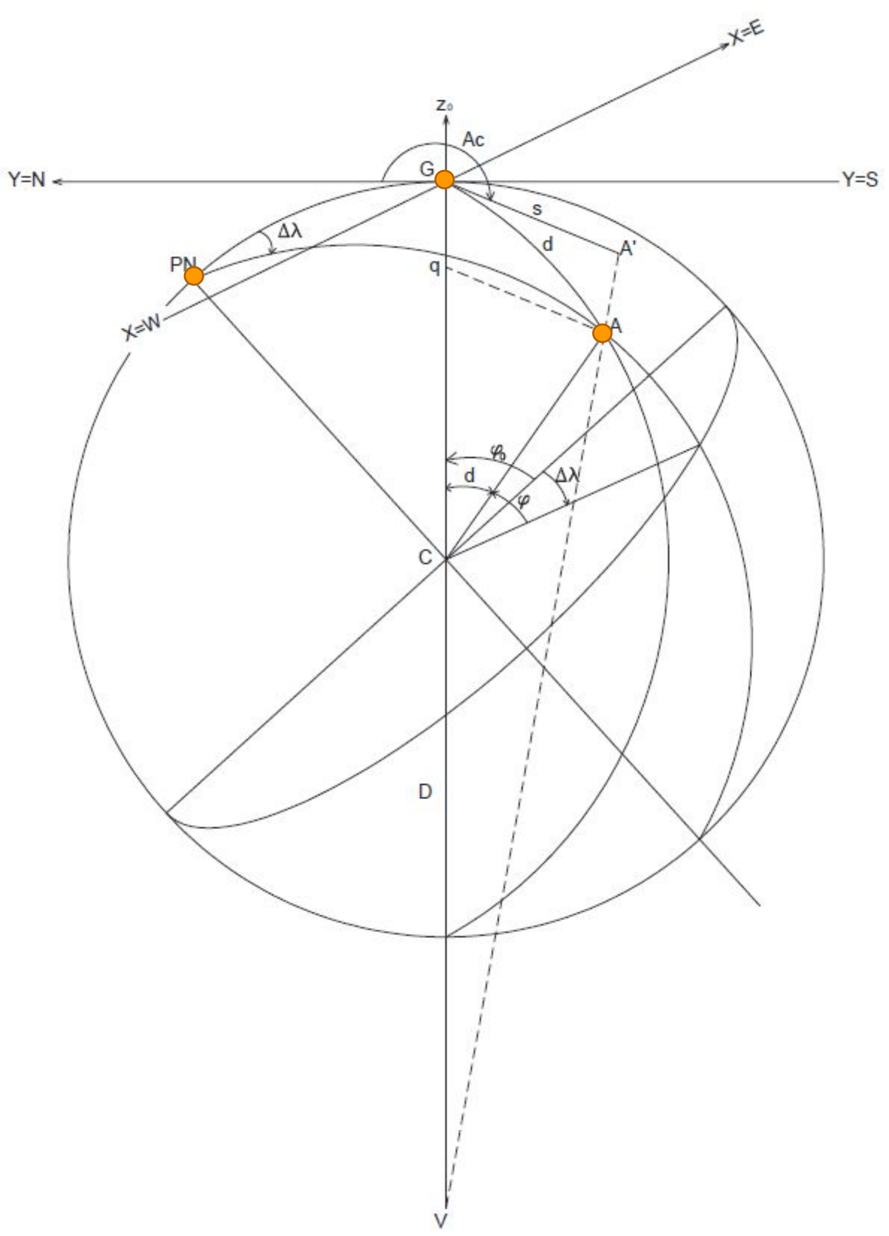
$$G(\varphi_0; \lambda_0)$$

$$A(\varphi; \lambda)$$

$$A'(X; Y)$$

$$s = \overline{G - A'}$$

Proyección Escenográfica



El vértice V se encuentra a una distancia finita de C, y mayor al radio de la esfera modelo considerado 1:

$$1 < D < \infty$$

Comenzaremos analizando el caso más general, que es el **acimutal u oblicuo**.

$$\varphi_0 \neq 0 \ y \ \varphi_0 \neq \pm 90^o$$

V-A proyecta un punto genérico A en A' en el plano. Tenemos:

$$D = \overline{V - C}$$

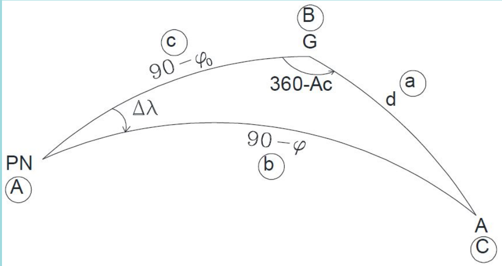
$$G(\varphi_0; \lambda_0)$$

$$A(\varphi; \lambda)$$

$$A'(X; Y)$$

$$s = \overline{G - A'}$$

Ahora nos detenemos en el triángulo esférico PN,G,A



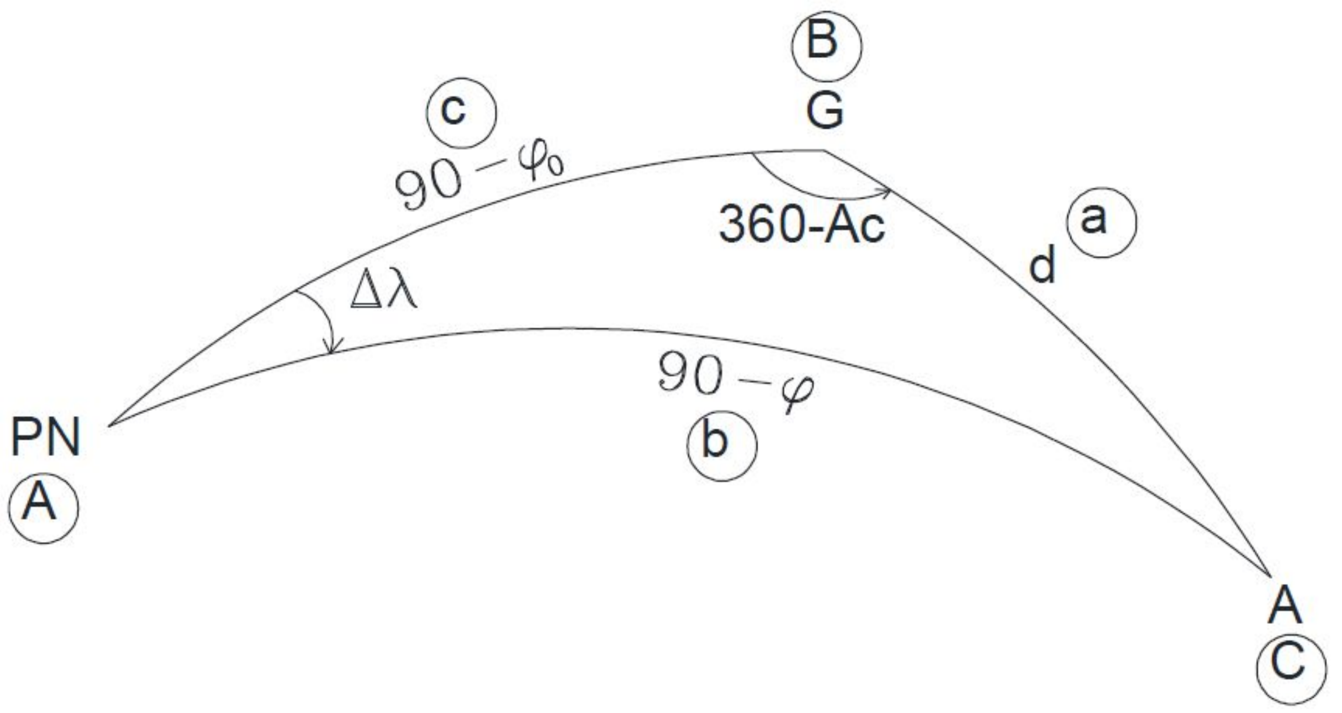
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^o$



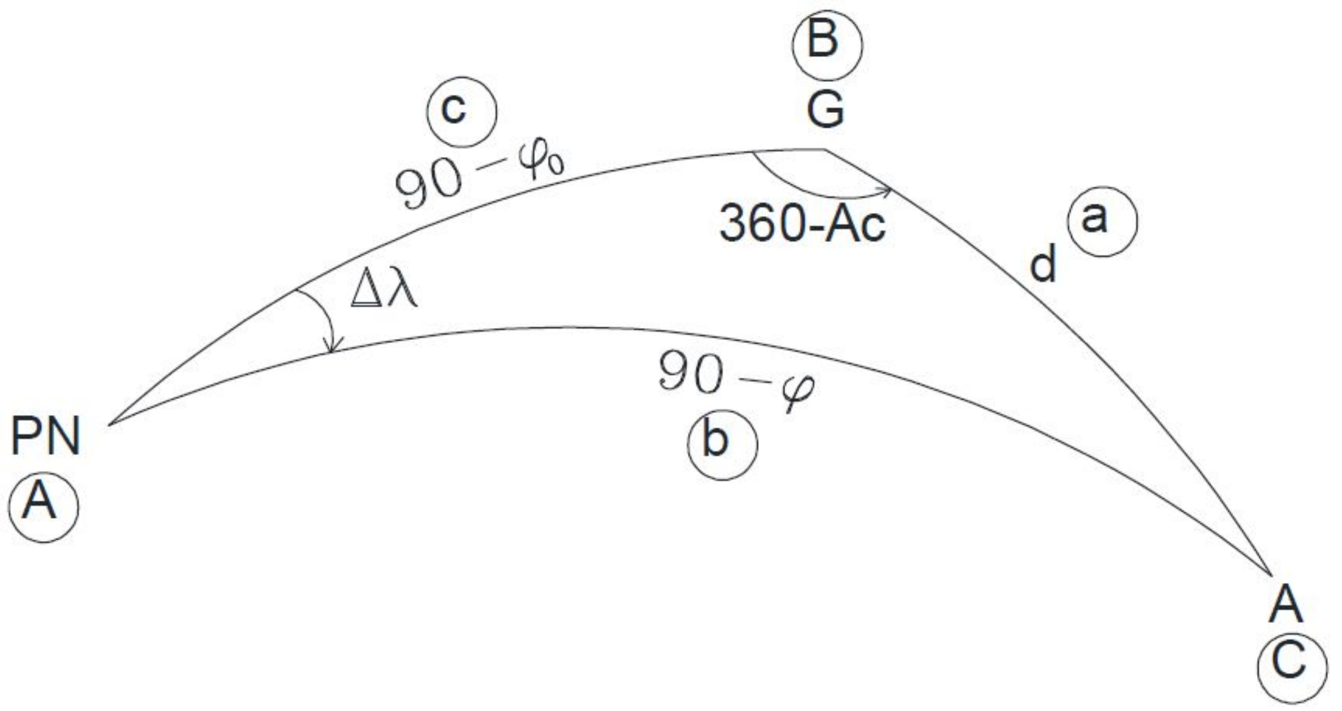
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \text{ y } \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



Recordemos este juego de fórmulas vistos en trigonometría esférica:

$$1 - \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$2 - \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$3 - \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$$

$$4 - \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

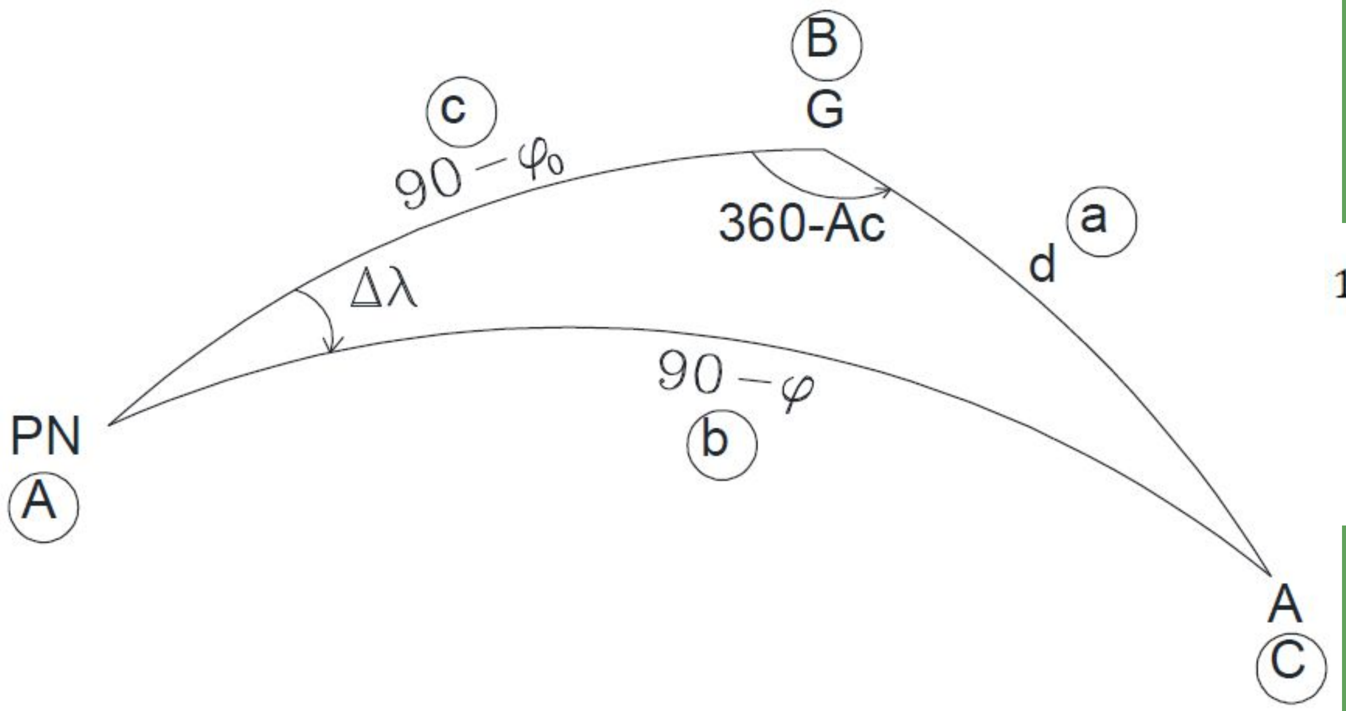
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \text{ y } \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



Aplicando 1, 2 y 4 a nuestro triángulo esférico:

$$1 - \frac{\sin d}{\sin \Delta\lambda} = \frac{\sin(90-\varphi)}{\sin(360-Ac)} \Rightarrow \sin d \sin(360-Ac) = \sin \Delta\lambda \cos\varphi$$

$$2 - \cos d = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda$$

$$4 - \sin d \cos Ac = \sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos\Delta\lambda$$

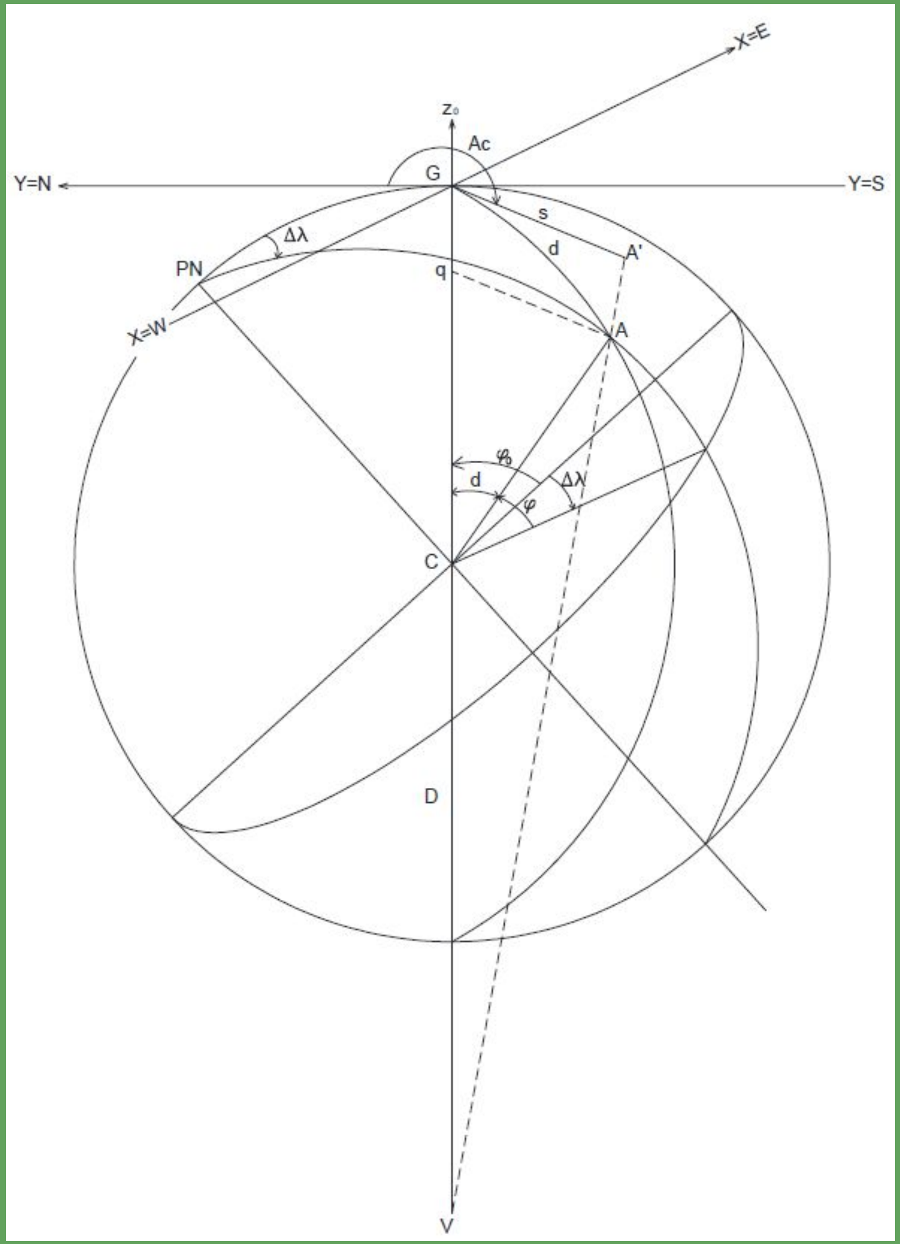
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

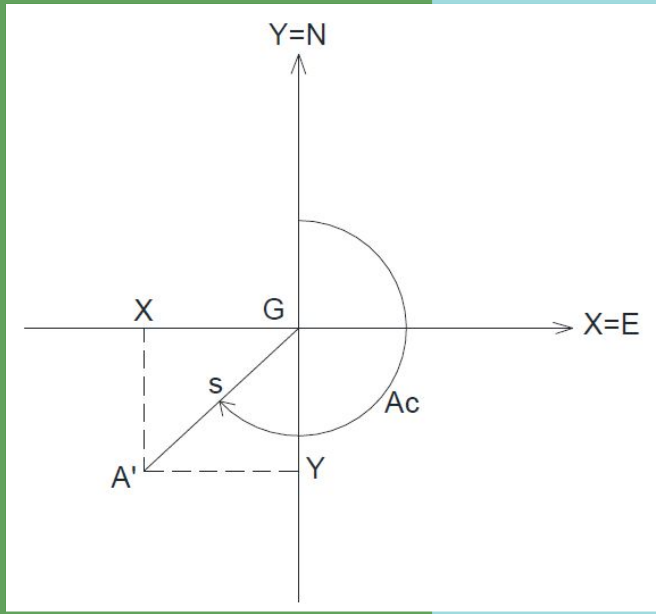
$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



Calculemos las coordenadas planas o cartesianas de A.



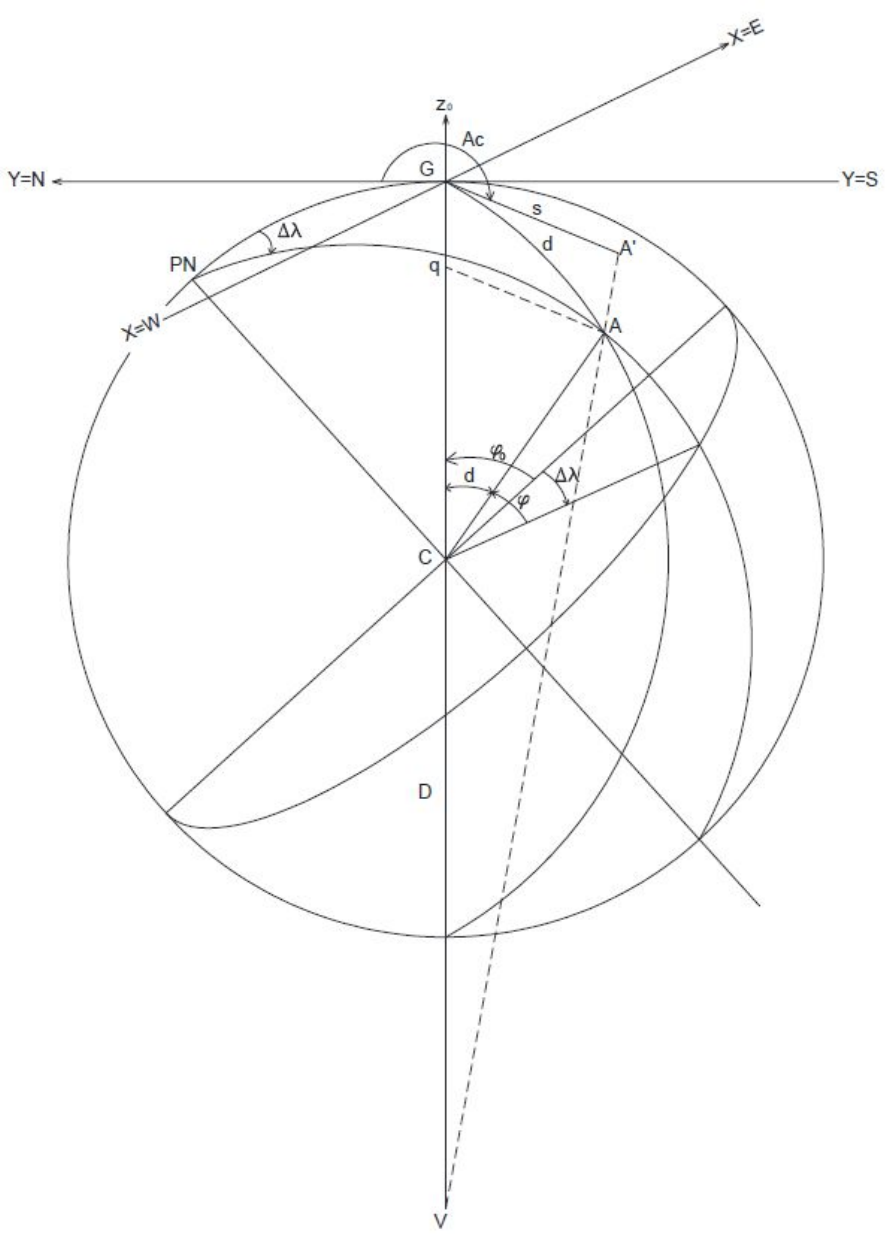
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

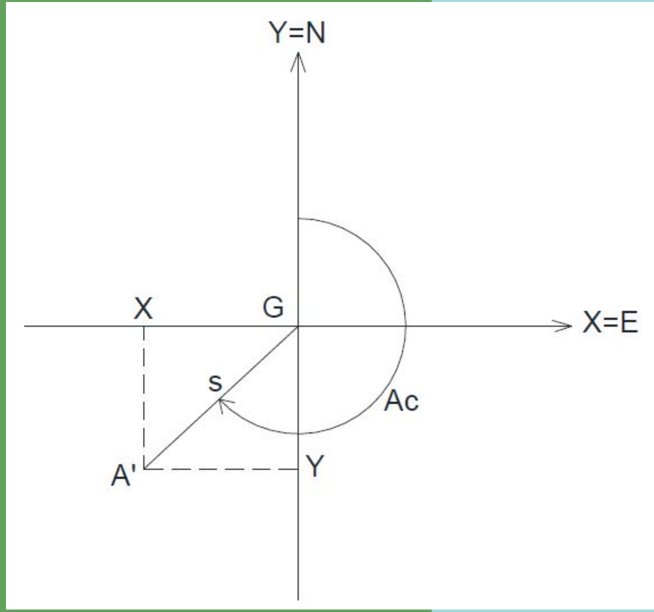
$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



Calculemos las coordenadas planas o cartesianas de A.



