ITR UTEC
Suroeste
Universidad Tecnológica

INGENIERIA BIOMEDICA

Elementos de Metrología

NIB

Clase # 2 – Martes 24-09-2024

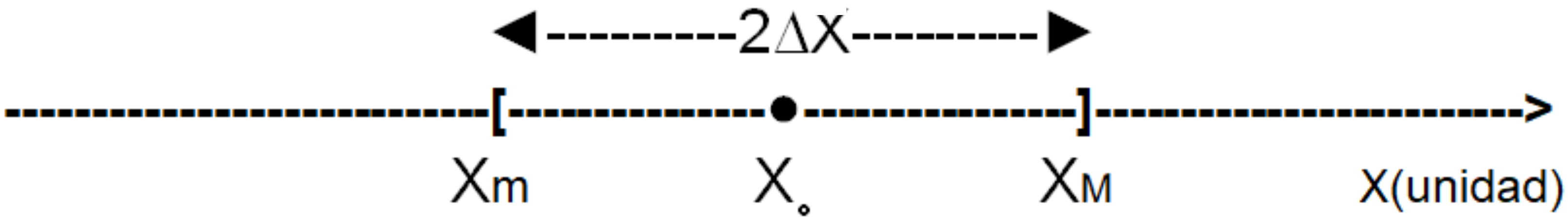
Docente: Dr. Leonardo NICOLA SIRI

Intervalo de incertidumbre

El “resultado” de la medición es la TOTALIDAD del intervalo de incertidumbre

No hay valores “preferibles” o “mejores”

ATENCIÓN
No es “ERROR”
es “INCERTIDUMBRE”



Notación 1: $x_L = [x_m; x_M]$ **(unidad)**
Notación 2: $x_L = [x_0\ ; \Delta x]$ **(unidad)**

$$X = (Xo \pm \Delta x)\ (\text{unidad})$$

Equivalencias:

x_0(unidad) = ½ ($X_M + X_m$) ; valor representativo (ubicación) del intervalo

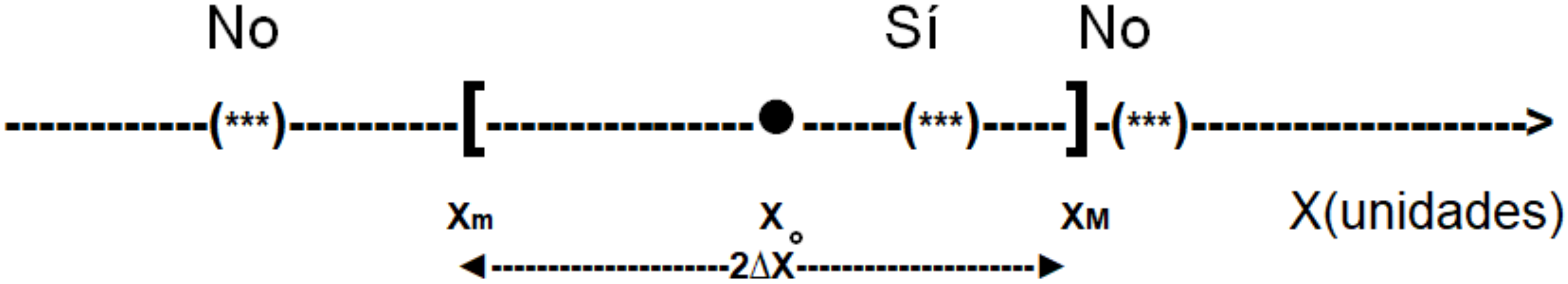
Δx(unidad) = ½ ($X_M - X_m$) ; “incertidumbre”, (**U**, “*uncertainty*”)

X_M(unidad) = $Xo + \Delta x$; extremo inferior del intervalo, valor mínimo del mensurando

X_m(unidad) = $Xo - \Delta x$; extremo superior del intervalo, valor máximo del mensurando