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

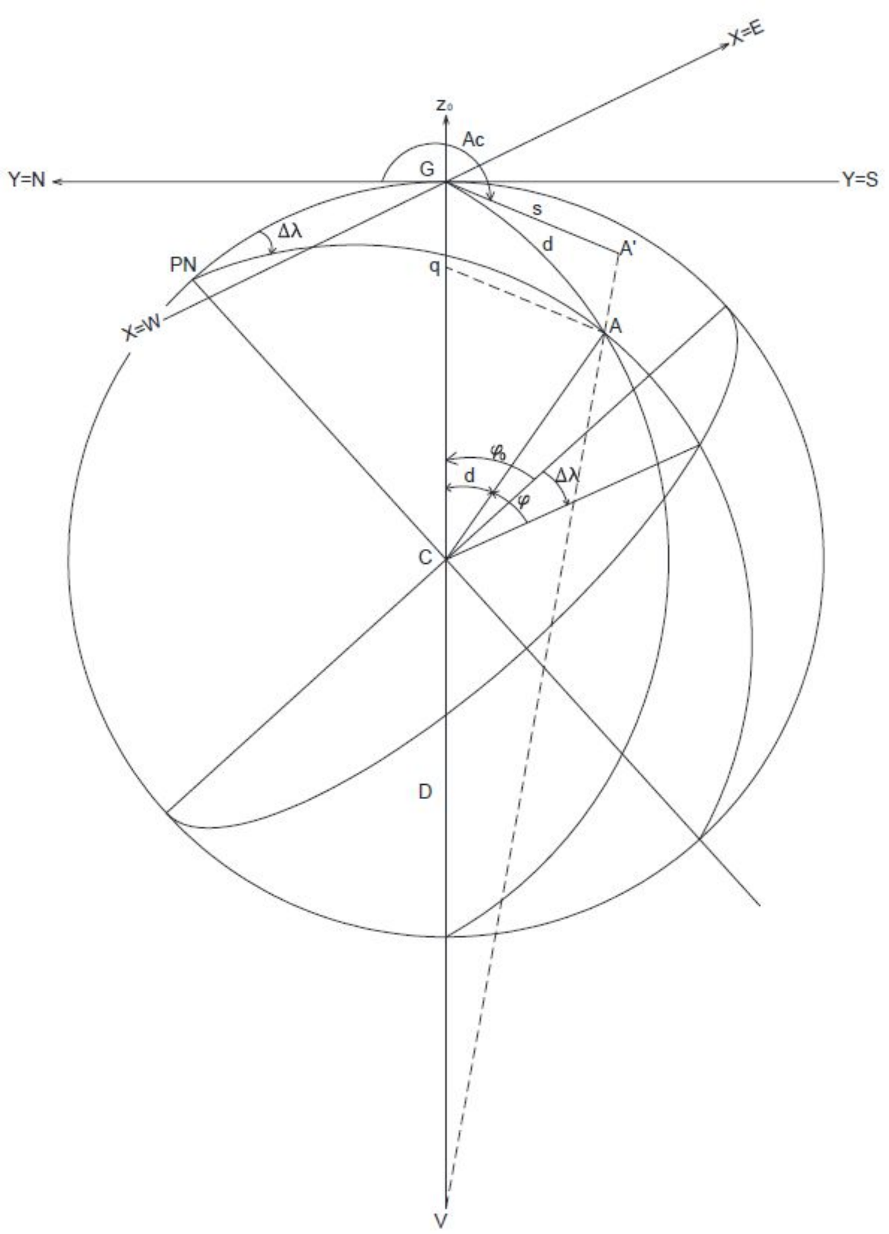
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

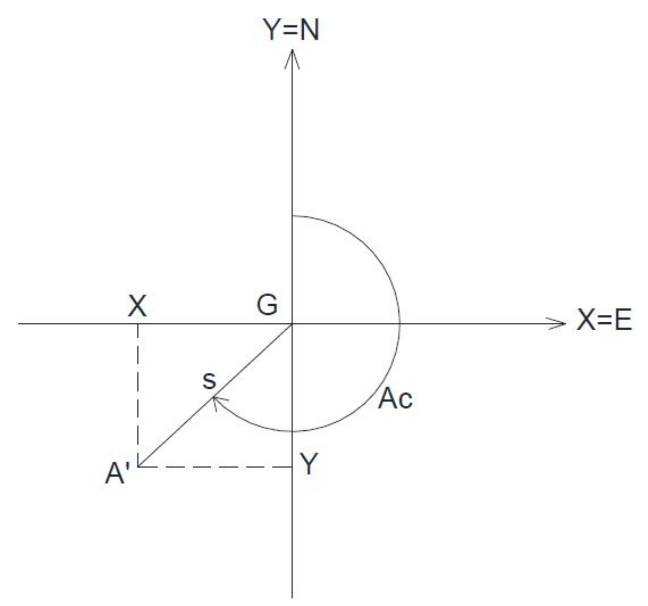
$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \ y \ \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



Calculemos las coordenadas planas o cartesianas de A.



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Hay que calcular *s*.

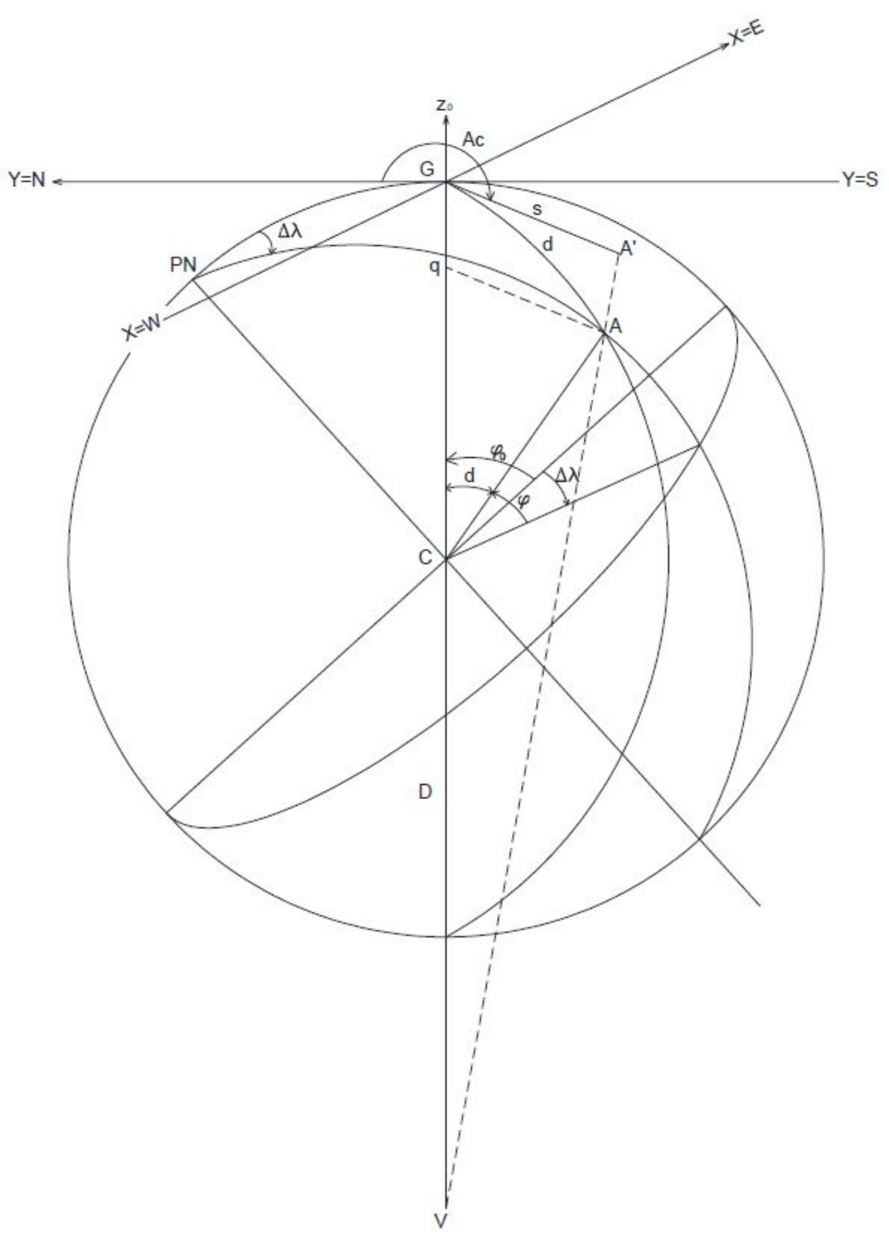
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

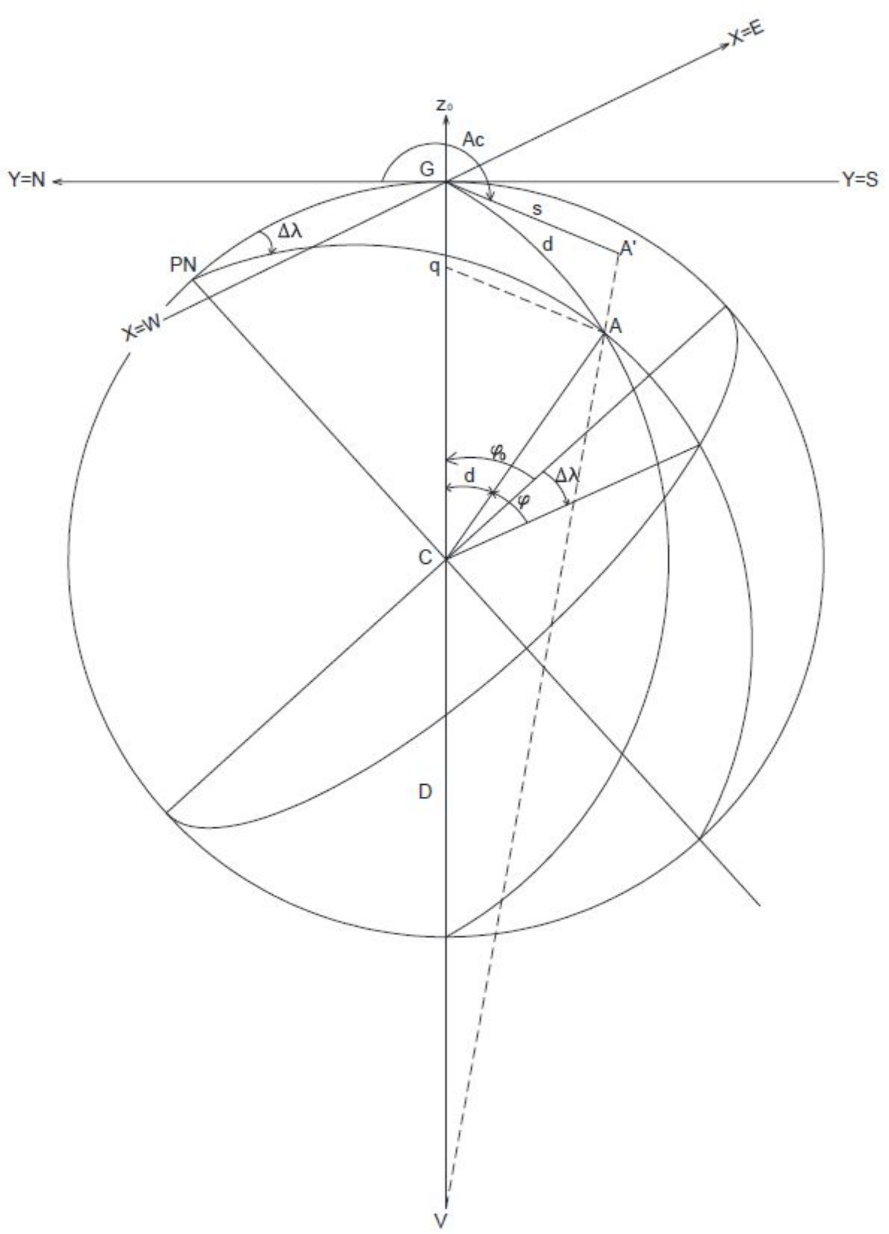
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

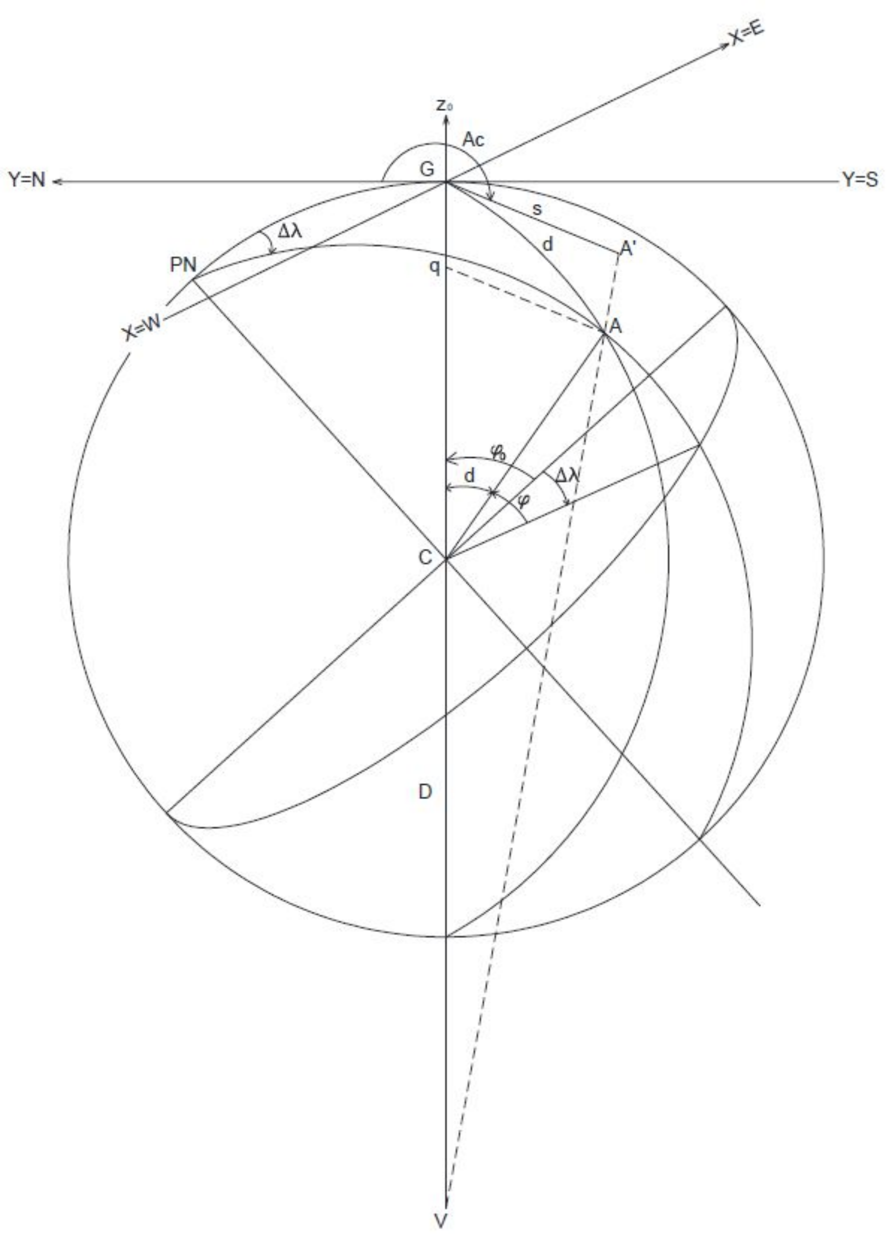
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

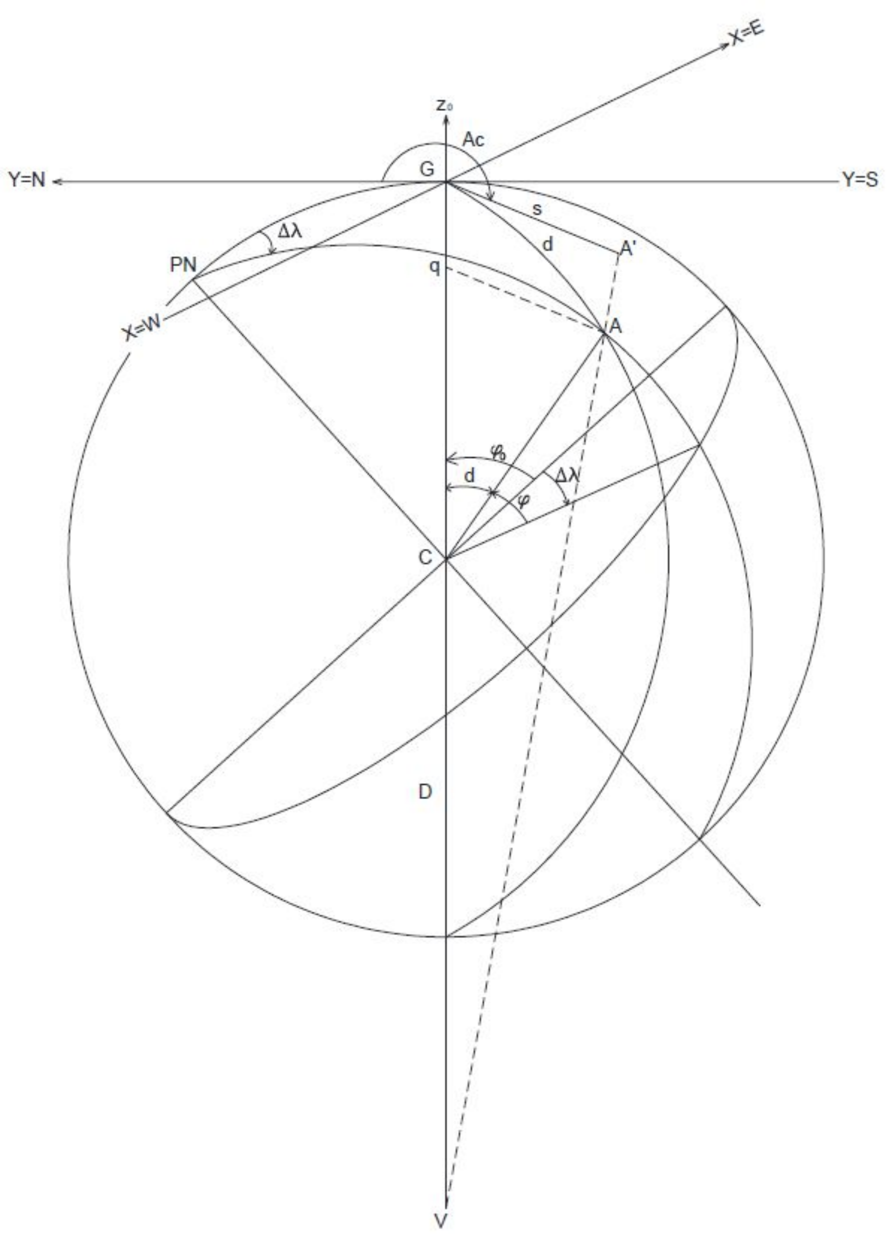
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \ y \ \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

$$s = GA' = \frac{\sin d\,(D+1)}{D + \cos d}$$

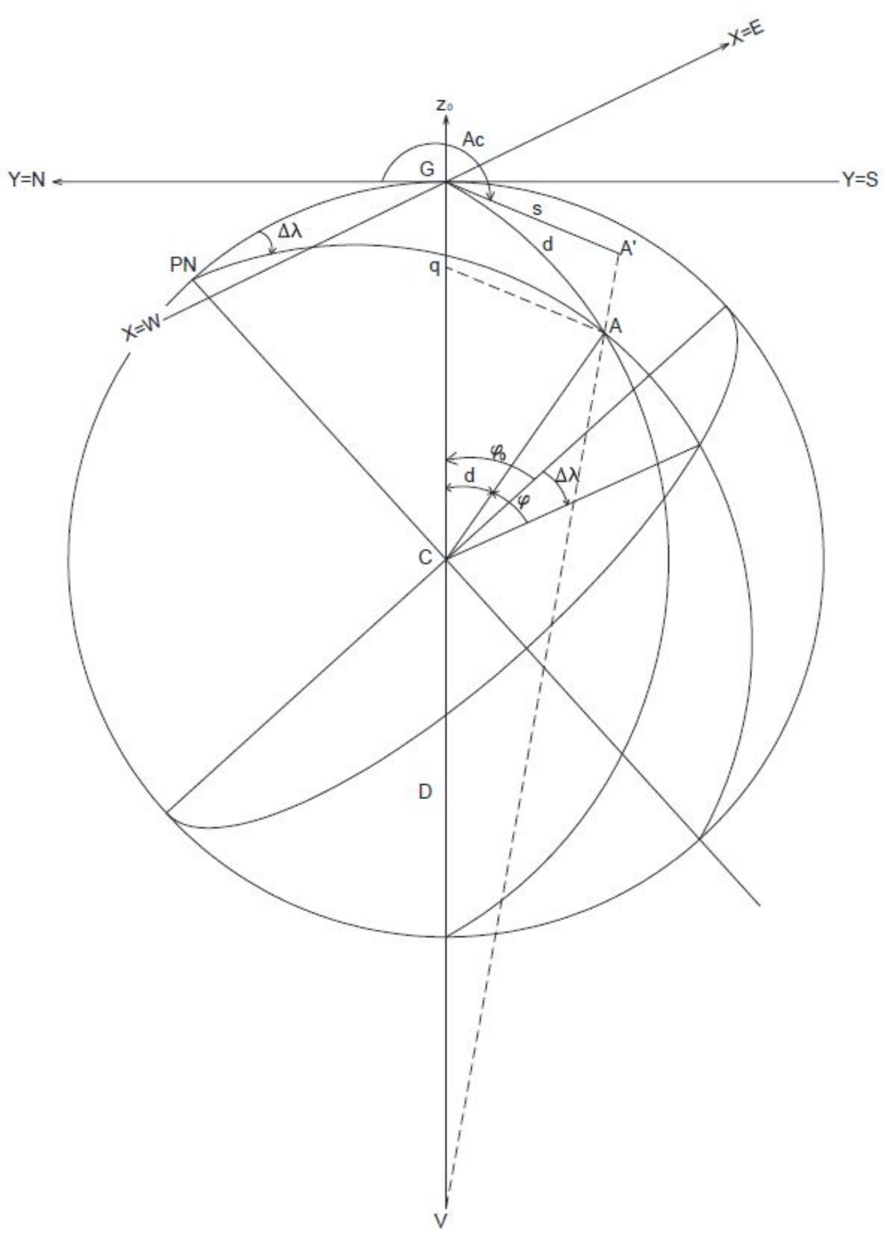
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

$$s = GA' = \frac{\sin d\,(D+1)}{D + \cos d}$$

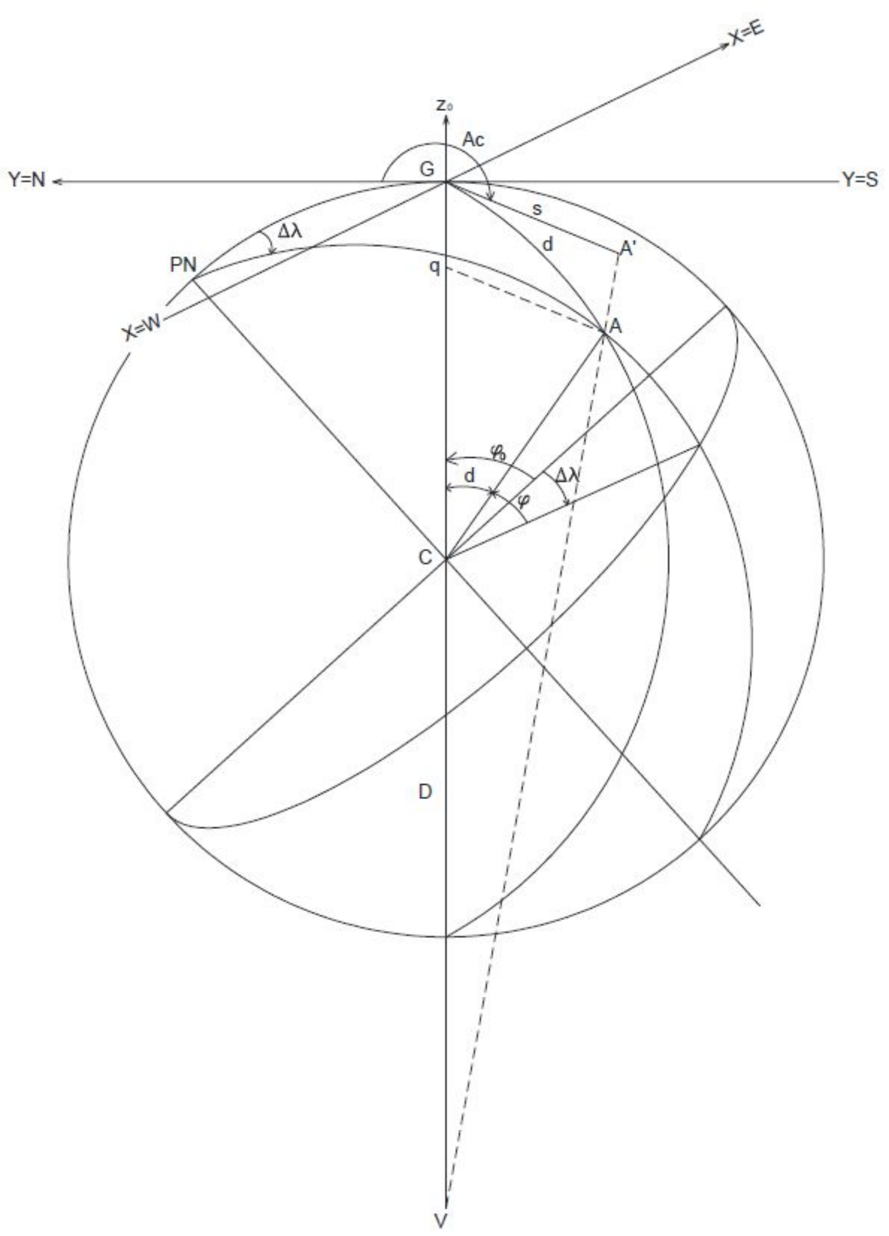
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

$$s = GA' = \frac{\sin d \,(D + 1)}{D + \cos d}$$

$$X = s \sin Ac = \frac{\sin d \,(D + 1)}{D + \cos d} \sin Ac$$

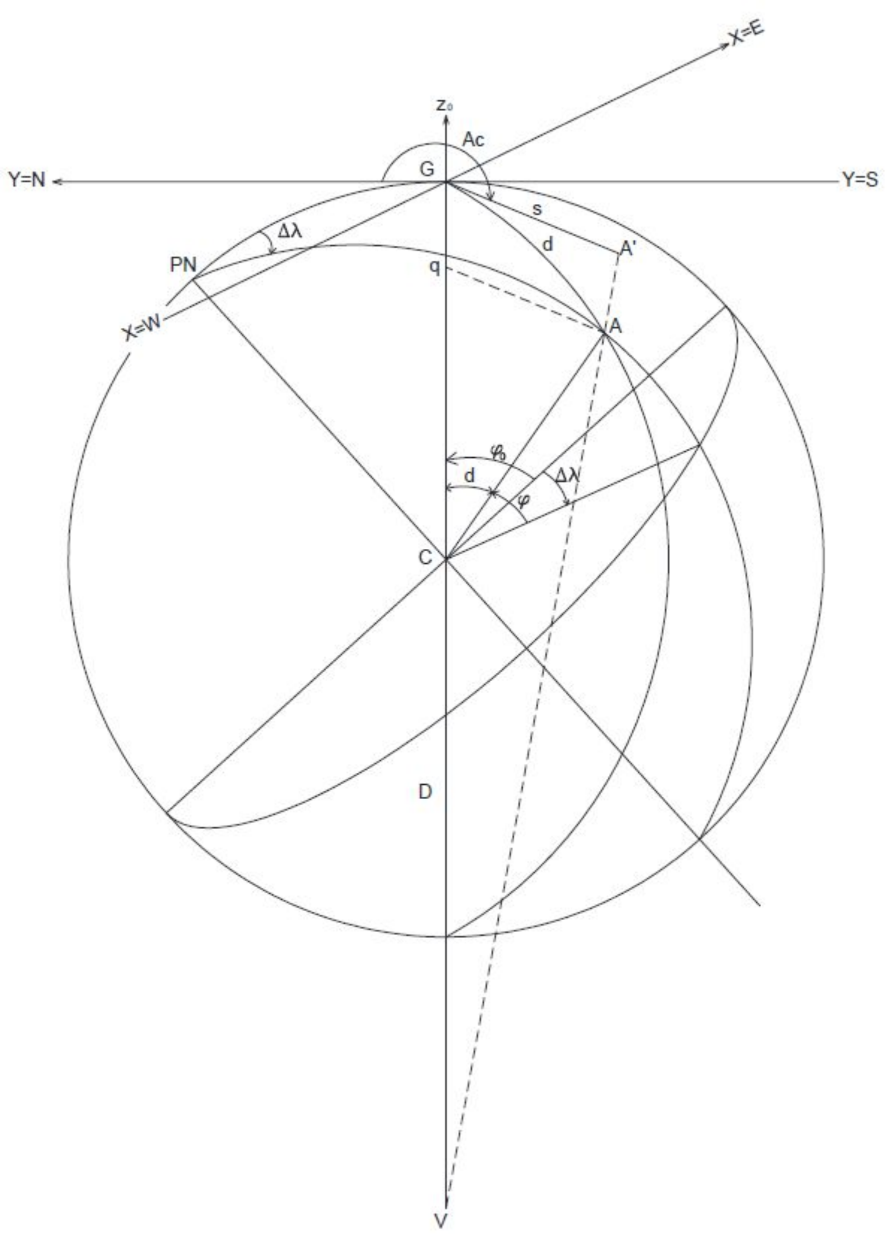
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

$$s = GA' = \frac{\sin d \, (D+1)}{D + \cos d}$$

$$X = s \sin Ac = \frac{\sin d \, (D+1)}{D + \cos d} \sin Ac$$

$$X = \frac{(D+1) \sin \Delta\lambda \cos \varphi}{D + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$

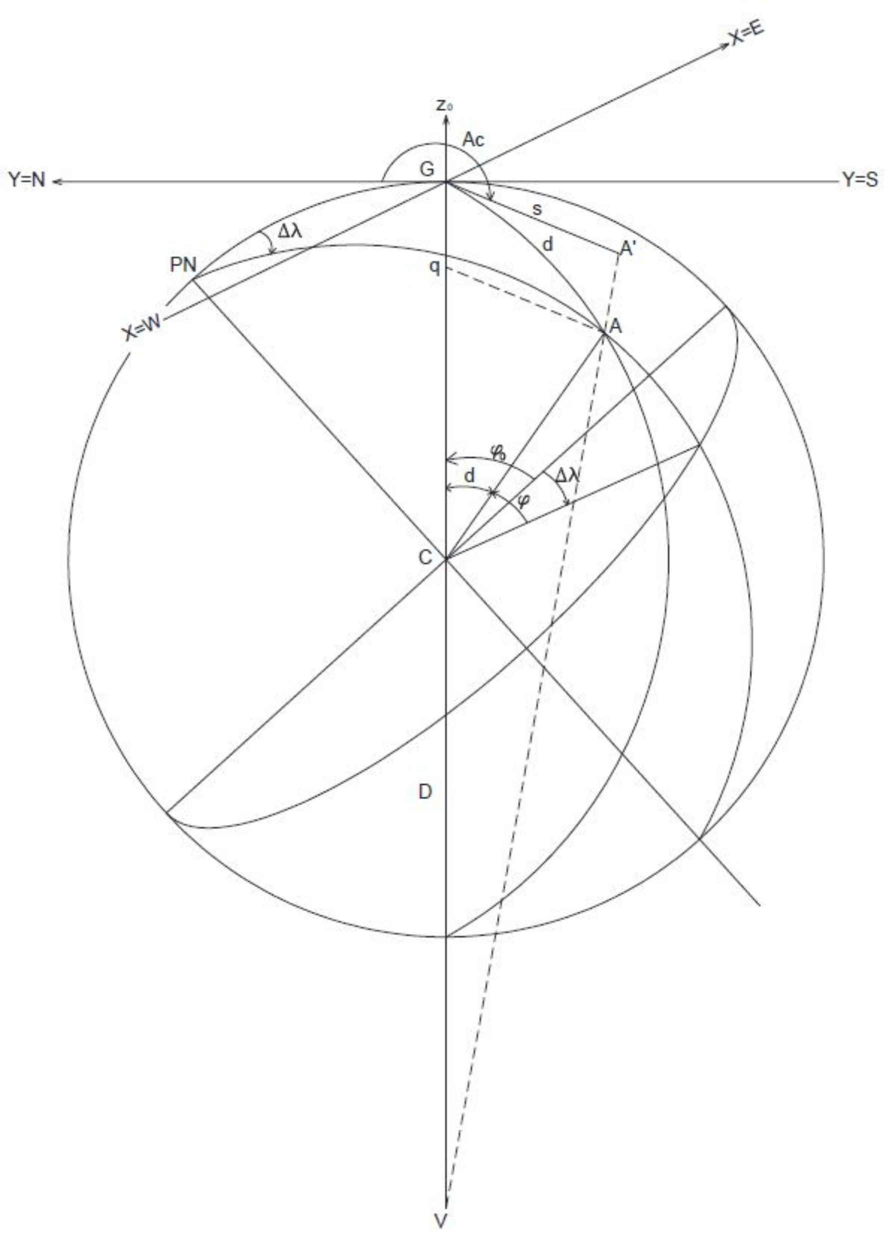
Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \ y \ \varphi_0 \neq \pm 90^o$$



$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Consideramos la semejanza de estos triángulos: VGA' y Vqa

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

$$s = GA' = \frac{\sin d\,(D + 1)}{D + \cos d}$$

$$Y = s \cos Ac = \frac{\sin d(D + 1)}{D + \cos d} \cos Ac$$

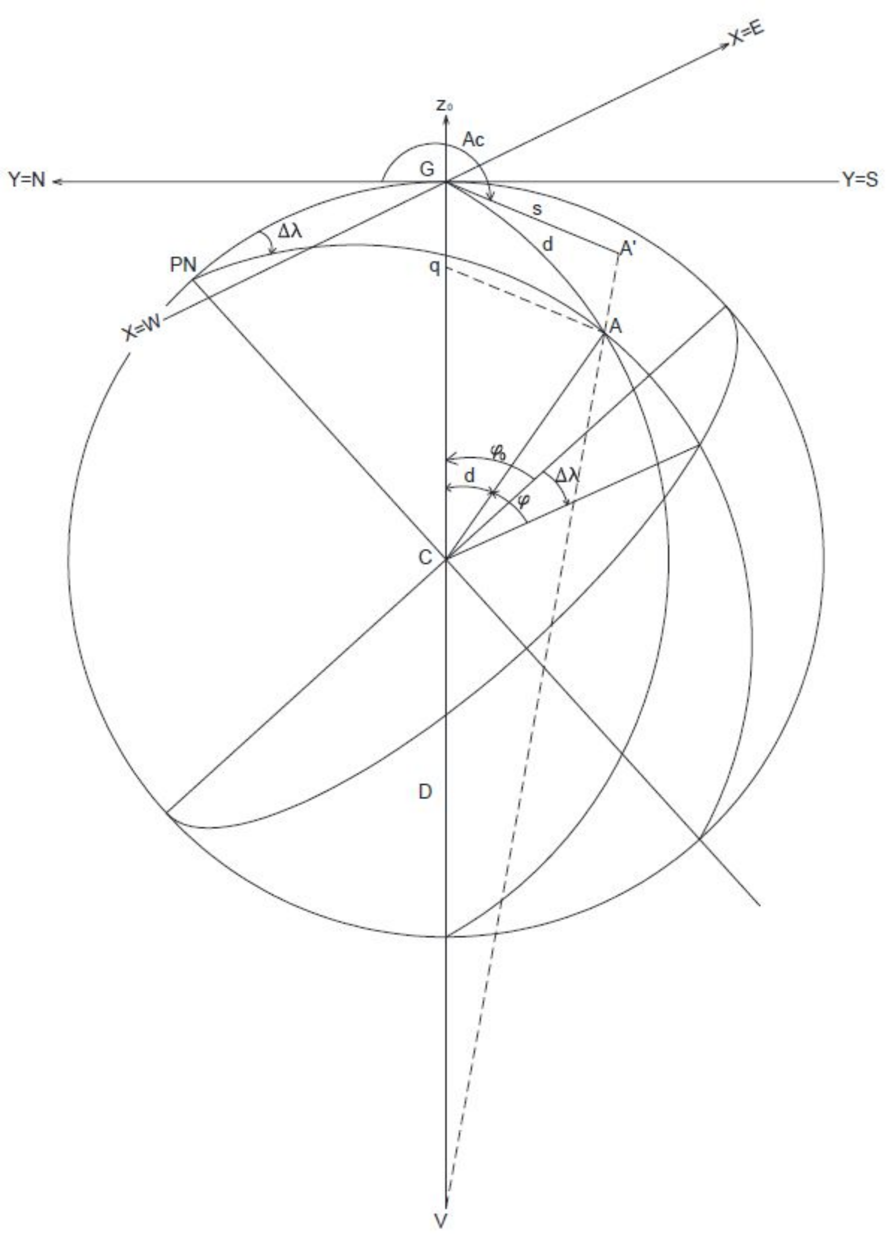
$$Y = \frac{(D + 1)(\sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos\Delta\lambda)}{D + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Modo polar $\varphi_0 = \pm 90^o$



Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 90°:

$$X = \frac{(D+1)\sin\Delta\lambda\cos\varphi}{D+\sin\varphi}$$

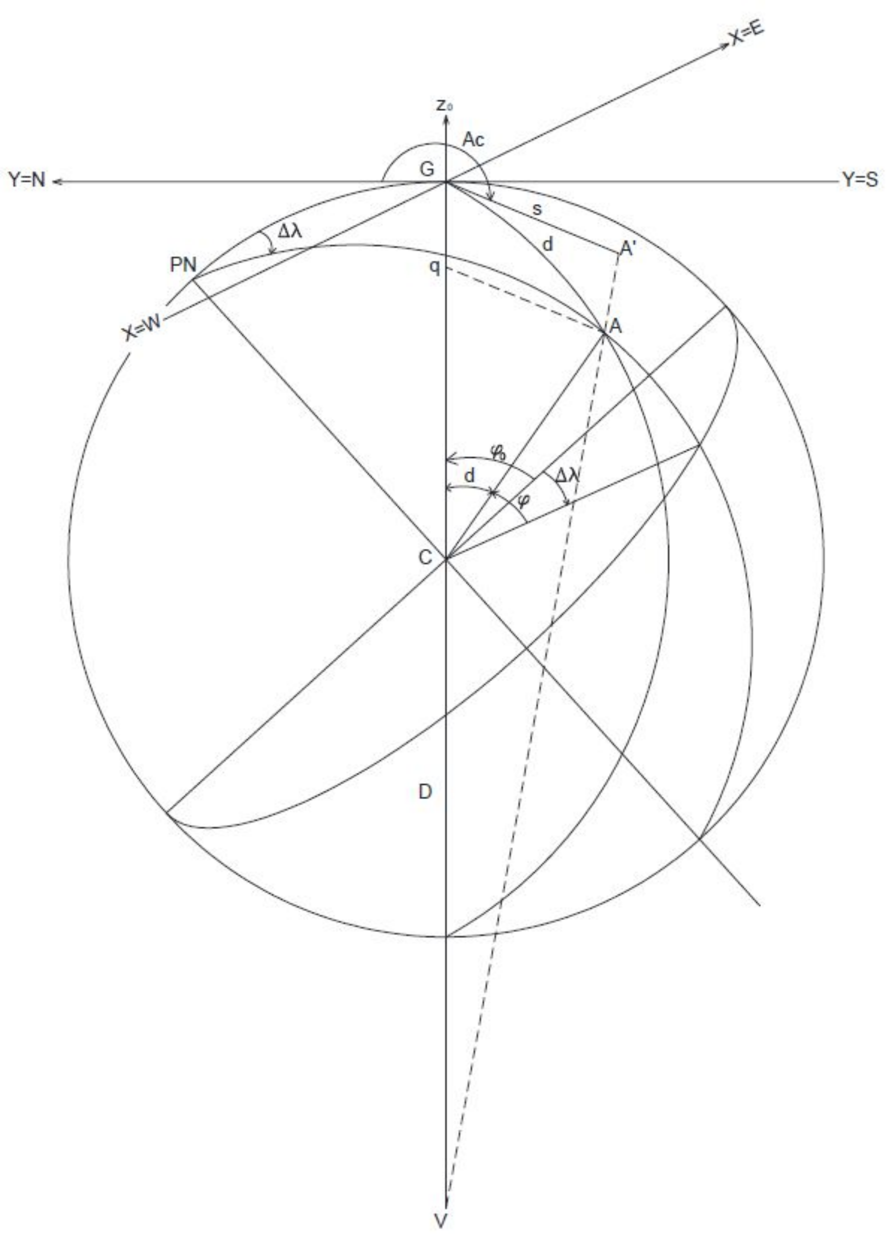
$$Y = \frac{-(D+1)\cos\varphi\cos\Delta\lambda}{D+\sin\varphi}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección Escenográfica

$$1 < D < \infty$$

Modo ecuatorial $\varphi_0 = 0^o$

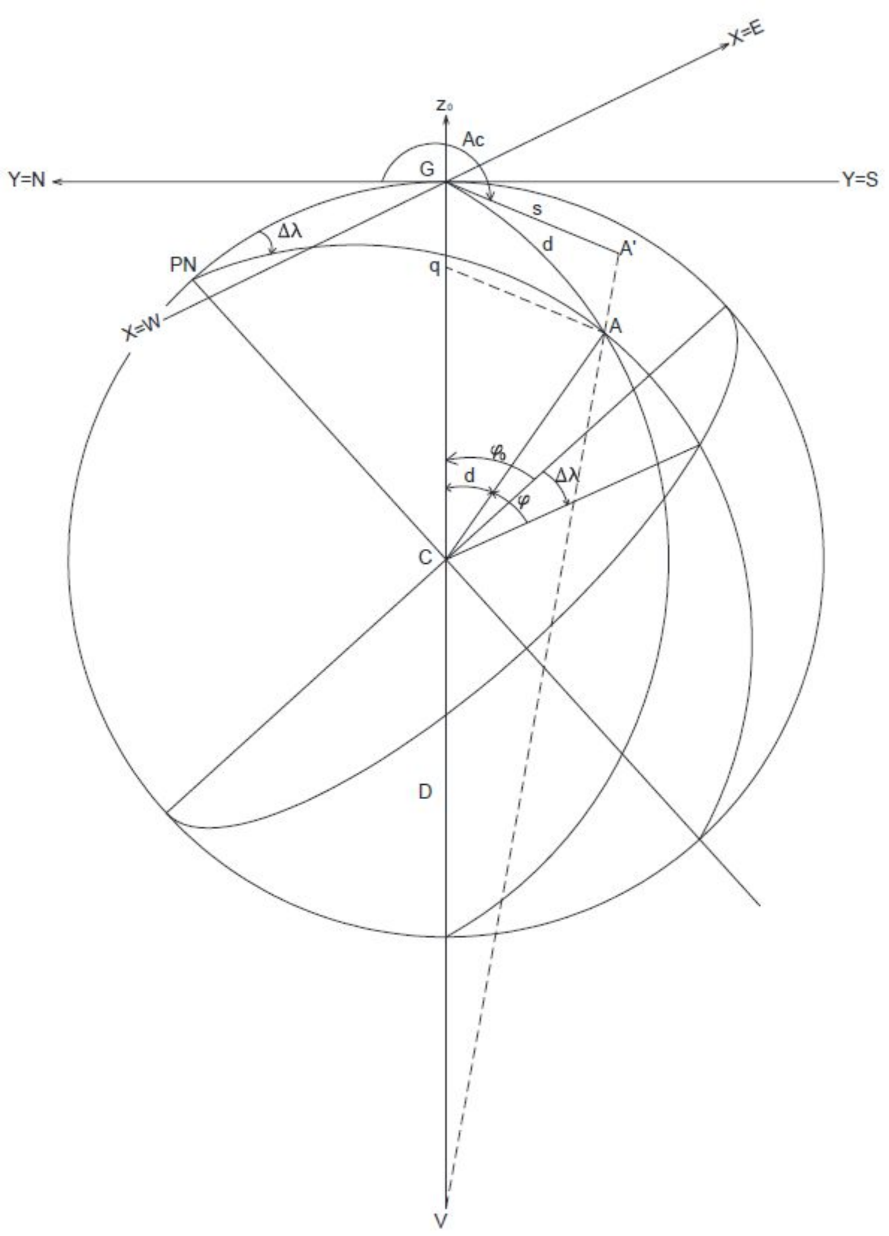


Sustituímos en las expresiones de X y de Y φ_0 por 0°:

$$X = \frac{(D+1)\sin\Delta\lambda\cos\varphi}{D+\cos\varphi\cos\Delta\lambda}$$

$$Y = \frac{(D+1)\sin\varphi}{D+\cos\varphi\cos\Delta\lambda}$$

Proyecciones planas perspectivas



Proyección central o gnómica

El vértice V se encuentra en el centro C de la Tierra.

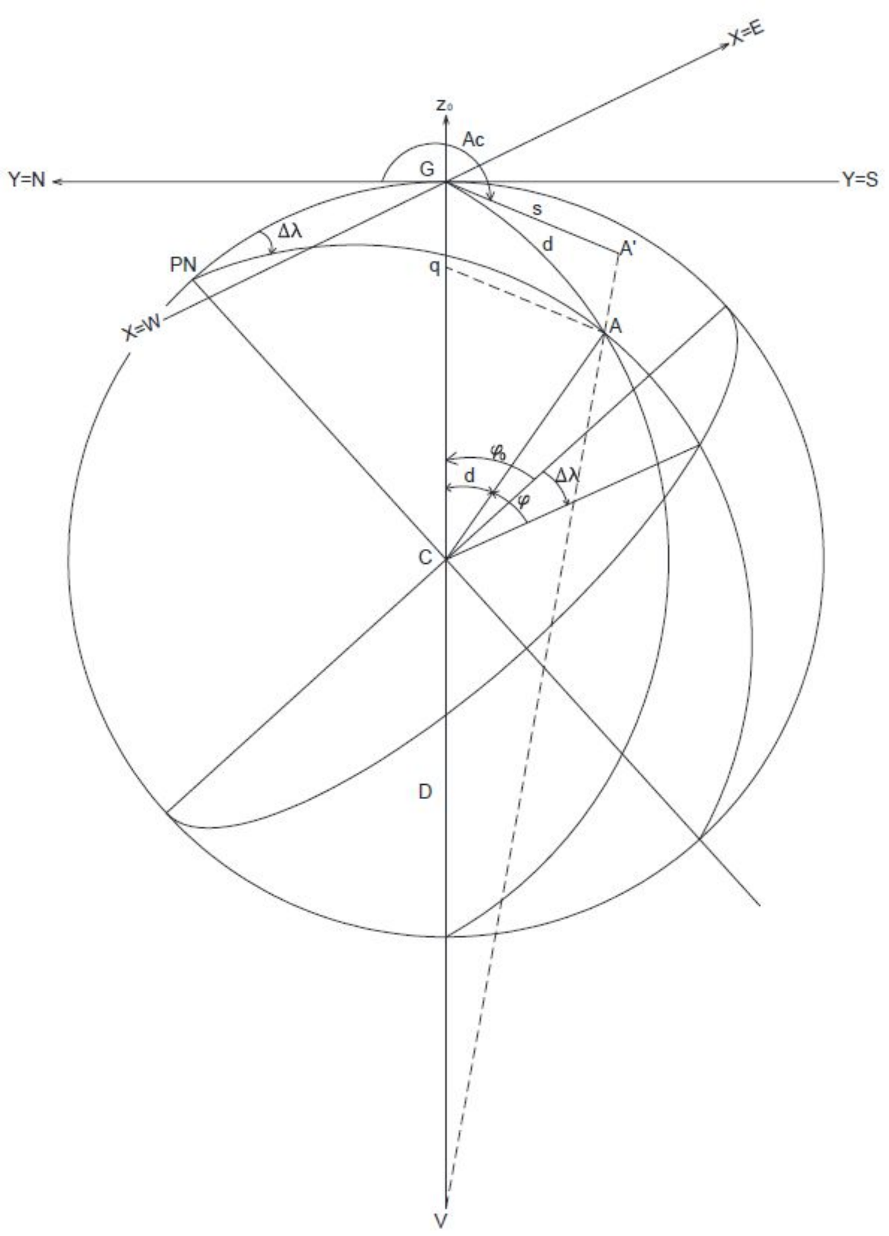
$D=0$

Acimutal u oblicua

$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección central o gnómica



El vértice V se encuentra en el centro C de la Tierra.

$D=0$

Acimutal u oblicua

$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$

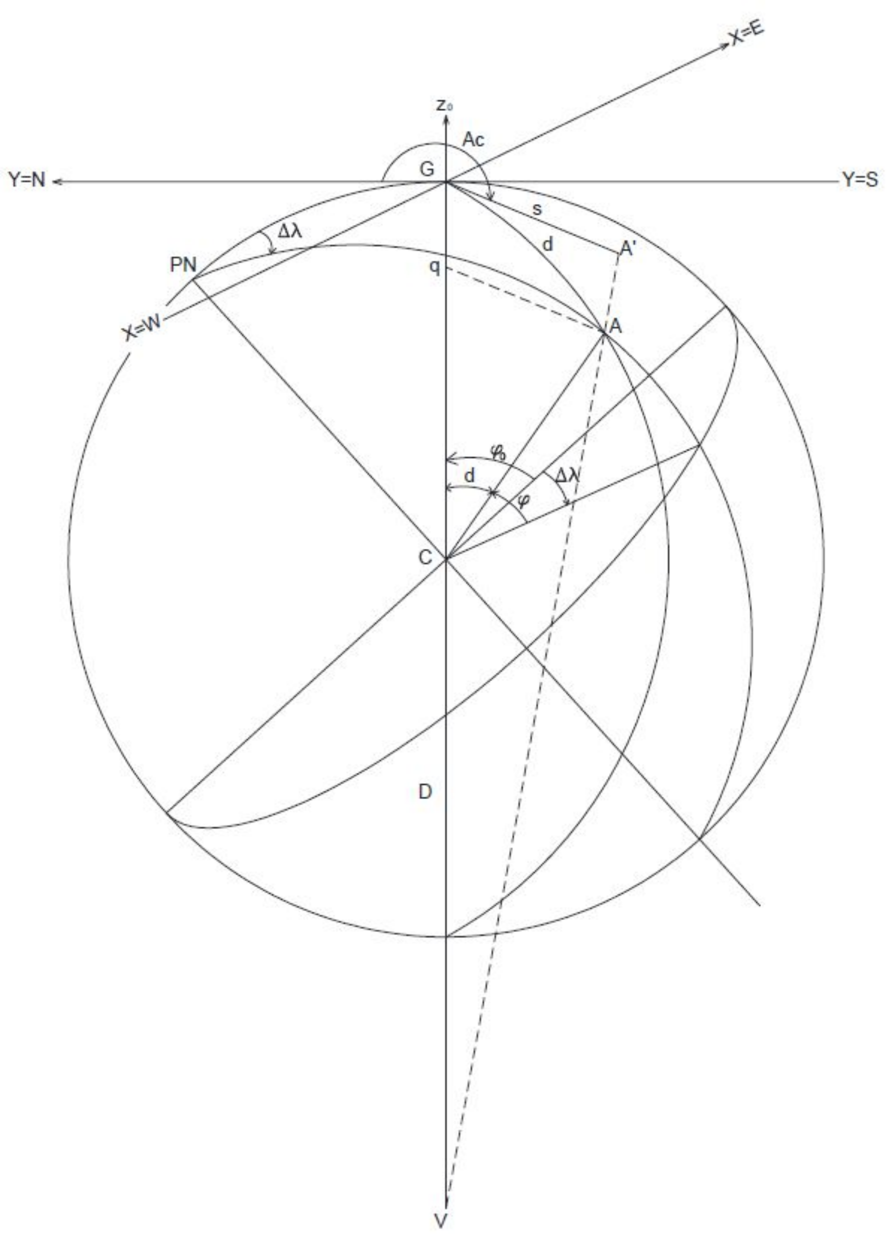
Sustituímos en las expresiones generales de *X* y de *Y* a D por 0:

$$X = \frac{\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda}$$

$$Y = \frac{\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda}{\sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección central o gnómica



El vértice V se encuentra en el centro C de la Tierra.