Igualdad y desigualdad de Intervalos de Incertidumbre

Los **intervalos de incertidumbre de la medida, TIENEN puntos en COMUN?**



$$D = [Xo \pm \Delta X] - [Yo \pm \Delta Y] = [\,(Xo - Yo) \pm (\Delta X + \Delta Y)\,]$$

Convención: $\text{Si } |Xo - Yo| \leq (\Delta X + \Delta Y) \rightarrow X = Y$

Álgebra de los intervalos de incertidumbre
Propagación de la incertidumbre

Incertidumbre ABSOLUTA e Incertidumbre RELATIVA (según VIM)

Dado un intervalo de incertidumbre **x** = [xm ; xM](unidad) = [$x_o \pm \Delta x$](unidad)
Se define **Incertidumbre ABSOLUTA:** Δx (unidad)

Incertidumbre RELATIVA: $\varepsilon = \Delta x / x_o$; ADIMENSIONAL (sin unidades)

Incertidumbre RELATIVA PORCENTUAL: $\varepsilon(\%) = 100 * \varepsilon$; ADIMENSIONAL (sin unidades)

ε y $\varepsilon(\%)$ indican la "calidad" de la medida
(cuánto "pesa" la incertidumbre Δx respecto del valor representativo x_o)

COROLARIO:

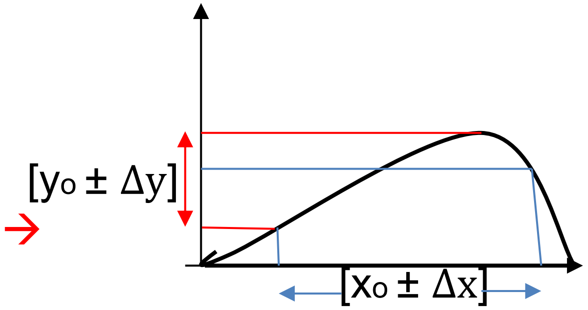
Para **c** = **a+b** y **c** = **a-b** → $\Delta c = \Delta a + \Delta b$; $\varepsilon_c = \Delta c / c_o$ → se suman las incertidumbres absolutas

Para **c** = **a*b** y **c** = **a/b** → $\varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_b$; $\Delta c = \varepsilon_c * c_o$ → se suman las incertidumbres relativas

La incertidumbre RELATIVA facilita el cálculo de propagación de incertidumbre en (*) y en (/)

Álgebra de los intervalos de incertidumbre
Propagación de la incertidumbre

Propagación de la incertidumbre en funciones



Algebraicas (**+ ; -; *; /**) o analíticas ---------------→

Para **c** = **a**+**b** y **c** = **a-b** → $\Delta c = \Delta a + \Delta b$; $\varepsilon_c = \Delta c / c_o$ → se suman las incertidumbres absolutas

Para **c** = **a*****b** y **c** = **a/b** → $\varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_b$; $\Delta c = \varepsilon_c * c_o$ → se suman las incertidumbres relativas

Dada una función y = f(x) y el intervalo de incertidumbre de la variable independiente **x** = [$x_o \pm \Delta x$]
DEBEN identificarse [ym ; yM] y luego calcular [yo ± Δy]

APROXIMACIÓN:

Si f(x) es monótonamente creciente o decreciente en el intervalo [$x_o \pm \Delta x$]
con $f'(x_o) \neq 0$, y se cumple $\Delta x \ll x_o$ → es válida la siguiente aproximación:

$$y_o \cong f(x_o)$$

$$\Delta y \cong |f'(x_o)| . \Delta x$$

Incertidumbre de lectura (u_L)

$u_L = \Delta x = \pm 1$ **lsd** (dígito menos significativo)

$u_L = \Delta x = \pm$ 1/n del valor de la menor división de la escala

NOTA: en una **buena práctica de medición** es esperable que el **observador** pueda asegurar una resolución de **1/4 a 1/5 de división**

Resolución (según VIM): mínima diferencia reconocible entre dos lecturas

|-----------+-------(------+---------)(+-----------+)------>

0 250 500 750 1000 X

(UNIDADES ARBITRARIAS)