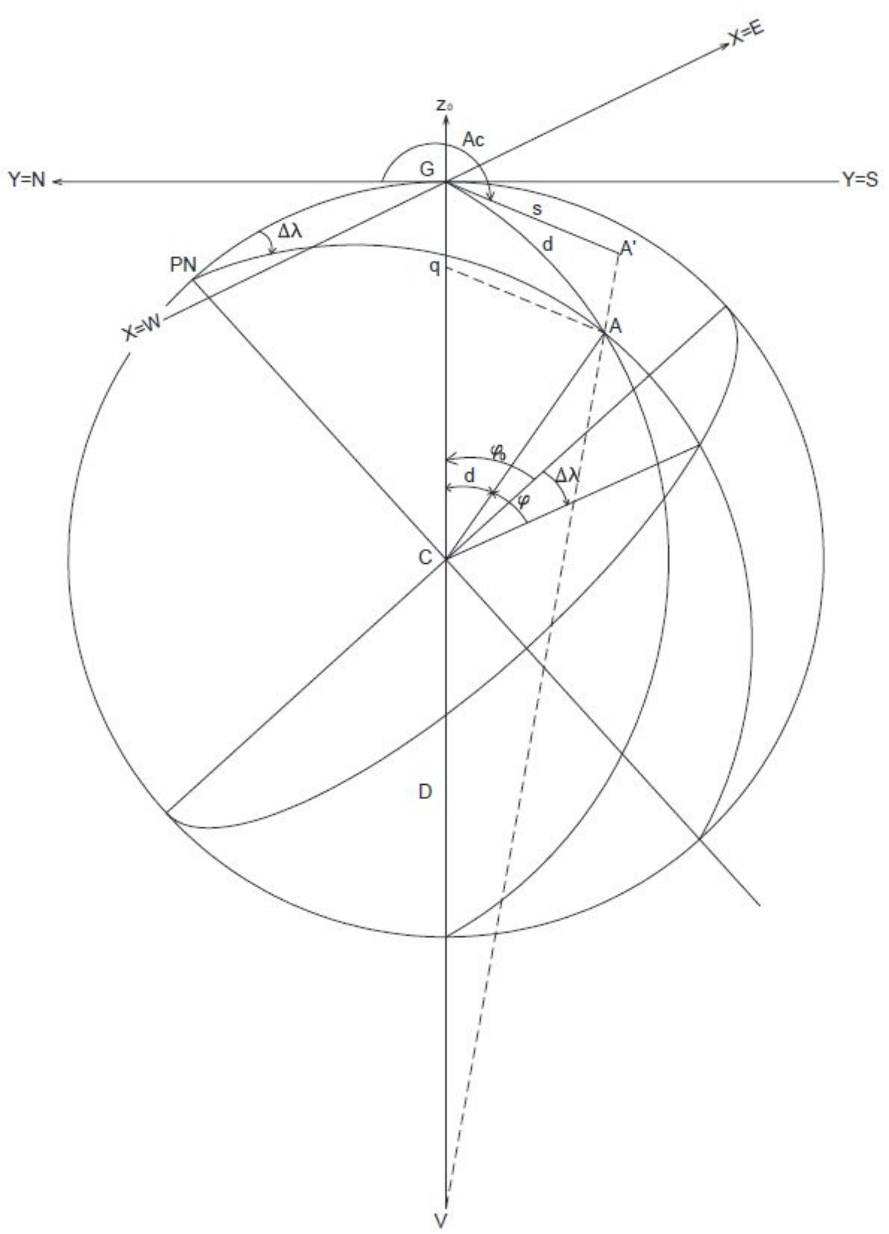
$D=0$

Modo polar

$\varphi_0 = \pm 90^o$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección central o gnómica



El vértice V se encuentra en el centro C de la Tierra.

$D=0$

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

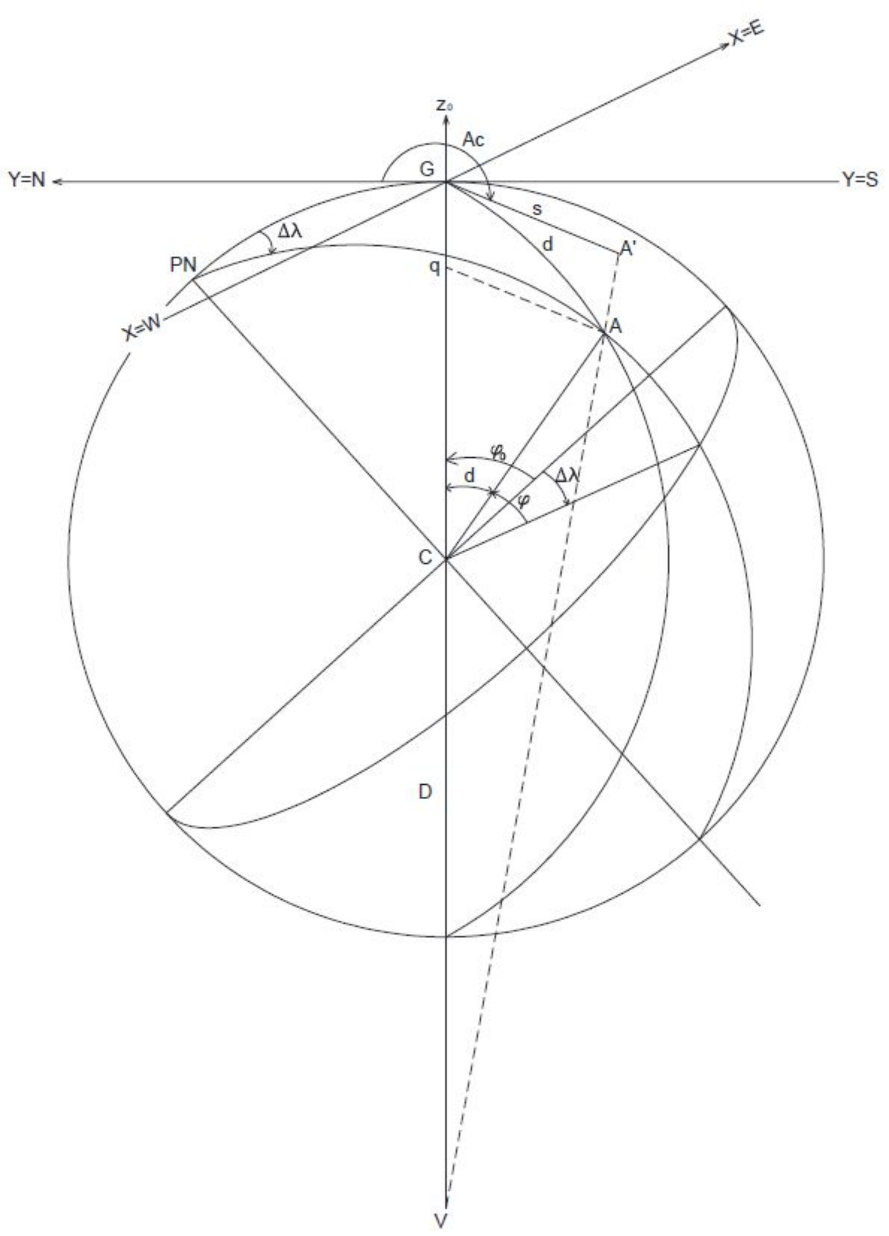
Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 90°:

$$X = \frac{\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{\sin\varphi} = \cot\varphi \sin\Delta\lambda$$

$$Y = \frac{-\cos\varphi \cos\Delta\lambda}{\sin\varphi} = -\cot\varphi \cos\Delta\lambda$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección central o gnómica



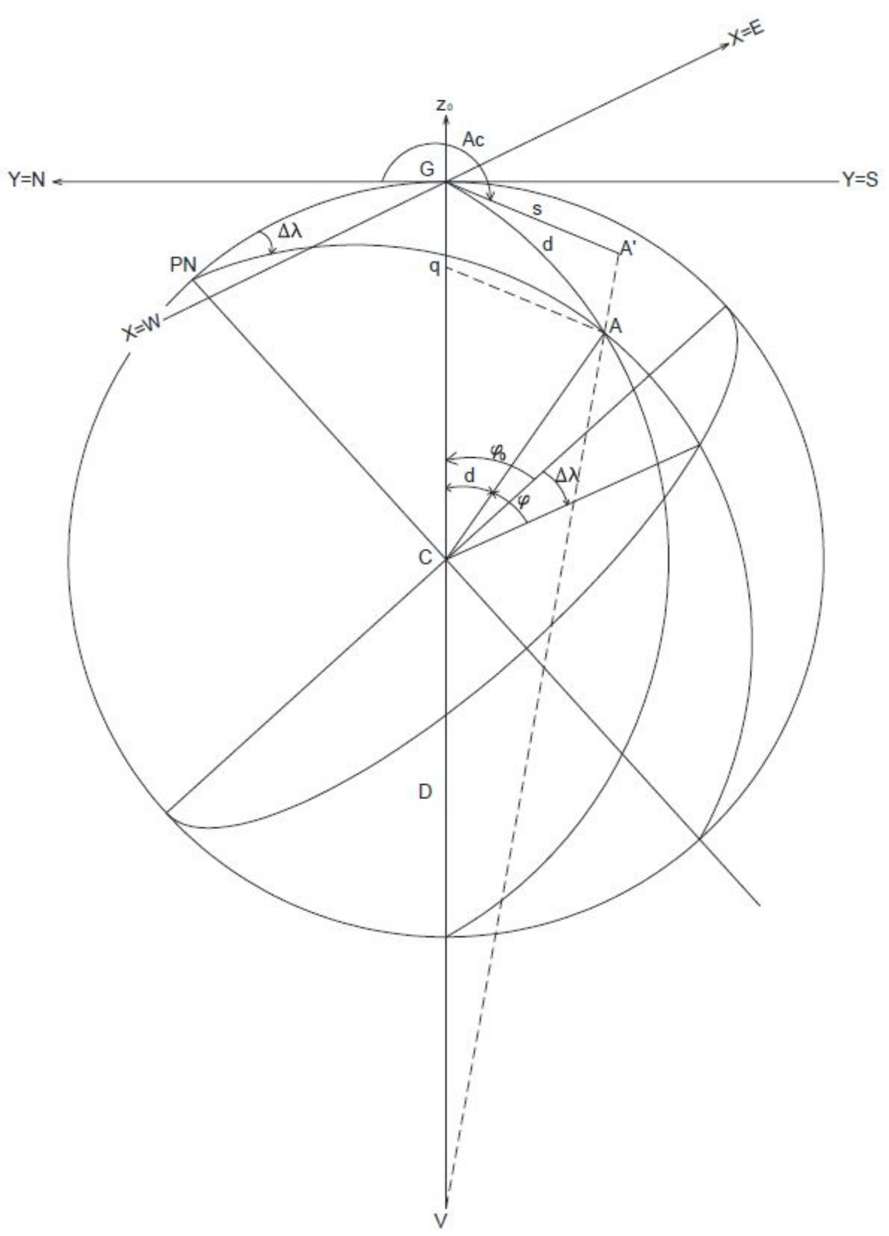
El vértice V se encuentra en el centro C de la Tierra.

$D=0$

Modo ecuatorial

$\varphi_0 = 0^o$

Proyecciones planas perspectivas



Proyección central o gnómica

El vértice V se encuentra en el centro C de la Tierra.

$D=0$

Modo ecuatorial

$\varphi_0 = 0^o$

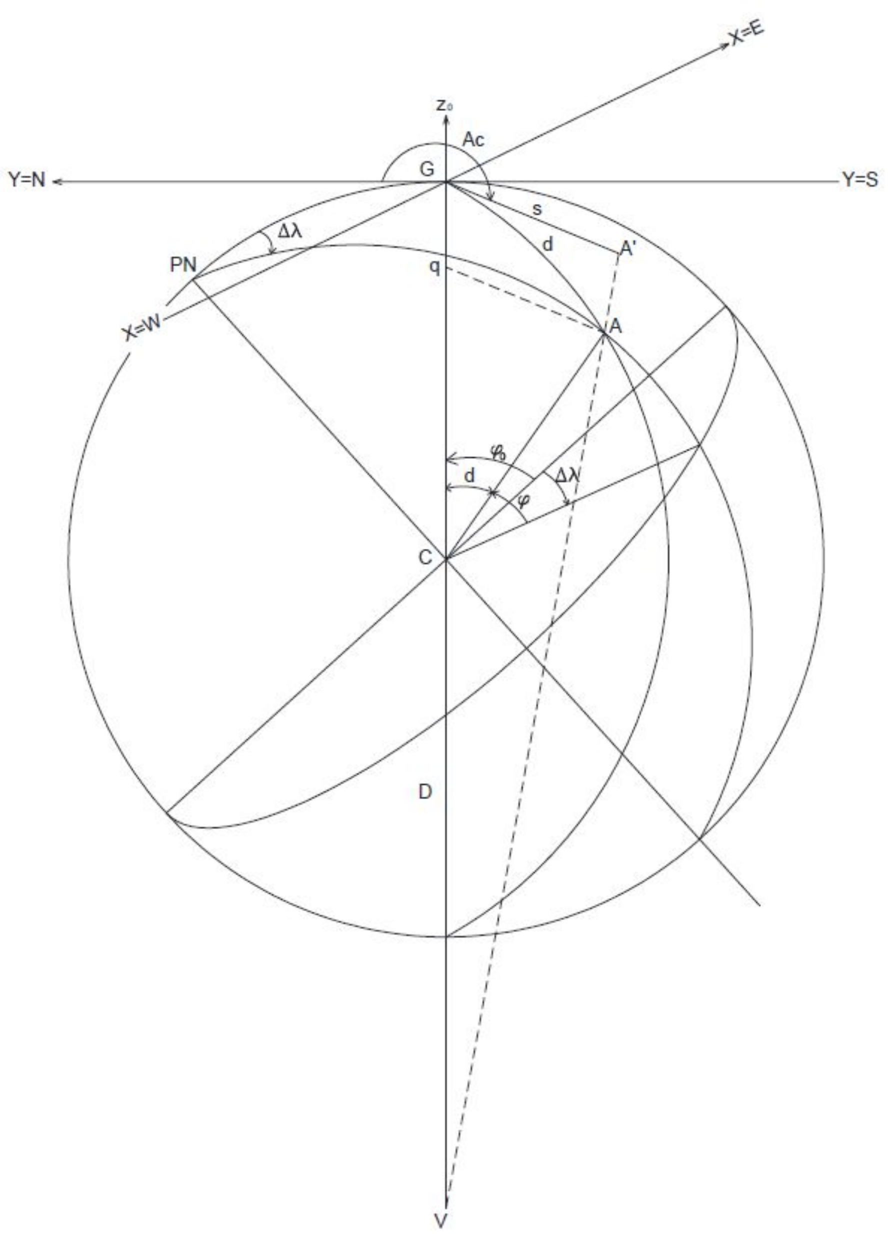
Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 0°:

$$X = \frac{\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{\cos\varphi \cos\Delta\lambda} = \tan\Delta\lambda$$

$$Y = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi \cos\Delta\lambda} = \frac{\tan\varphi}{\cos\Delta\lambda}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



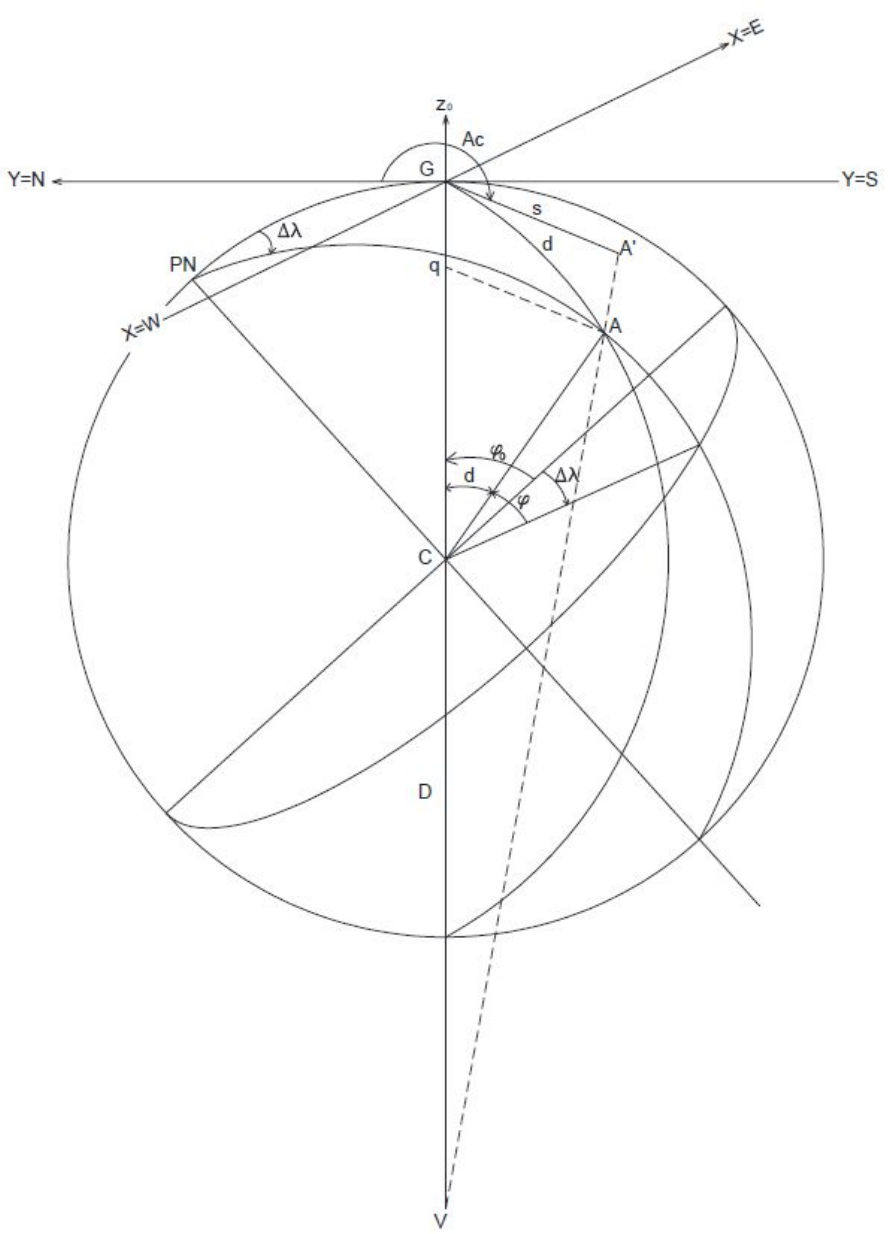
El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

D = 1

Acimutal u oblicua $\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

D = 1

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \text{ y } \varphi_0 \neq \pm 90^o$$

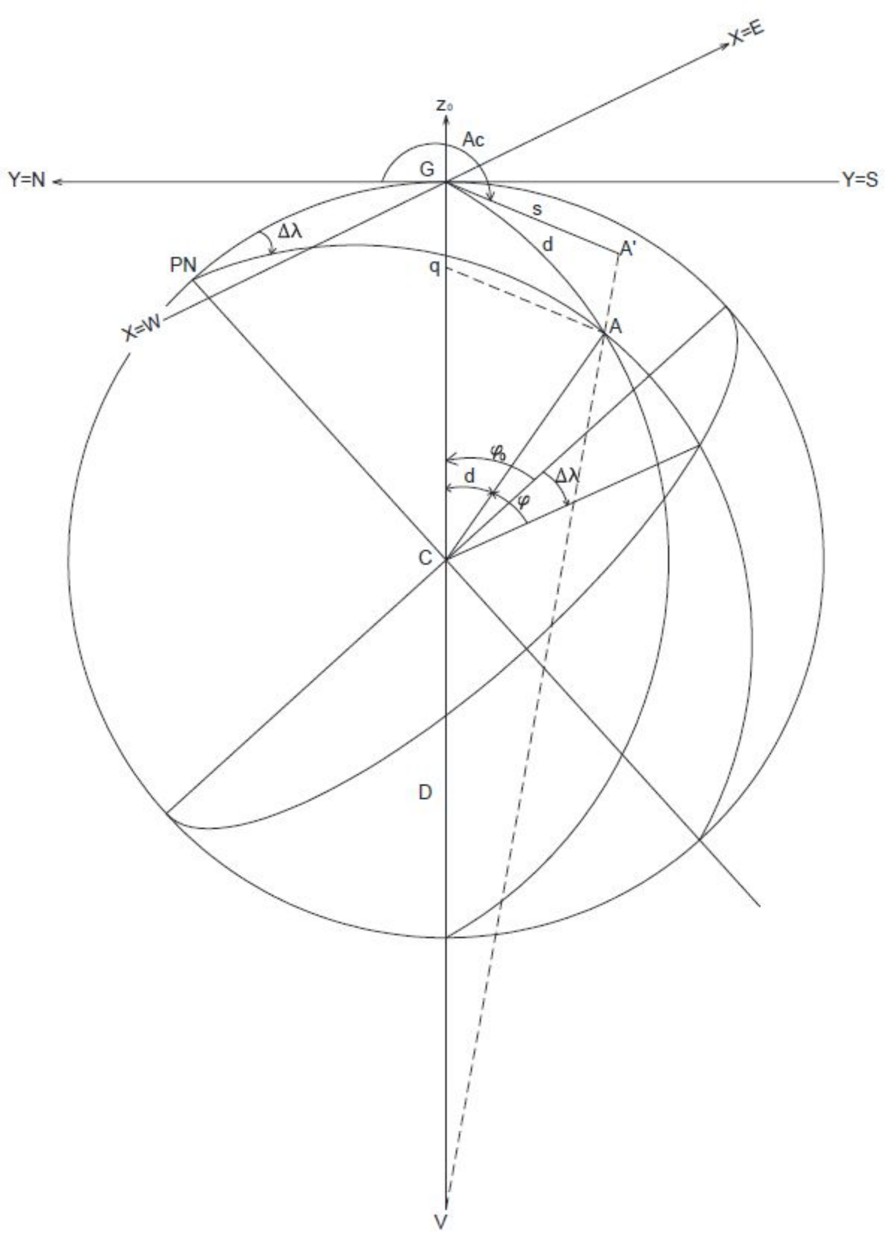
En las expresiones generales de *X* y de *Y* sustituimos D=1:

$$X = \frac{2\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda}$$

$$Y = \frac{2(\sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos\Delta\lambda)}{1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