Tanto para los instrumentos de medida digitales como para los analógicos

la **incertidumbre de lectura** es igual a la **resolución**

Ddefiniciones referidas a instrumentos (de acuerdo con el VIM)

- **Rango (de un instrumento) (*range*): INTERVALO** que abarca desde el **valor mínimo** hasta el **valor máximo** que puede ser registrado. El valor nulo (**'0' del instrumento)** puede corresponder a un extremo del rango, o estar entre ambos extremos (suele estar en el punto medio)
- **Alcance (de un instrumento) (*span*): Amplitud** (tamaño) del **INTERVALO** del **rango;** es la **diferencia** entre el valor máximo y el valor mínimo de la escala

  Ejemplo: *un termómetro cuyo rango es -5 ℃ a +110 ℃, tiene alcance de 115 ℃*

- **Resolución (de un instrumento) (*resolution*): Mínima diferencia** reconocible entre dos lecturas posibles

  NO ES "Error" del instrumento   **NO ES** "precisión" del instrumento

Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012 (http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)

DIDÁCTICA DE LA METROLOGÍA

Módulo II

Exactitud / inexactitud en las mediciones. El ERROR de medición -incertidumbre del error. Procedimientos de ajuste y de calibración – uso de “patrones”. Valores corregidos – incertidumbre del valor corregido. Curvas de calibración. El ERROR informado como incertidumbre – convención de los fabricantes de instrumentos.

Por disponibilidad de tiempo, **en este CURSO**, desarrollaremos **solamente los Módulos I y II** (en dos clases)
El Modulo III es un curso convencional de Estadística
El Modulo IV puede estudiarse siguiendo la **Bibliografía recomendada para Metrología**

Exactitud (Inexactitud = ERROR de MEDICIÓN)

¿A qué hora (tf) fue tomada ESTA fotografía?

tf = [0 ; 24] h = [12±12] h

Exactitud (Inexactitud = ERROR de MEDICIÓN)

¿A qué hora (tf) fue tomada ESTA fotografía?

tf = [0 ; 24] h = [12±12] h

$$tf = [3\,h\ 7\,\text{min}\ (3 \pm 0{,}5)s]$$

Exactitud (Inexactitud = ERROR de MEDICIÓN)

¿A qué hora (tf) fue tomada ESTA fotografía?

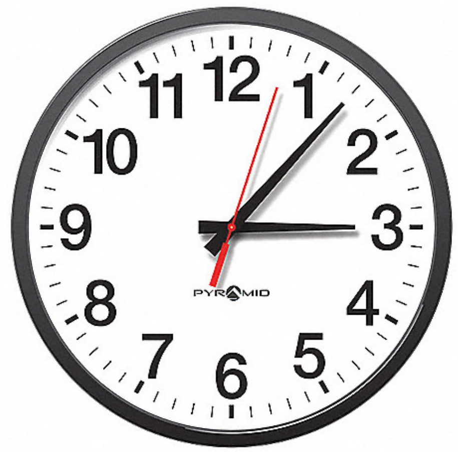
tf = [0 ; 24] h = [12±12] h

$$tf = [3\ h\ 9\ \text{min}\ (50 \pm 0{,}5)s]$$

Exactitud (Inexactitud = ERROR de MEDICIÓN)

¿A qué hora (tf) fue tomada ESTA fotografía?

tf = [0 ; 24] h = [12±12] h



$tf = [3\ h\ 7\ \text{min}\ (3 \pm 0{,}5)s]$

$tf = [3\ h\ 9\ \text{min}\ (50 \pm 0{,}5)s]$

Exactitud (Inexactitud = ERROR DE MEDICIÓN)

Comparamos la "medida" [Xo±ΔX] con un "valor de referencia" (patrón) [Vo±δV] representado por (***)

[Vo±δV] seria el supuesto "valor real" del mensurando

El **intervalo de incertidumbre de la medida,** ¿contiene al **"intervalo" del patrón (***)**?

No Sí No

------------(***)---------[---------------●------(***)-----]-(***)------------------->

x_m x_o x_M X(unidades)

◄--------------------2ΔX--------------------►

ERROR DE MEDICIÓN: diferencia entre la "medida" [Xo±ΔX] y un "valor de referencia" [Vp±δV], el supuesto "valor real" de la magnitud.

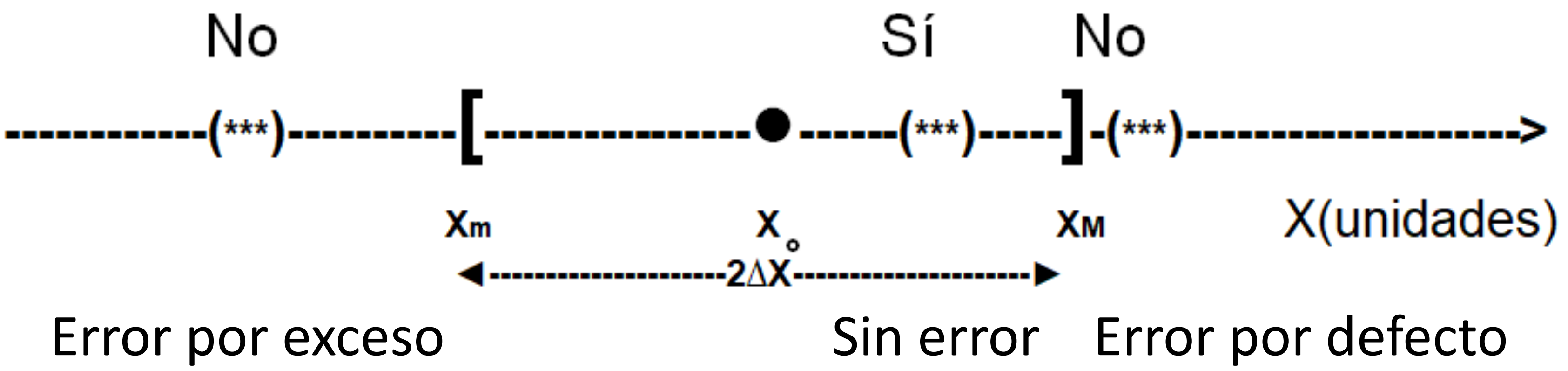
E = [Xo±ΔX] - [Vo±δV] = [(Xo – Vo) ± (ΔX+δV)] unidades

Exactitud (Inexactitud = ERROR DE MEDICIÓN)

ERROR DE MEDICIÓN: diferencia entre la "medida" [Xo±ΔX] y un "valor de referencia" (***) [Vp±δV], el supuesto "valor real" de la magnitud

$$E = [Xo \pm \Delta X] - [Vo \pm \delta V] = [(Xo - Vo) \pm (\Delta X + \delta V)] \text{ unidades}$$

Puede resultar en un **Error por Exceso (E > 0)**, o en un **Error por Defecto (E < 0)**



Exactitud –> Inexactitud = Error de medición

El **intervalo de incertidumbre de la medida,** ¿contiene al **"valor" de la magnitud, V ≡ (***)**?

No Sí No

------------(***)----------[----------------●------(***)-----]-(***)-------------------->

x_m x_o x_M X(unidades)

◄--------------------2ΔX-------------------►

ERROR DE MEDICIÓN: diferencia entre la "medida" [Xo±ΔX] y un "valor de referencia" [Vp±δV], el supuesto "valor real" de la magnitud

$$E = [Xo \pm \Delta X] - [Vo \pm \delta V]$$

El **ERROR DE MEDICIÓN también** es un **intervalo de incertidumbre.**

$$E = [Xo \pm \Delta X] - [Vo \pm \delta V] = Eo \pm \Delta E$$

Donde $Eo = Xo - Vo$

y la **incertidumbre del ERROR** es $\Delta E = \Delta X + \delta V$

Exactitud (VIM) ----------> Inexactitud = Error de medición

ERROR DE MEDICIÓN: diferencia entre la "medida" [Xo ± ΔX] y un "valor de referencia" [Vo ± δV], el supuesto "valor real" de la magnitud

$$E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V]$$

El **ERROR DE MEDICIÓN también** es un **intervalo de incertidumbre.**

La **incertidumbre del ERROR** es $\Delta E = \Delta X + \delta V$

Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012

(http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)

ATENCIÓN
No es "Error Sistemático"

Exactitud ----------> Inexactitud = Error de medición

Como se corrige?