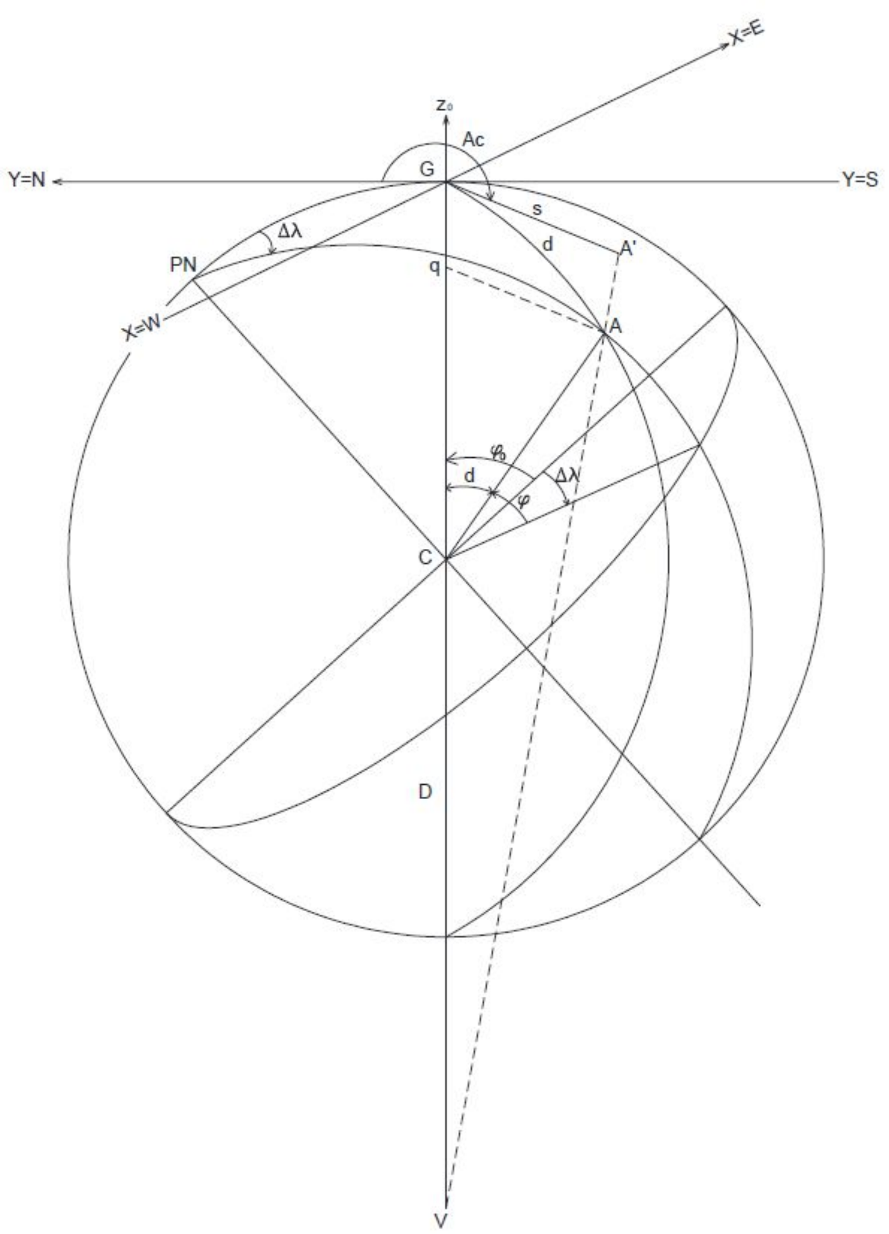
D = 1

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

D = 1

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

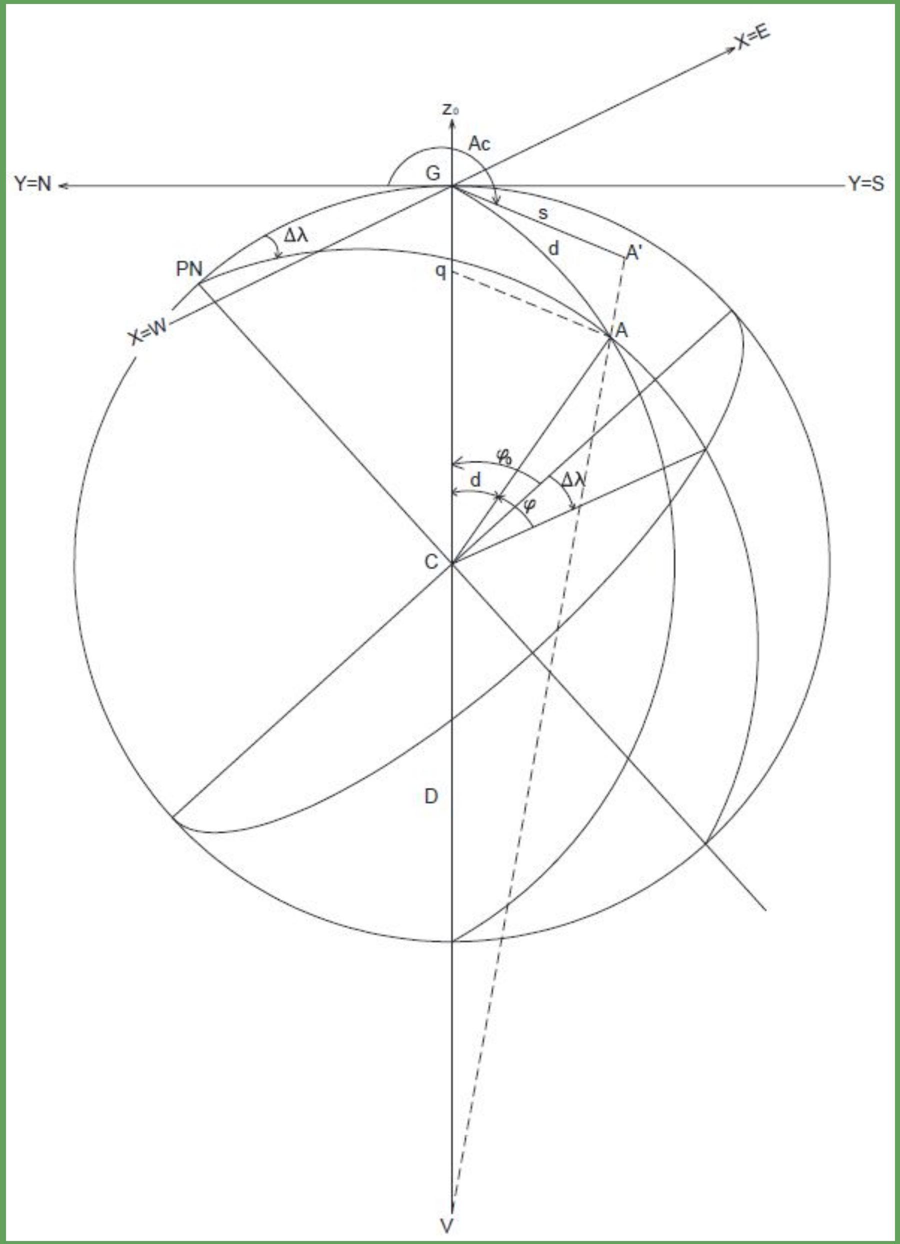
Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 90°:

$$X = \frac{2\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{1+\sin\varphi}$$

$$Y = \frac{-2\cos\varphi \cos\Delta\lambda}{1+\sin\varphi}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

D = 1

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 90°:

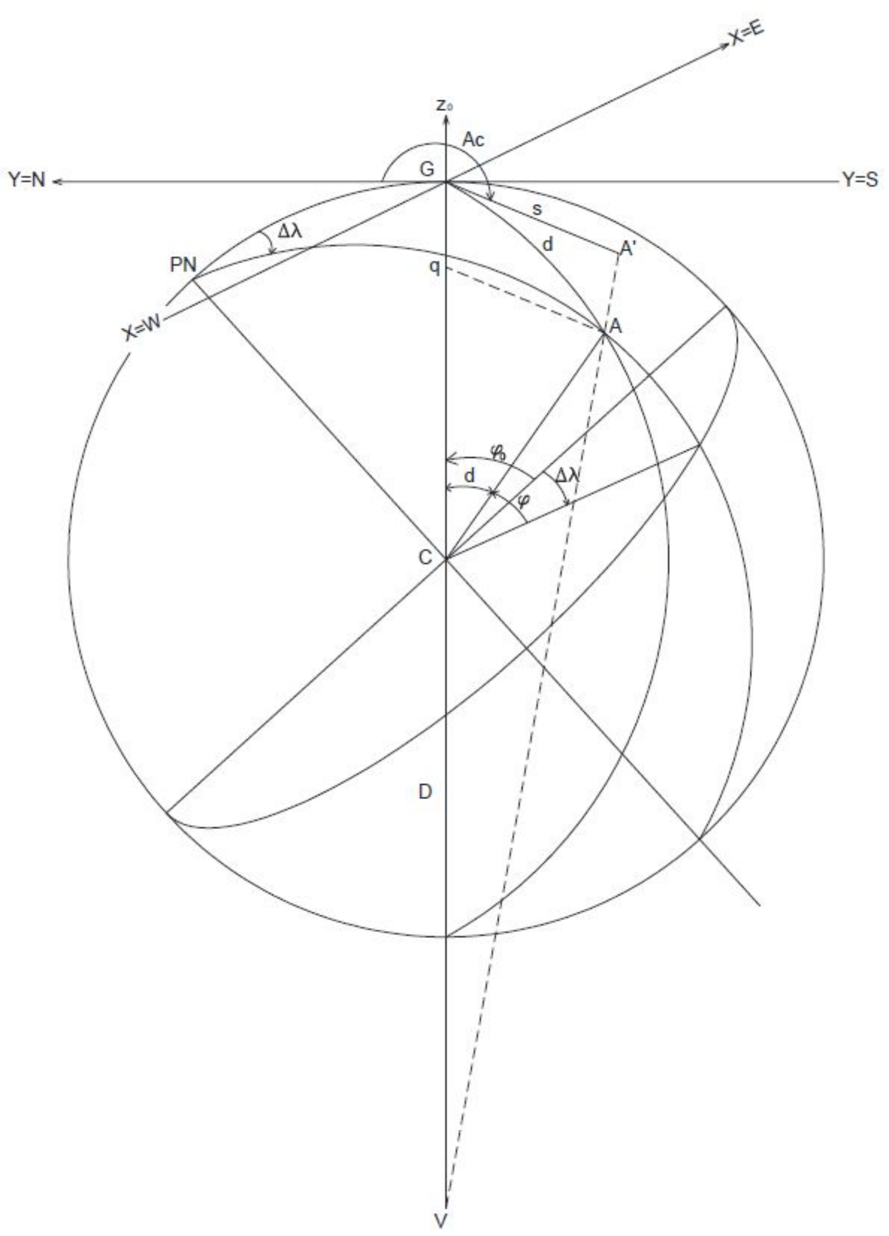
$$X = \frac{2\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{1+\sin\varphi}$$

$$Y = \frac{-2\cos\varphi \cos\Delta\lambda}{1+\sin\varphi}$$

¡¡Es conforme!!

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

D = 1

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 90°:

$$X = \frac{2\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{1+\sin\varphi}$$

$$Y = \frac{-2\cos\varphi \cos\Delta\lambda}{1+\sin\varphi}$$

¡¡Es conforme!!

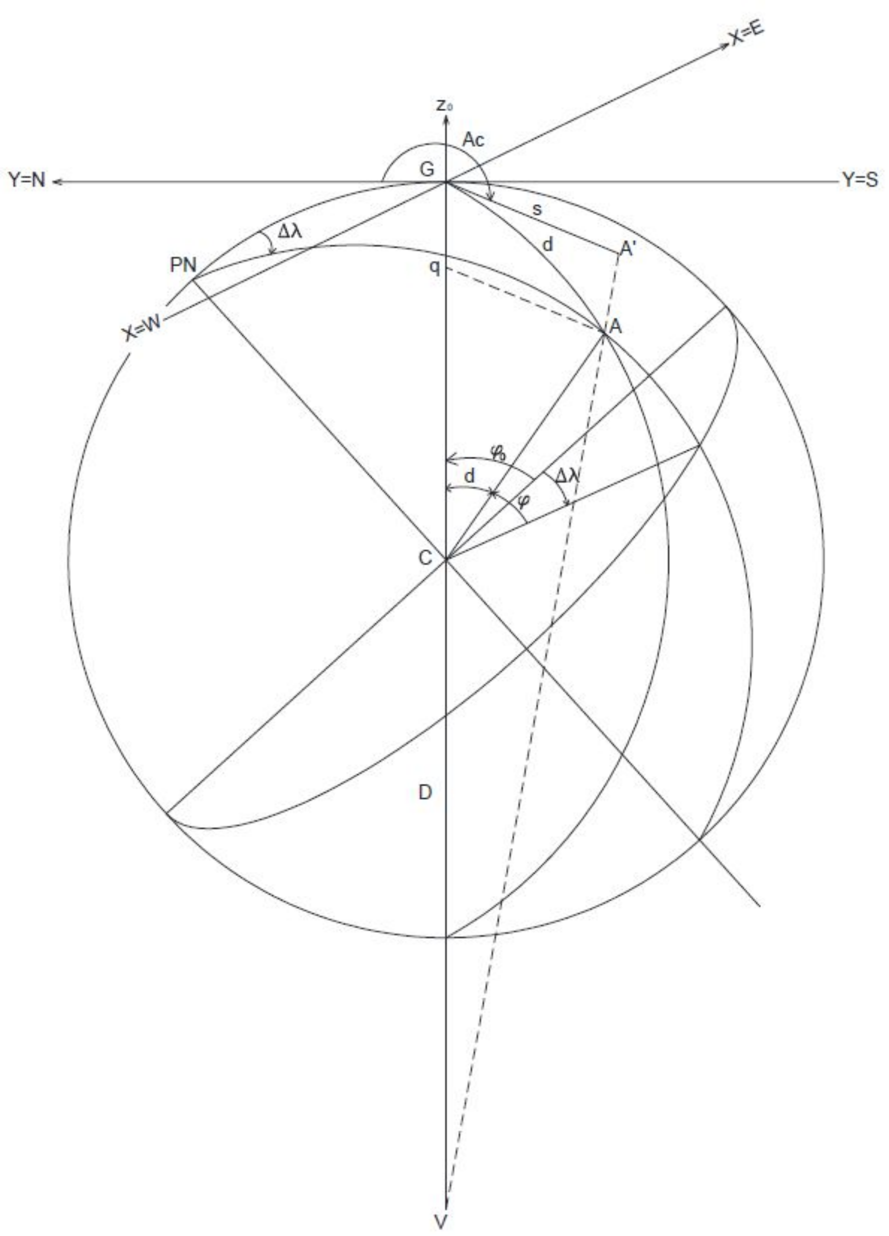
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial\lambda}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial\lambda}$$

¿Se acuerdan?

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

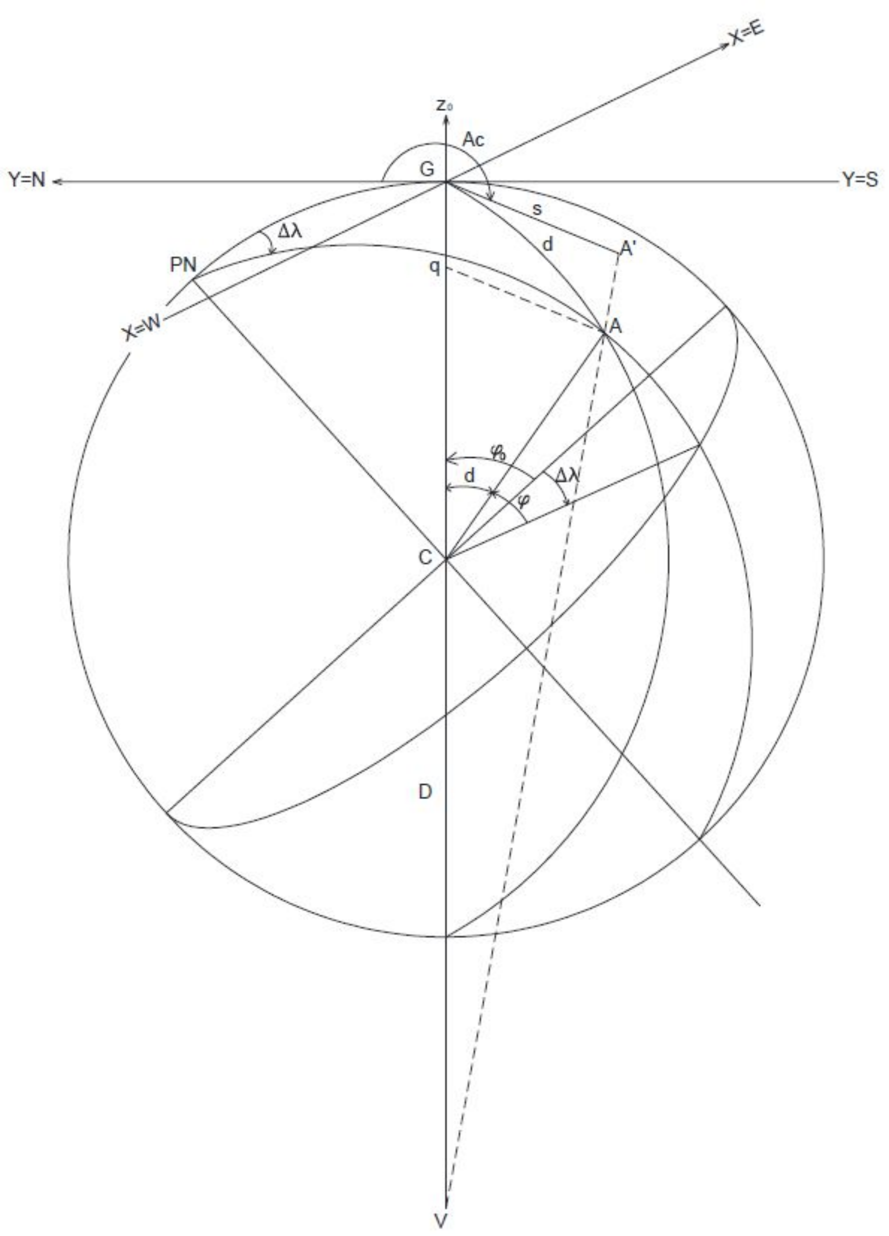
D = 1

Modo ecuatorial

$$\varphi_0 = 0^o$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección estereográfica



El vértice V se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

D = 1

Modo ecuatorial

$$\varphi_0 = 0^o$$

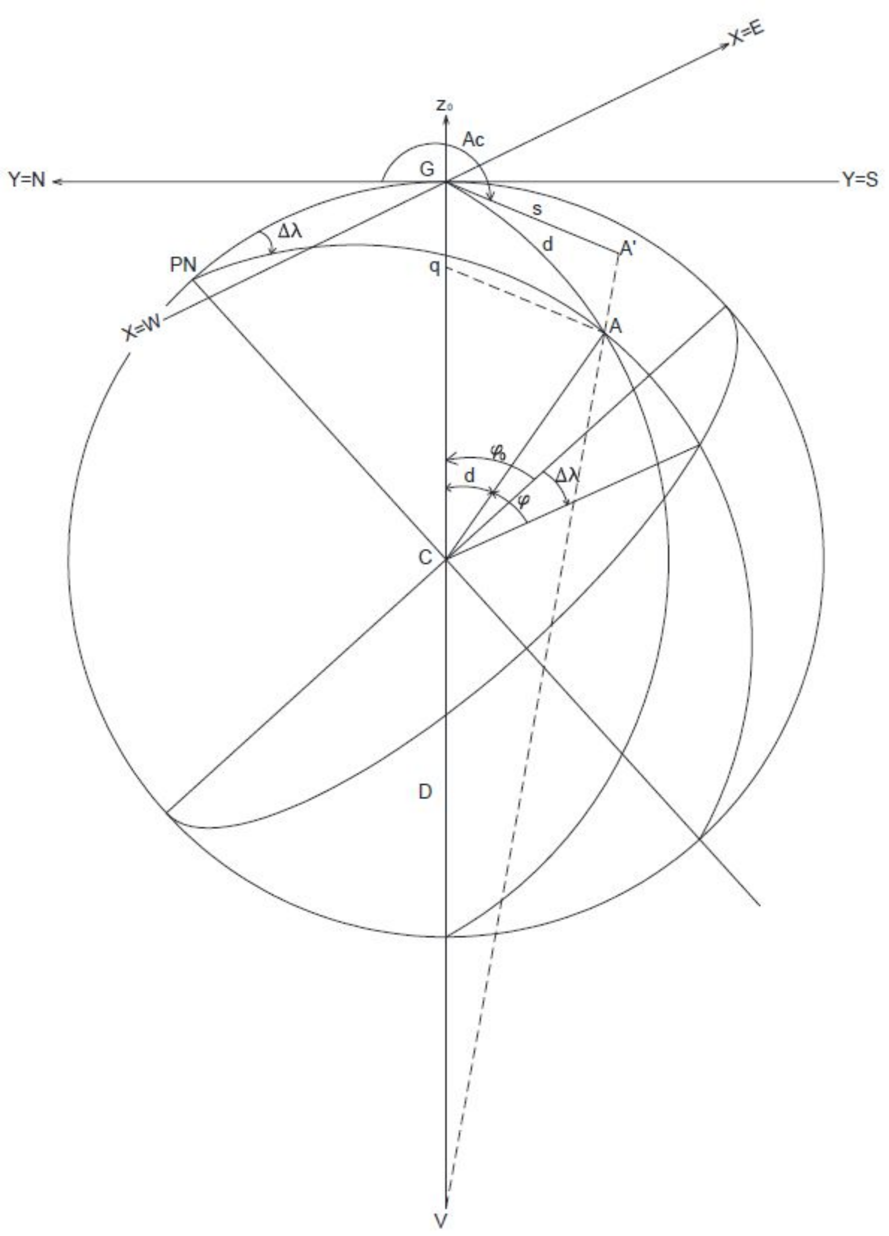
Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 0°:

$$X = \frac{2\cos\varphi \sin\Delta\lambda}{1 + \cos\varphi \cos\Delta\lambda}$$

$$Y = \frac{2\sin\varphi}{1 + \cos\varphi \cos\Delta\lambda}$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección ortográfica



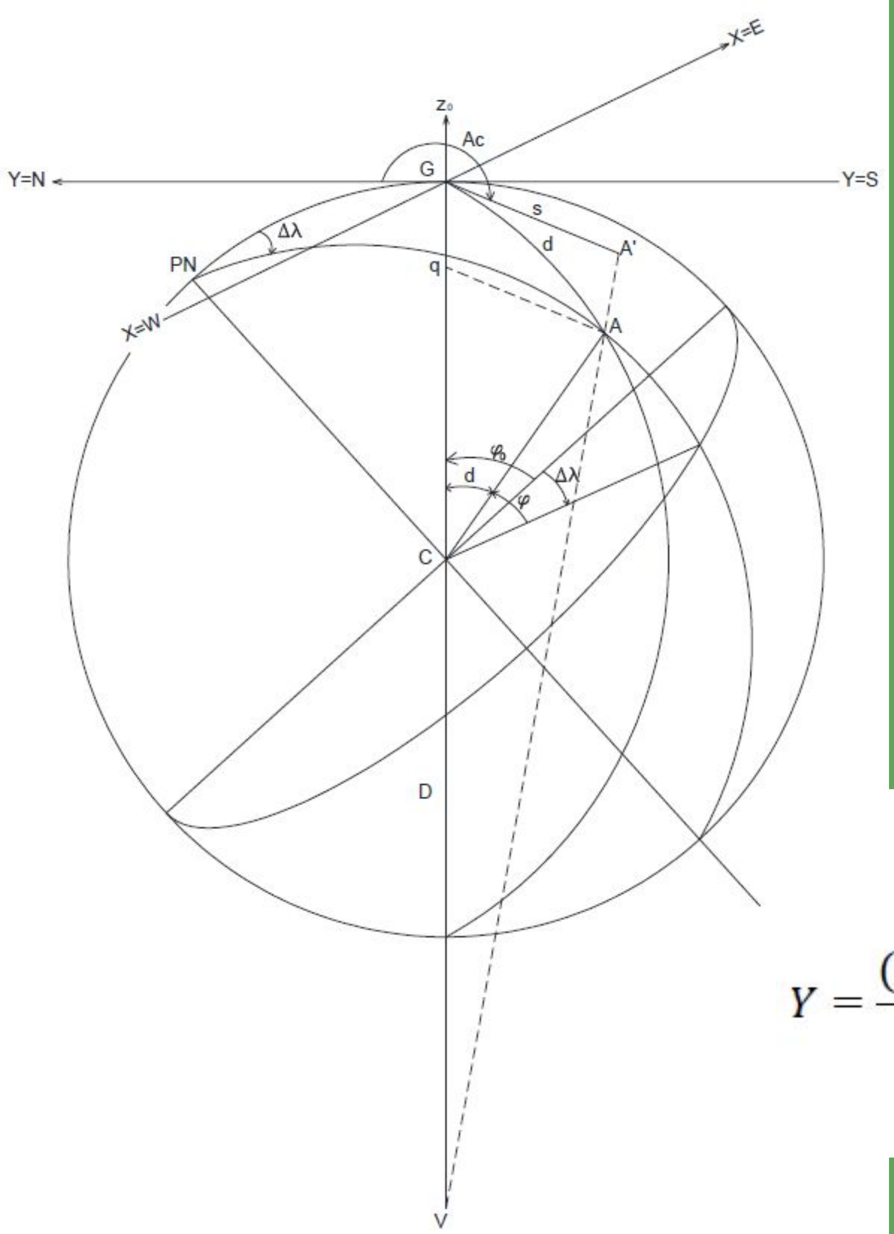
El vértice V se encuentra en el punto impropio del eje GC.

$$D \to \infty$$

Acimutal u oblicua $\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección ortográfica



El vértice V se encuentra en el punto impropio del eje GC.

$$D \to \infty$$

Acimutal u oblicua

$$\varphi_0 \neq 0 \; y \; \varphi_0 \neq \pm 90^o$$

En las expresiones generales de *X* y de *Y* hacemos que D $\longrightarrow \infty$

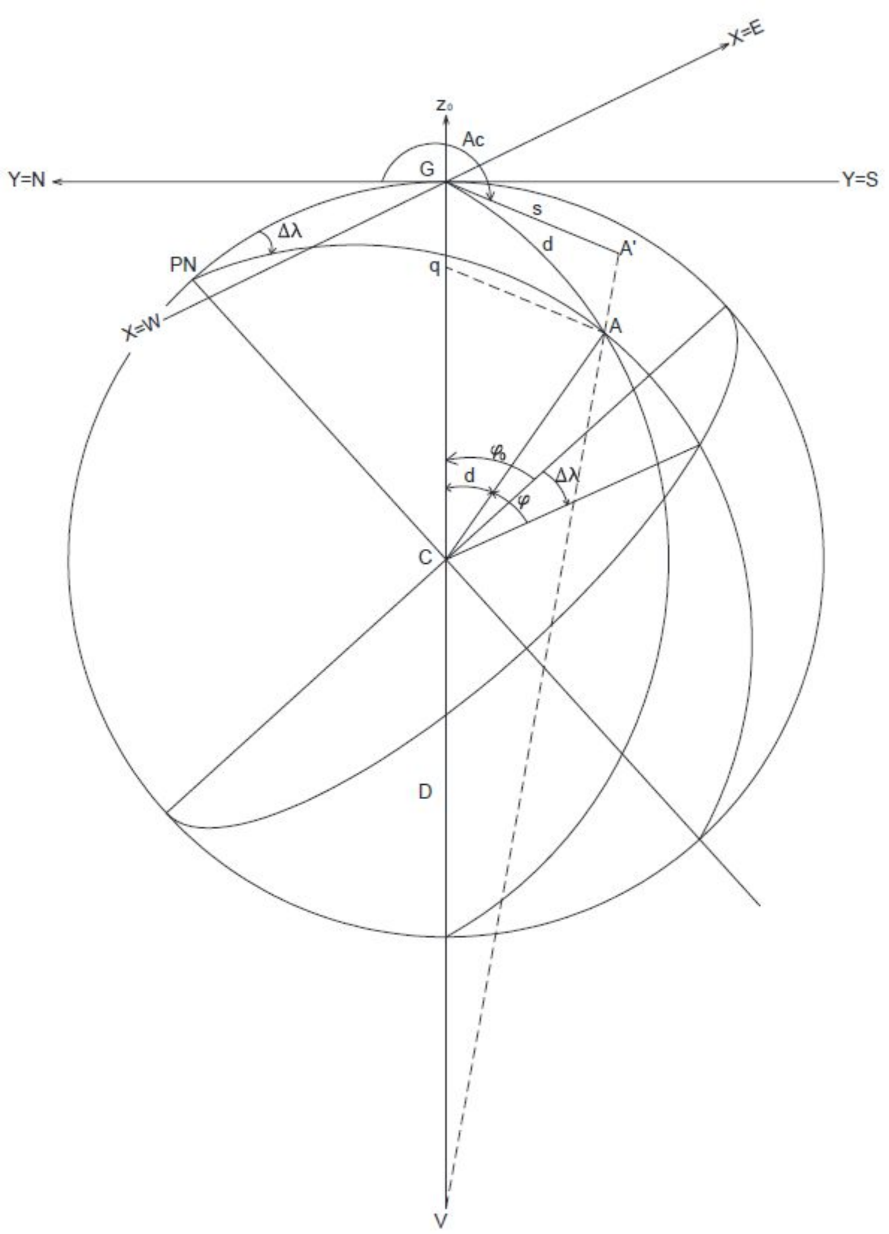
$$X = \frac{(D+1)\sin\Delta\lambda\cos\varphi}{D+\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda} \to \frac{D\sin\Delta\lambda\cos\varphi}{D} \to \sin\Delta\lambda\cos\varphi$$

$$Y = \frac{(D+1)(\sin\varphi\cos\varphi_0-\cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda)}{D+\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos\Delta\lambda} \to \frac{D(\sin\varphi\cos\varphi_0-\cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda)}{D} \to$$

$$\to \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección ortográfica



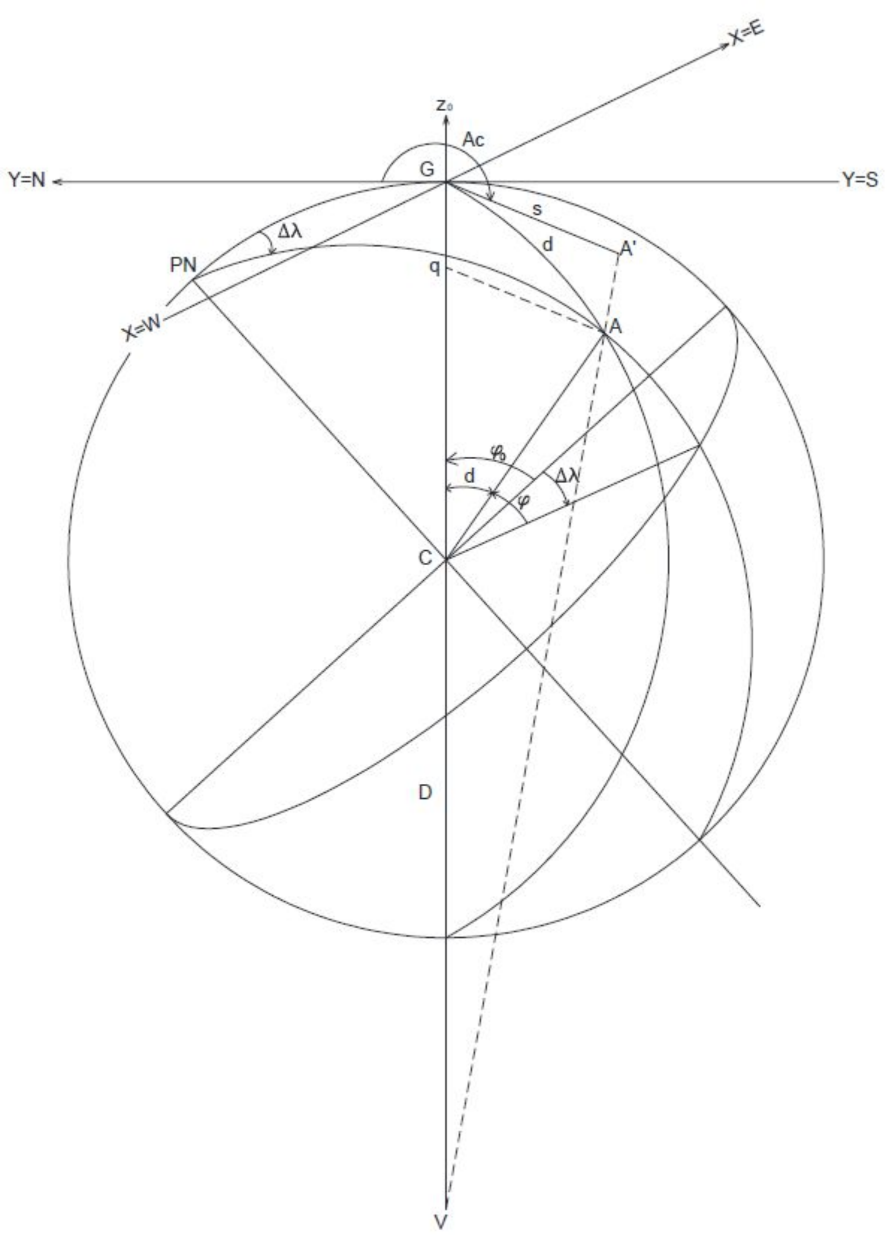
El vértice V se encuentra en el punto impropio del eje GC.

$$D \rightarrow \infty$$

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

Proyecciones planas perspectivas



Proyección ortográfica

El vértice V se encuentra en el punto impropio del eje GC.

$$D \to \infty$$

Modo polar

$$\varphi_0 = \pm 90^o$$

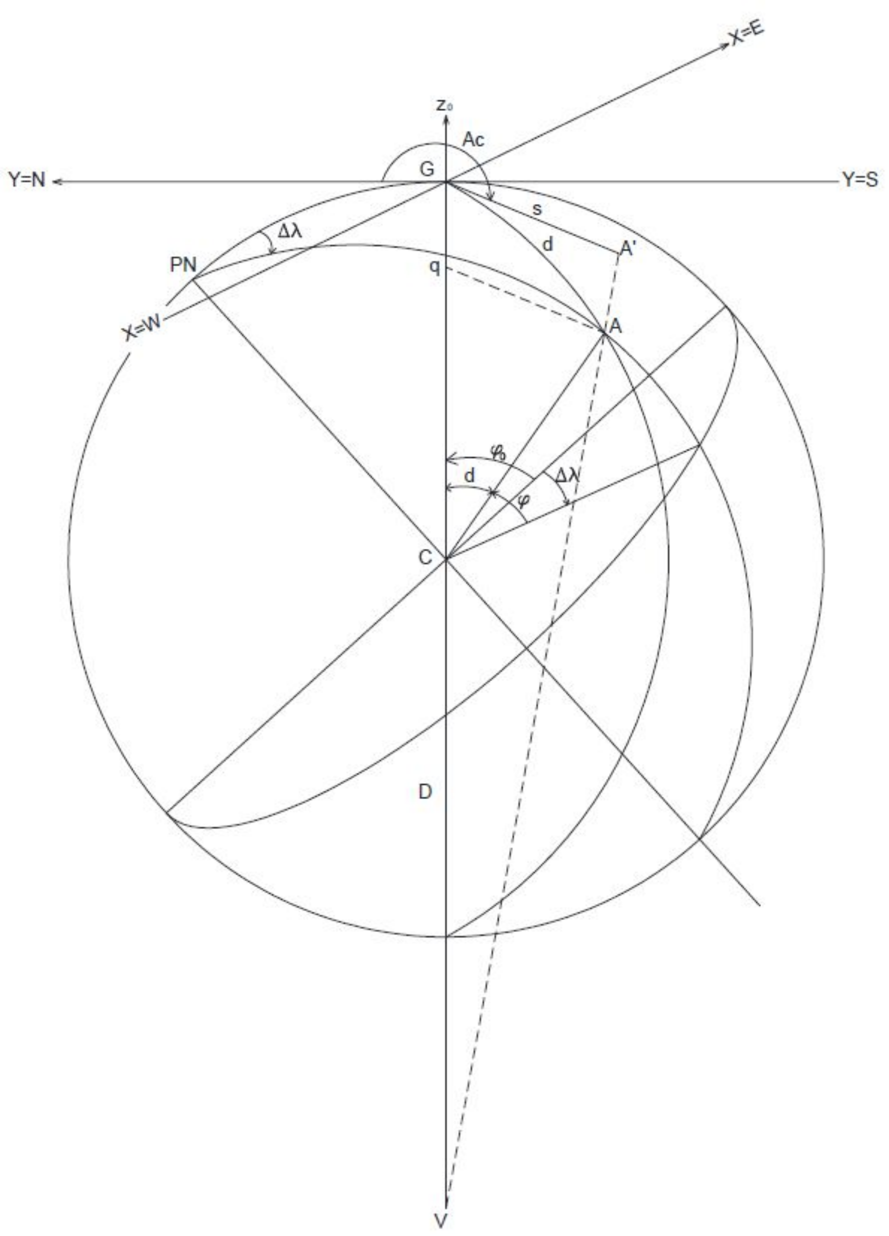
Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 90°:

$$X = \sin \Delta\lambda \cos \varphi$$

$$Y = -\cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección ortográfica



El vértice V se encuentra en el punto impropio del eje GC.

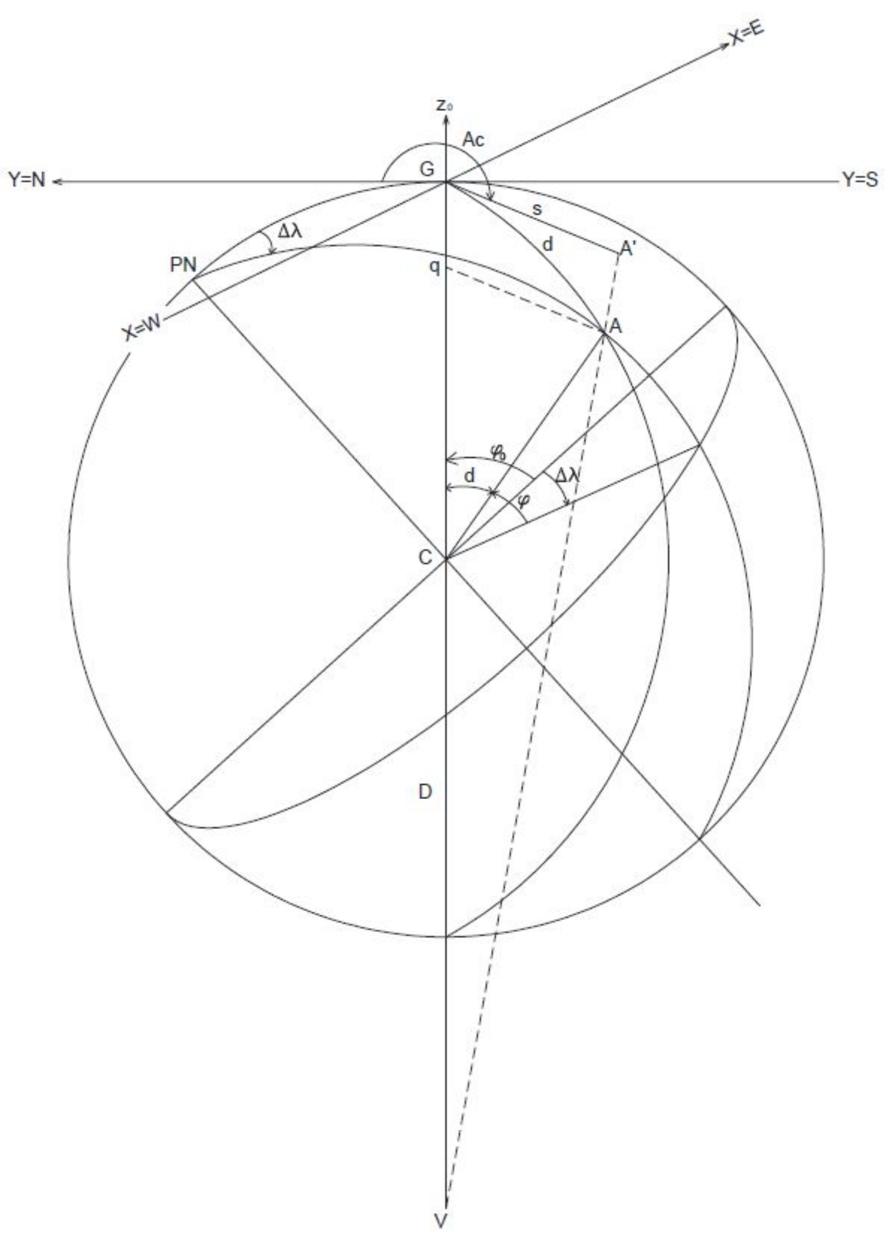
$$D \to \infty$$

Modo ecuatorial

$$\varphi_0 = 0^o$$

Proyecciones planas perspectivas

Proyección ortográfica



El vértice V se encuentra en el punto impropio del eje GC.

$$D \to \infty$$

Modo ecuatorial

$$\varphi_0 = 0^o$$

Sustituímos en las expresiones de *X* y de *Y* φ_0 por 0°:

$$X = \cos\varphi \sin\Delta\lambda$$

$$Y = \sin\varphi$$

M E R C A T O R

En 1569, se publica la proyección Mercator.

Su creador: Gerardo Kramer.

M E R C A T O R

En 1569, se publica la proyección Mercator.

Su creador: Gerardo Kramer.

Conociendo la posición del origen y la del destino, con esta proyección se podía calcular el rumbo a seguir fácilmente.

M E R C A T O R

En 1569, se publica la proyección Mercator.

Conociendo la posición del origen y la del destino, con esta proyección se podía calcular el rumbo a seguir fácilmente.

Su creador: Gerardo Kramer.

Las loxodromias o curvas loxodrómicas se representan como rectas, por lo que conociendo el origen y el destino, trazando en la carta una recta que los une, se puede medir directamente el acimut al que se tiene que orientar la proa del barco.

MERCATOR

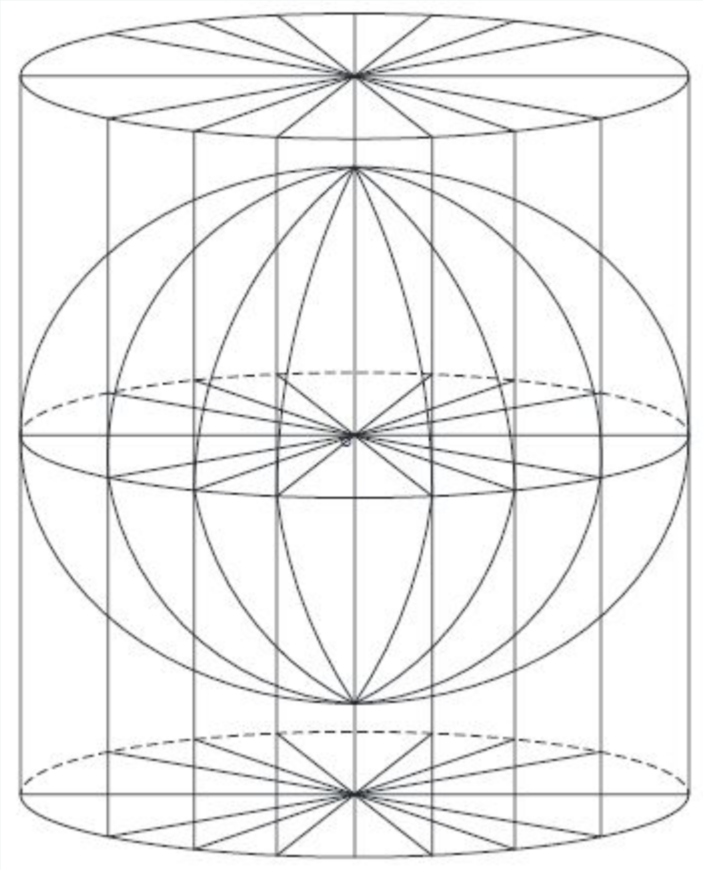
Se **clasifica** como:

- **cilíndrica**
- **ecuatorial o directa**
- **conforme**

MERCATOR

Se **clasifica** como:

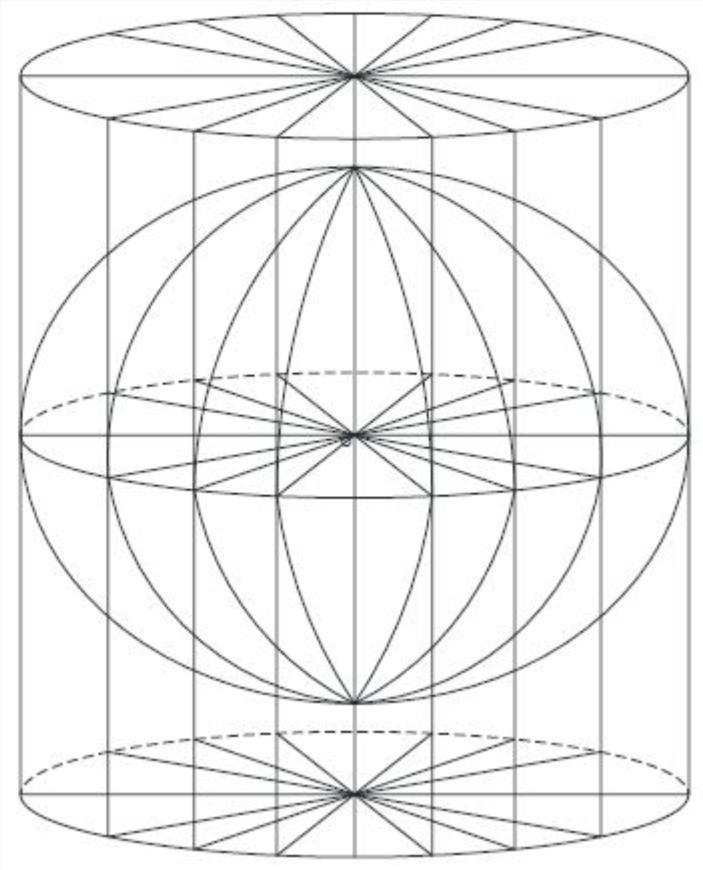
- **cilíndrica**
- **ecuatorial o directa**
- **conforme**



M E R C A T O R

Se **clasifica** como:

- **cilíndrica**
- **ecuatorial o directa**
- **conforme**

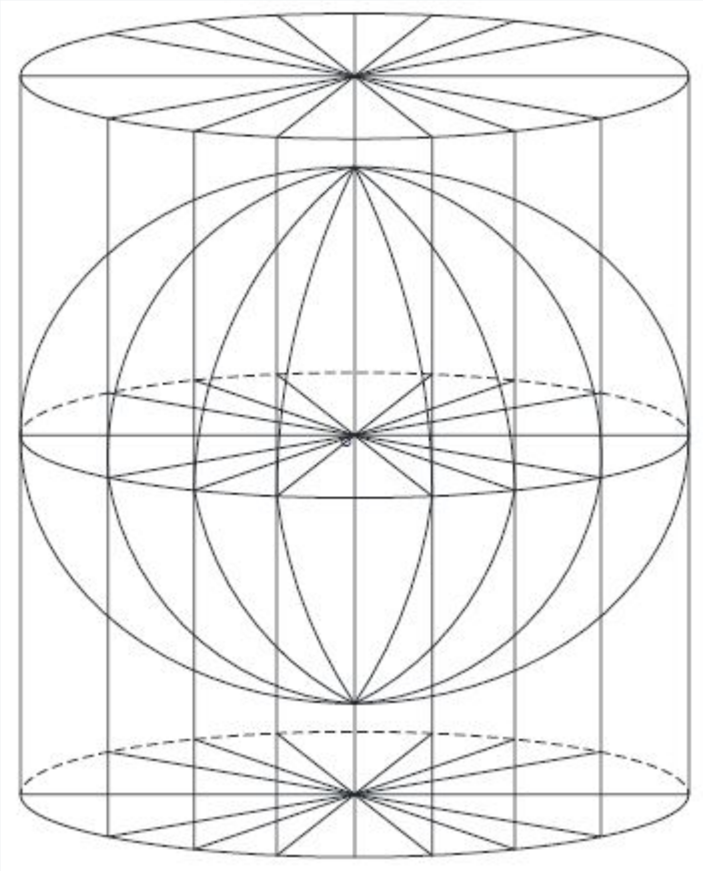


Meridianos ⟹ rectas verticales

M E R C A T O R

Se **clasifica** como:

- **cilíndrica**
- **ecuatorial o directa**
- **conforme**

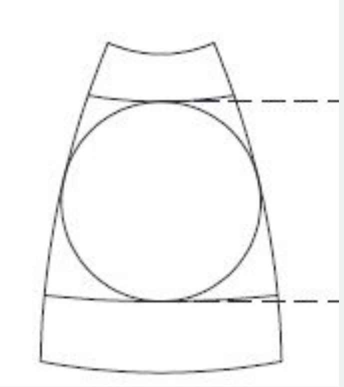


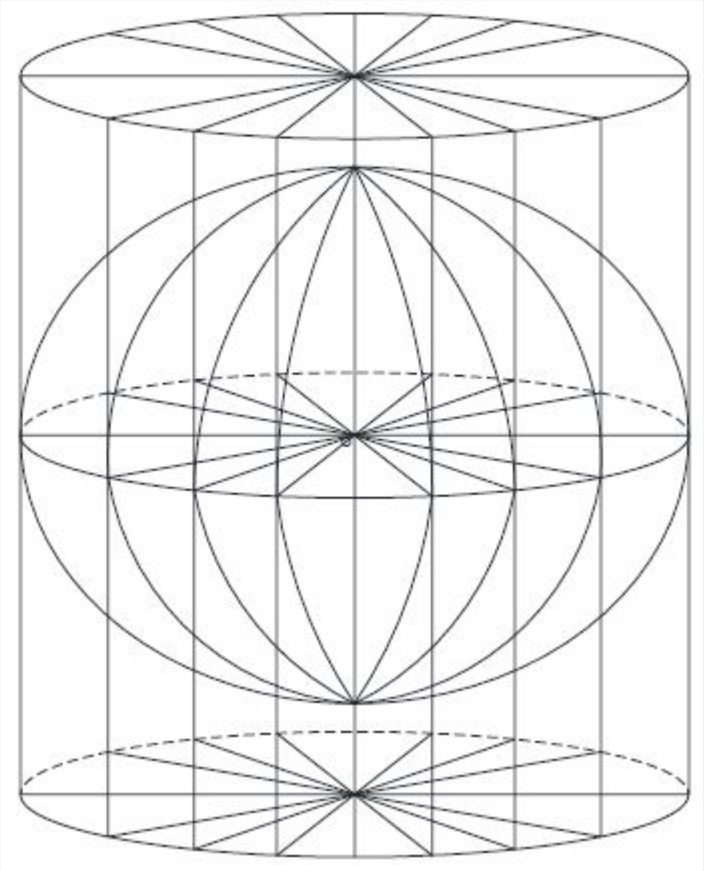
Meridianos ⇒ rectas verticales

Como es conforme, paralelos ⇒ rectas horizontales

M E R C A T O R

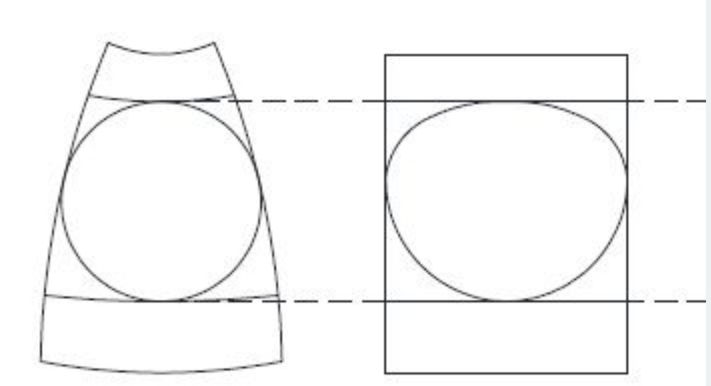
Intuitivamente, cuando proyectamos un casquete de elipsoide que contiene un círculo,

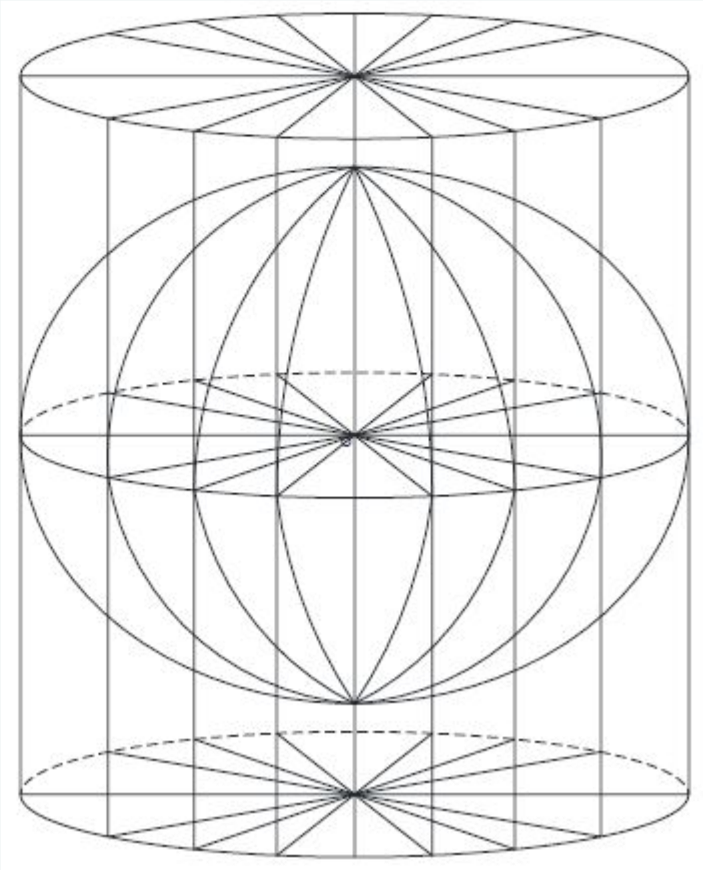




M E R C A T O R

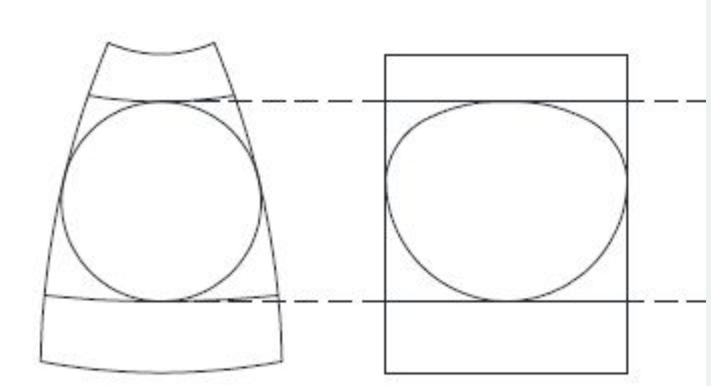
Intuitivamente, cuando proyectamos un casquete de elipsoide que contiene un círculo, de modo que los meridianos se transformen en rectas paralelas,

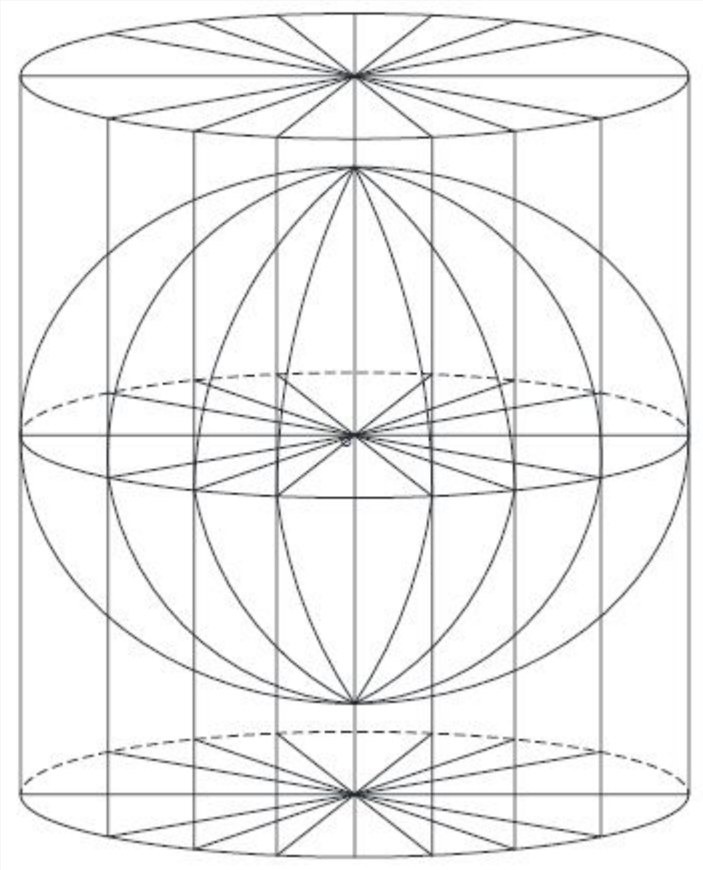




M E R C A T O R

Intuitivamente, cuando proyectamos un casquete de elipsoide que contiene un círculo, de modo que los meridianos se transformen en rectas paralelas, como la longitud del paralelo superior del casquete es más

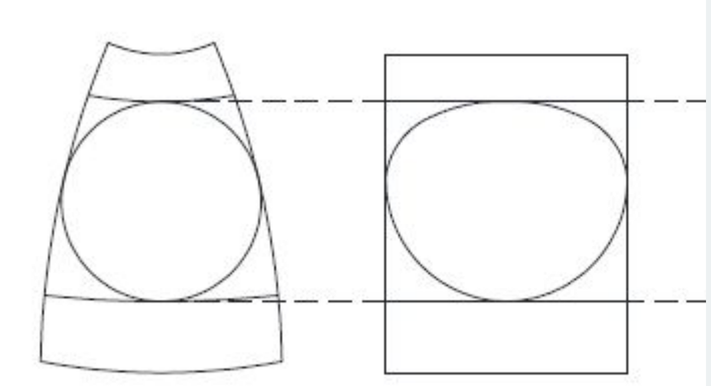


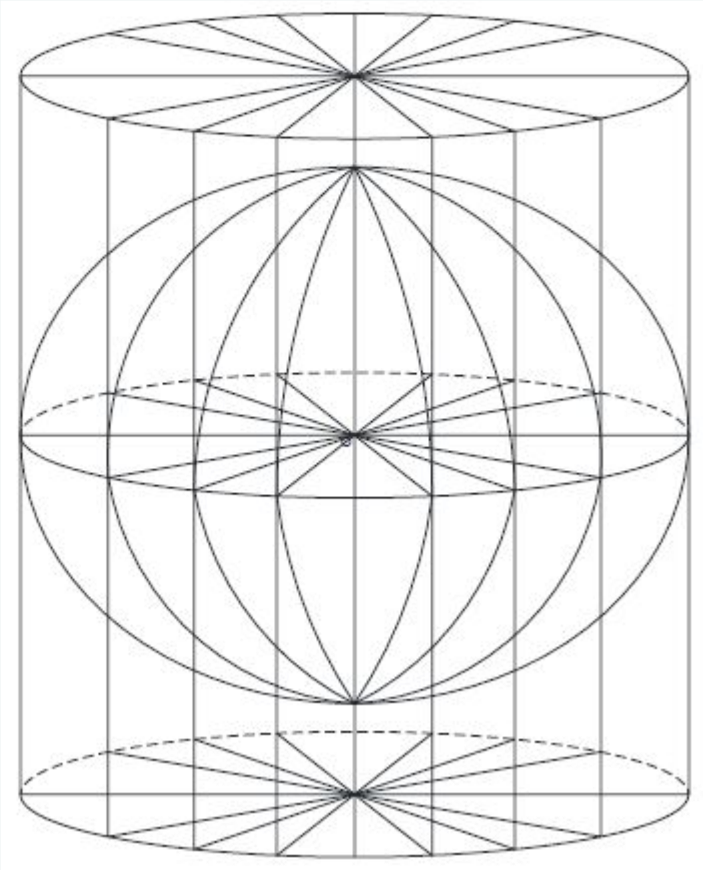


corta que la del paralelo inferior por la convergencia de los meridianos, el círculo se deforma.

M E R C A T O R

Intuitivamente, cuando proyectamos un casquete de elipsoide que contiene un círculo, de modo que los meridianos se transformen en rectas paralelas, como la longitud del paralelo superior del casquete es más



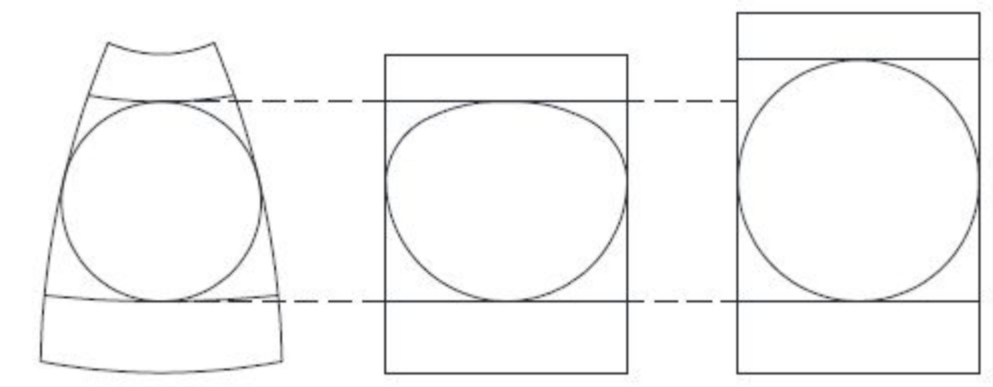


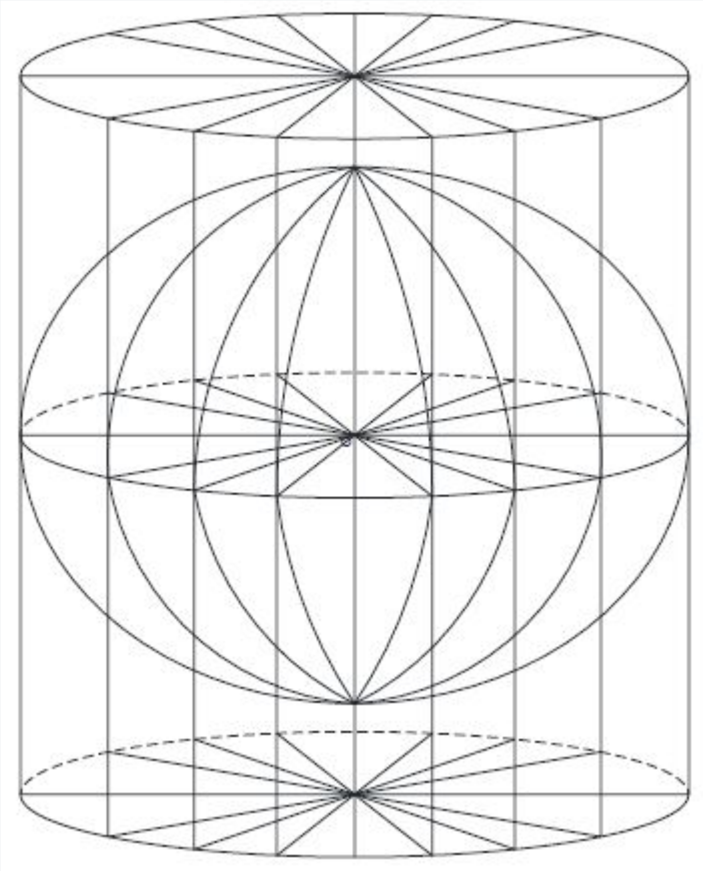
corta que la del paralelo inferior por la convergencia de los meridianos, el círculo se deforma.

Entonces, para conservar la conformidad (que el círculo se transforme en otro círculo) se debe incrementar la distancia entre los paralelos.

M E R C A T O R

Intuitivamente, cuando proyectamos un casquete de elipsoide que contiene un círculo, de modo que los meridianos se transformen en rectas paralelas, como la longitud del paralelo superior del casquete es más





corta que la del paralelo inferior por la convergencia de los meridianos, el círculo se deforma.

Entonces, para conservar la conformidad (que el círculo se transforme en otro círculo) se debe incrementar la distancia entre los paralelos.

M E R C A T O R

Ahora veamos la ley de la proyección.

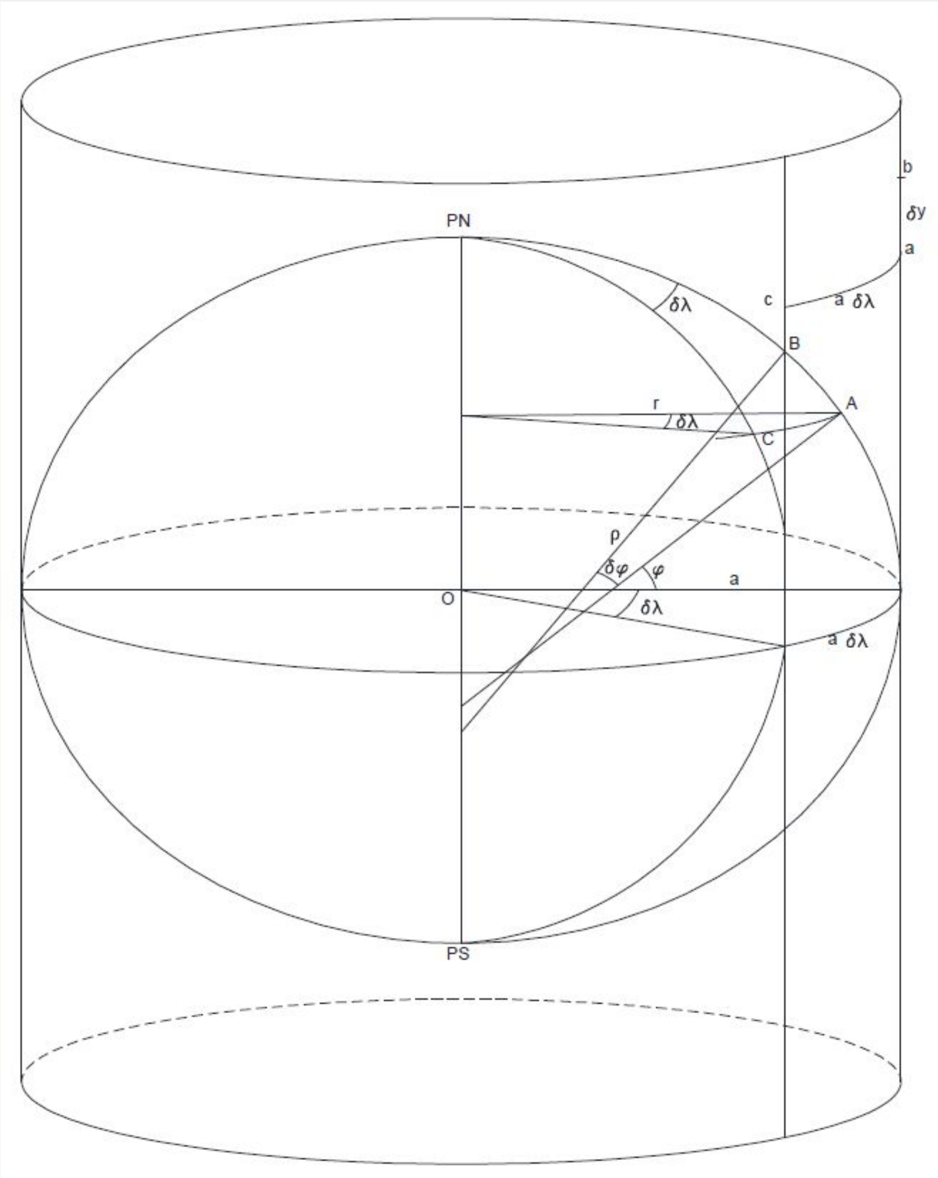
MERCATOR

Ahora veamos la ley de la proyección.

A, B y C tres puntos en el elipsoide muy cercanos entre sí. ¡Muy cercanos!

AB $\Longrightarrow$ ab

AC $\Longrightarrow$ ac



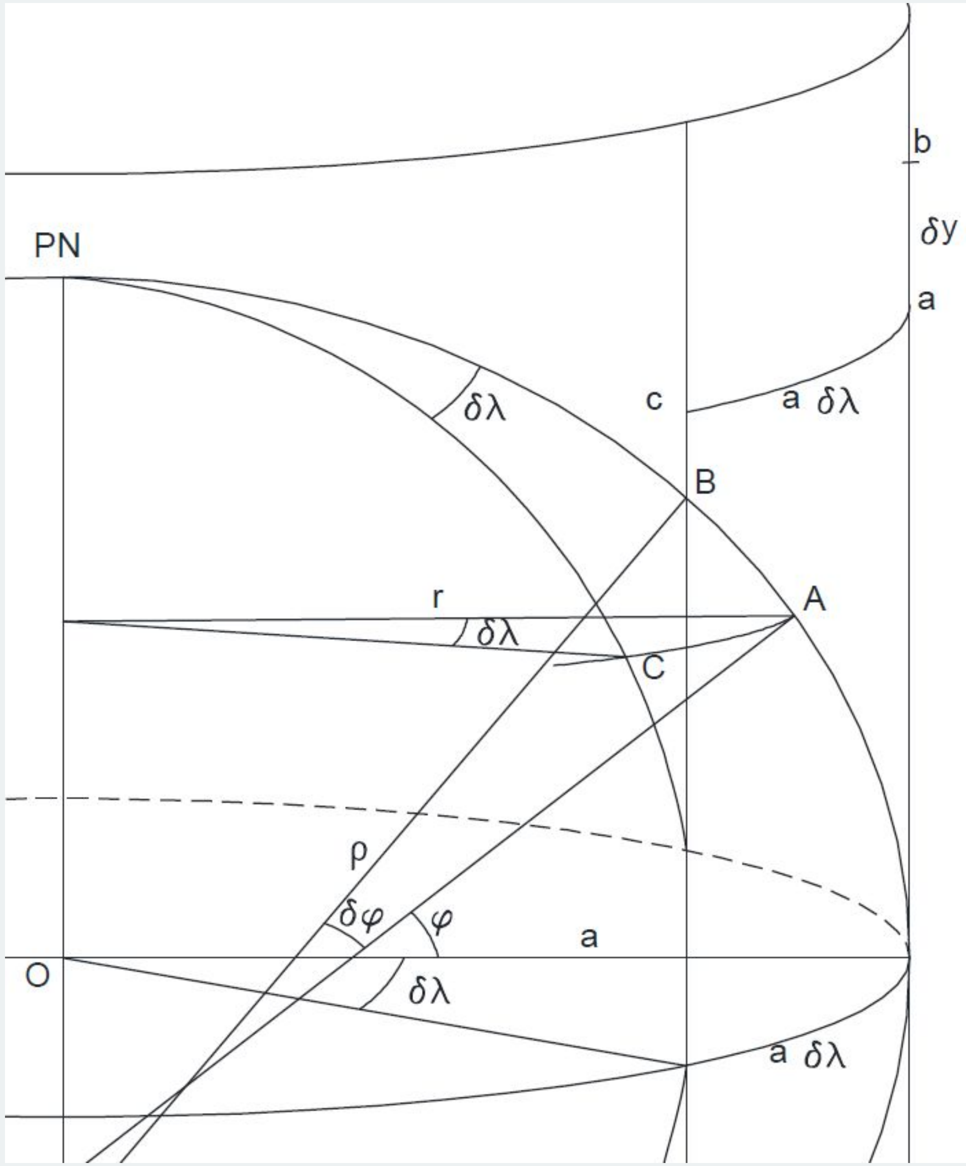
MERCATOR

Ahora veamos la ley de la proyección.

A, B y C tres puntos en el elipsoide muy cercanos entre sí. ¡Muy cercanos!

AB ⟹ ab

AC ⟹ ac



M E R C A T O R

Ahora veamos la ley de la proyección.

A, B y C tres puntos en el elipsoide muy cercanos entre sí. ¡Muy cercanos!

AB $\Rightarrow$ ab

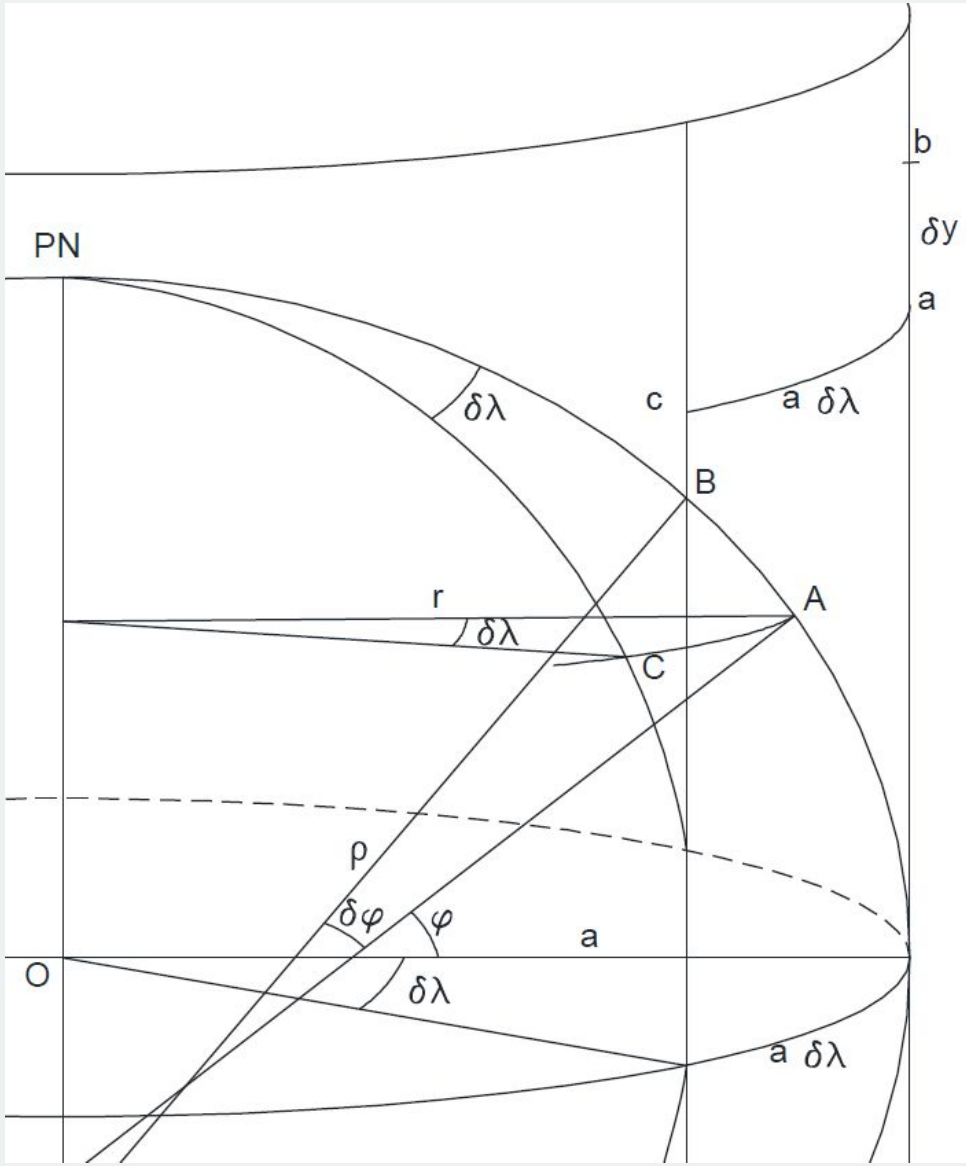
AC $\Rightarrow$ ac

Módulo de deformación transversal o paralelo es:

$$\alpha = \frac{ac}{AC} = \frac{a\Delta\lambda}{r\Delta\lambda} = \frac{a}{r}$$

Módulo de deformación meridiano es:

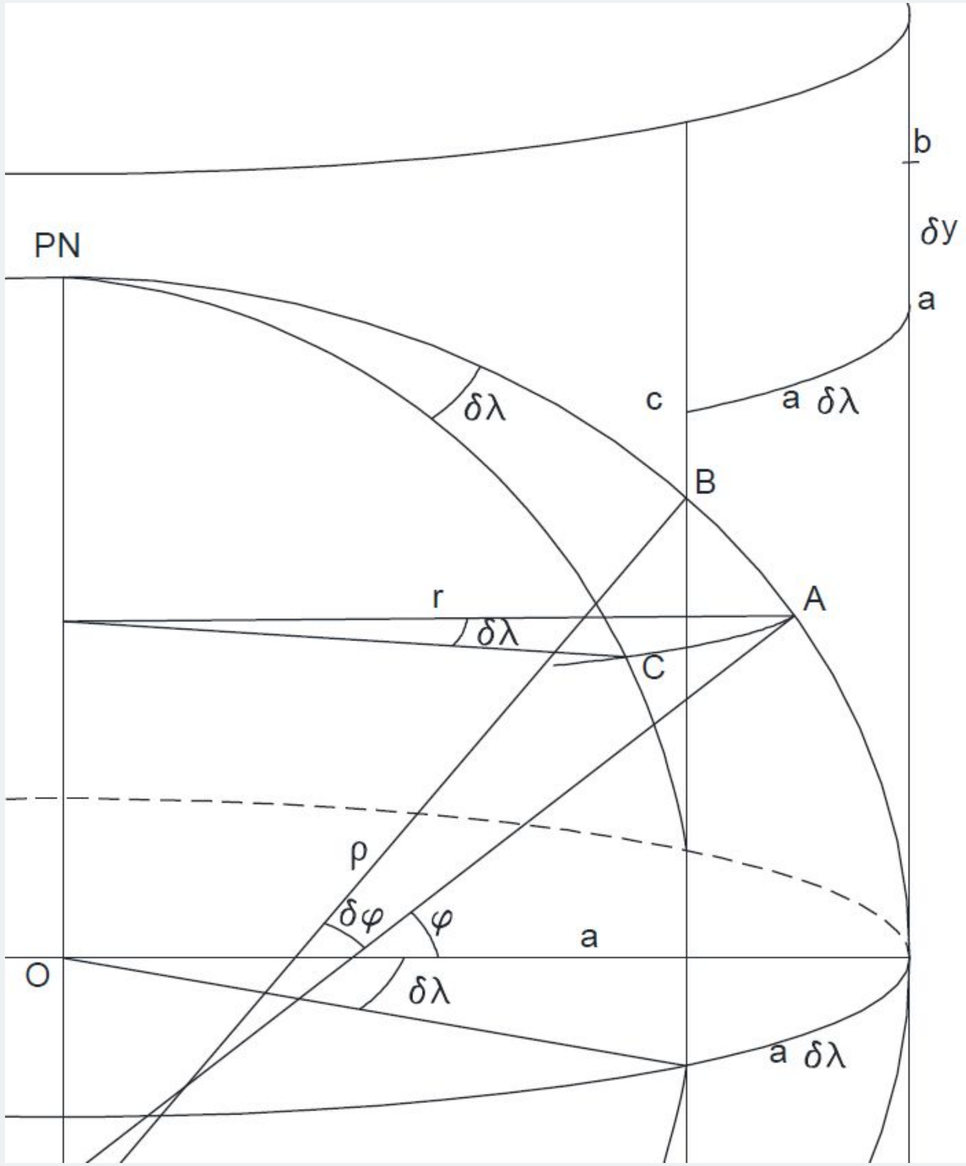
$$\beta = \frac{ab}{AB} = \frac{dy}{\rho d\varphi}$$



MERCATOR

Como vimos en Cauchy-Riemann α = β, entonces:

$$\frac{a}{r} = \frac{dy}{\rho d\varphi} \Rightarrow dy = \frac{a\rho}{r} d\varphi$$



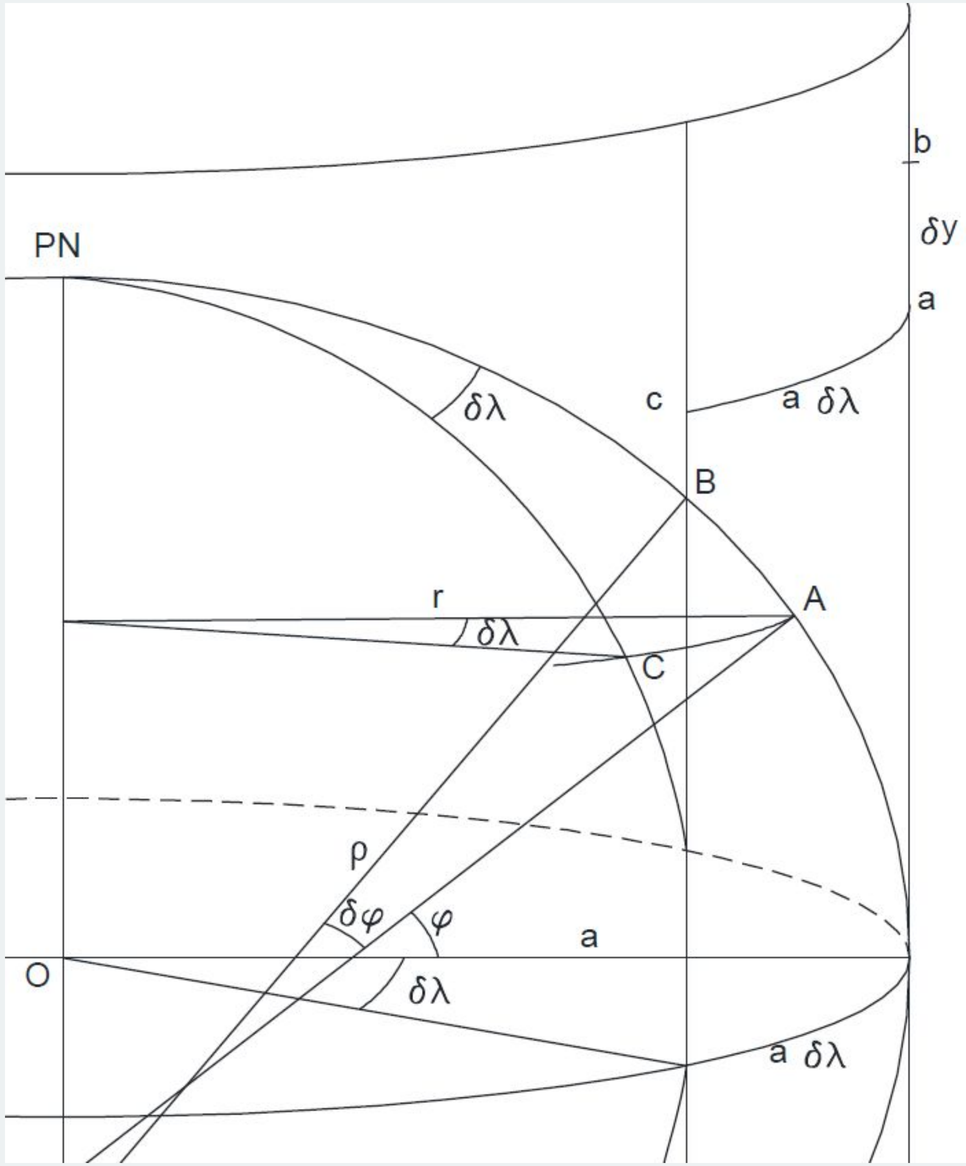
MERCATOR

Como vimos en Cauchy-Riemann α = β, entonces:

$$\frac{a}{r} = \frac{dy}{\rho d\varphi} \Rightarrow dy = \frac{a\rho}{r} d\varphi$$

Así que,

$$dy = \frac{a(1-e^2)[1-e^2(\sin\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}{[1-e^2(\sin\varphi)^2]^{\frac{3}{2}} a\cos\varphi} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{\cos\varphi\,[1-e^2(\sin\varphi)^2]} d\varphi$$



M E R C A T O R

Como vimos en Cauchy-Riemann α = β, entonces:

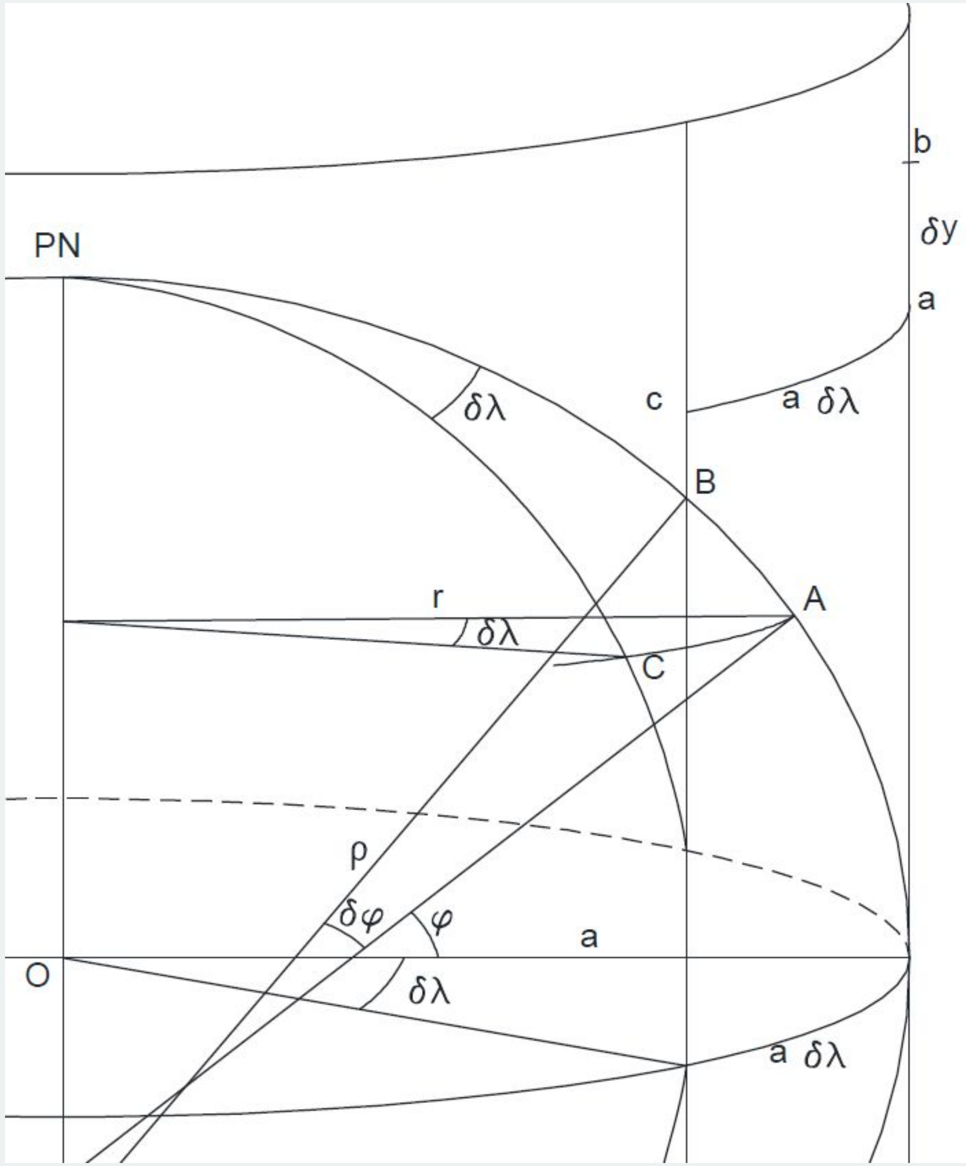
$$\frac{a}{r} = \frac{dy}{\rho d\varphi} \Rightarrow dy = \frac{a\rho}{r} d\varphi$$

Así que,

$$dy = \frac{a(1-e^2)[1-e^2(\sin\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}{[1-e^2(\sin\varphi)^2]^{\frac{3}{2}} a\cos\varphi} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{\cos\varphi\,[1-e^2(\sin\varphi)^2]} d\varphi$$

Operando, operando e integrando:

$$y = aL\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{ae}{2} L \frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}$$



M E R C A T O R

Como vimos en Cauchy-Riemann α = β, entonces:

$$\frac{a}{r} = \frac{dy}{\rho d\varphi} \Rightarrow dy = \frac{a\rho}{r} d\varphi$$

Así que,

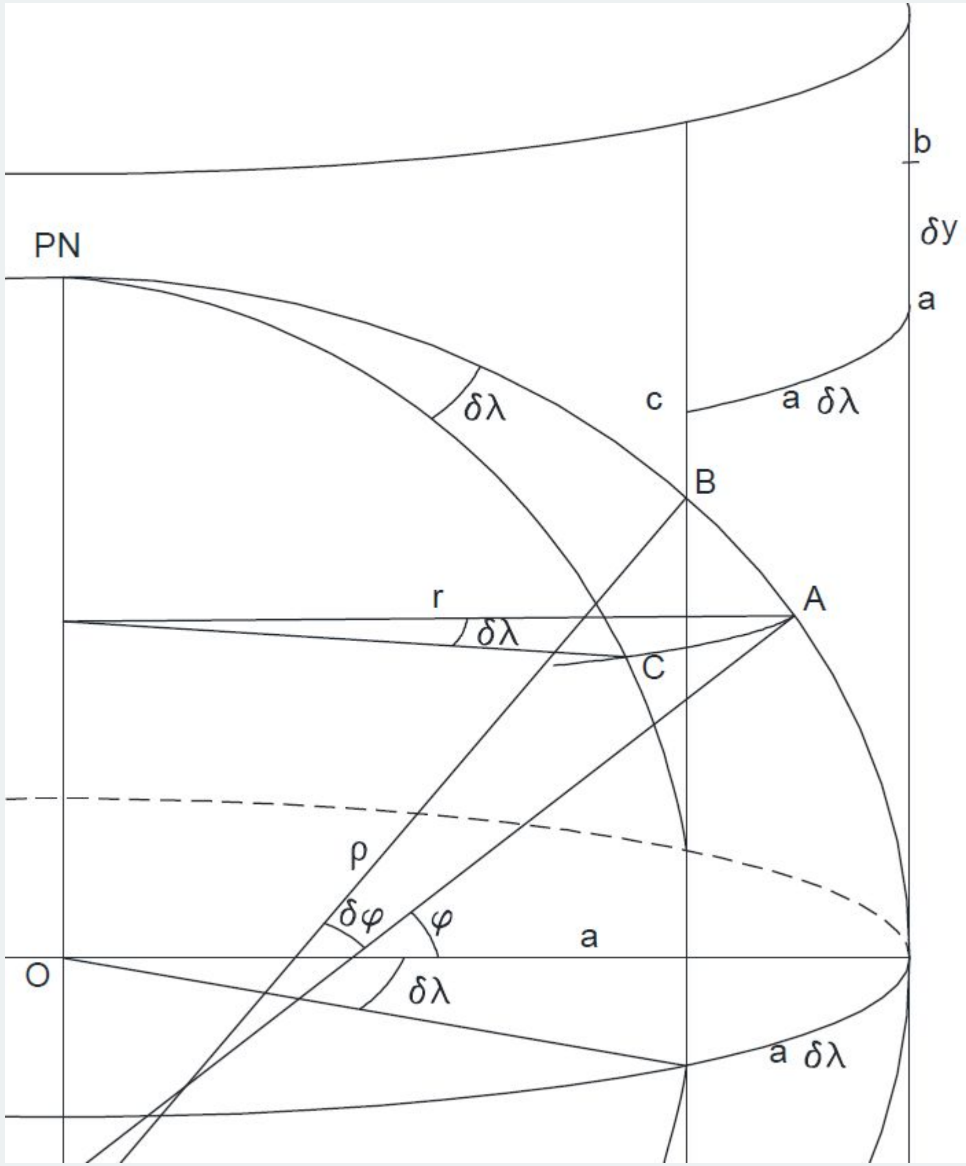
$$dy = \frac{a(1-e^2)[1-e^2(\sin\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}{[1-e^2(\sin\varphi)^2]^{\frac{3}{2}} a\cos\varphi} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{\cos\varphi\,[1-e^2(\sin\varphi)^2]} d\varphi$$

Operando, operando e integrando:

$$y = aL\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{ae}{2} L \frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}$$

Con la *x* es bastante más sencillo:

$$dx = ac = ad\lambda \Rightarrow x = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ad\lambda = a(\lambda_2 - \lambda_1) = a\Delta\lambda \quad \Longrightarrow \quad x = a\Delta\lambda$$

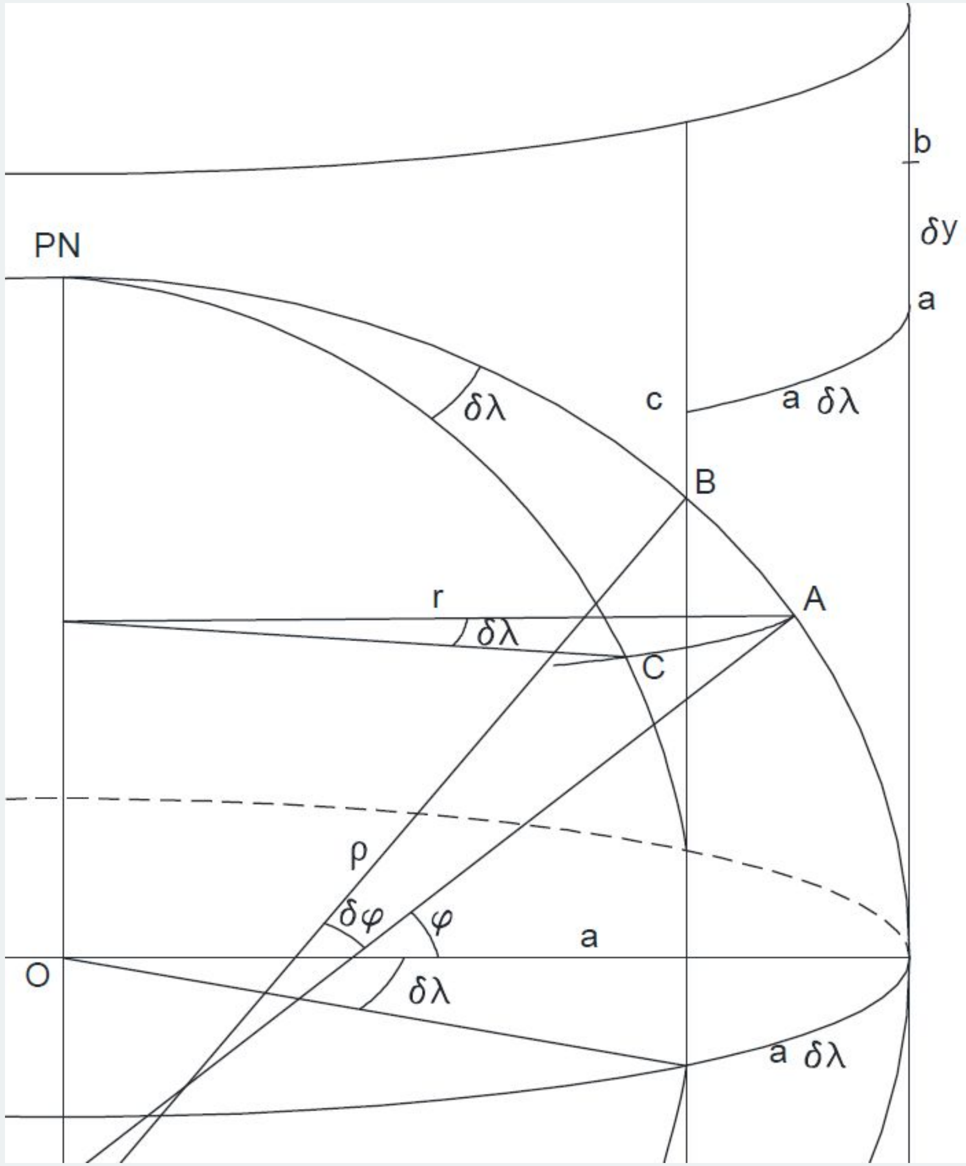


M E R C A T O R

Dos detalles:

-Usualmente en esta proyección se usa como unidad la milla ecuatorial o milla náutica.
Es la longitud de 1’ de arco en el Ecuador.

-También se suele trabajar con logaritmo decimal en vez de neperiano.



M E R C A T O R

Dos detalles:

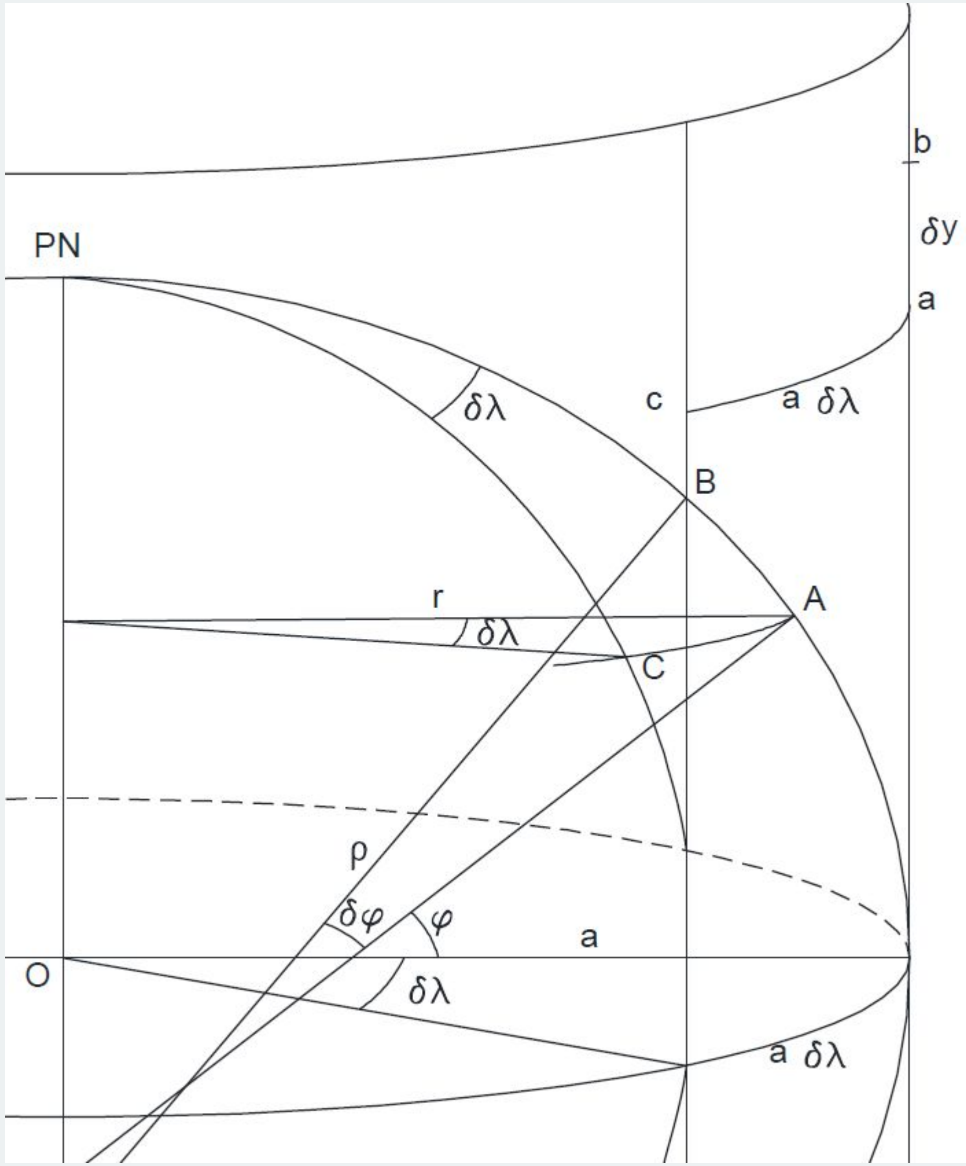
-Usualmente en esta proyección se usa como unidad la milla ecuatorial o milla náutica.
Es la longitud de 1’ de arco en el Ecuador.

-También se suele trabajar con logaritmo decimal en vez de neperiano.

Por lo que el componente *y* de la Ley de la proyección resulta:

$$y = \frac{10800}{\pi M} \log \tan\left(45^{\circ} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{10800}{\pi}\left(e^2 \sin\varphi + \frac{e^4}{3}(\sin\varphi)^3 + \frac{e^6}{5}(\sin\varphi)^5 + \cdots\right)$$

siendo M = log (e)



MERCATOR

Dos detalles:

-Usualmente en esta proyección se usa como unidad la milla ecuatorial o milla náutica.
Es la longitud de 1’ de arco en el Ecuador.

-También se suele trabajar con logaritmo decimal en vez de neperiano.

Por lo que el componente *y* de la Ley de la proyección resulta:

$$y = \frac{10800}{\pi M} \log \tan\left(45^{\circ} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{10800}{\pi}\left(e^2 \sin\varphi + \frac{e^4}{3}(\sin\varphi)^3 + \frac{e^6}{5}(\sin\varphi)^5 + \cdots\right)$$

siendo M = log (e)

$$x = a\Delta\lambda$$