1) **Ajuste del instrumento:** Se modifican controles (mandos) "de ajuste" en el instrumento de medición hasta que las "lecturas" coincidan con el "valor de referencia" → se ha eliminado el "ERROR", no la incertidumbre del "ERROR"
   El diseño del instrumento debe contemplar la función de "ajuste"

2) **Calibración del instrumento:**
   a) Se realizan pares de comparaciones entre "lecturas" $X_L = X_o \pm \Delta X$ y "referencias" $V_o \pm \delta V$
   b) Para cada par, se calcula el **ERROR** $E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V] = [(X_o - V_o) \pm (\Delta X + \delta V)]$

3) **Corrección del error de la medición:**
   c) Para nuevos valores "leídos" X_L, el ERROR seria $E = X_L - X_{\text{"real"}}$
   d) El valor "corregido" es $X_c = X_L - E = [(X_{Lo} - E_o) \pm (\Delta X_L + \Delta E)]$
   donde $\Delta X_c = \Delta X_L + \Delta E = \delta V + 2\,\Delta X_L$

NOTAS: **E** puede obtenerse mediante una única medición o como promedio de varias mediciones.
Debe determinarse **E** para cada zona del rango del instrumento, puede resultar constante en todo el rango.

Ejemplo de Corrección del Error de medición mediante Calibración

Tabla de Calibración

Valor de Referencia Vr (unidad)	Valor de Lectura XL (unidad)	Error durante la calibración E = XL-Vr (unidad)
0,0 ± 0,1	0,3 ± 0,5	+ 0,3 ± 0,6
5,0 ± 0,1	5,5 ± 0,5	+ 0,5 ± 0,6
10,0 ± 0,1	9,8 ± 1,0	- 0,2 ± 1,1
15,0 ± 0,1	15,0 ± 1,0	0,0 ± 1,1
20,0 ± 0,1	19,5 ± 1,0	- 0,5 ± 1,1

Tabla para corrección por calibración

Valor de Lectura XL (unidad)	Error durante la calibración E (unidad)	Valor corregido Xc = XL – E (unidad)
0,0 ± 0,5	+ 0,3 ± 0,6	- 0,7 ± 1,1
2,3 ± 0,5	+ 0,4 ± 0,6	1,9 ± 1,1
6,5 ± 0,5	+ 0,5 ± 0,6	6,0 ± 1,1
8,2 ± 0,5	+ 0,4 ± 0,8	8,2 ± 1,3
11,2 ± 1,0	- 0,2 ± 1,1	11,4 ± 2,1
16,0 ± 1,0	0,0 ± 1,1	16,0 ± 2,1
19,7 ± 1,0	- 0,5 ± 1,1	20,2 ± 2,1

EJERCICIO: Con los datos de la CALIBRACION, construya una gráfica de **E** vs. **XL**;
Compare con los valores de **E** en la Tabla de CORRECCION, si es necesario corríjala y rehaga los cálculos

Exactitud ----------> Inexactitud = Error de medición

Cómo se obtiene el "valor de referencia" para calibrar un instrumento?

a) Se dispone de un patrón de medición con trazabilidad $\rightarrow V_p = V_{po} \pm \delta V_p$

Se MIDE el patrón y se obtiene el intervalo $X_L = X_o \pm \Delta X$

el ERROR se calcula como $E = X_L - V_p = [(X_o - V_{po}) \pm (\Delta X + \delta V_p)]$

b) Se dispone de un instrumento de referencia calibrado *(instrumento de mejor resolución, contrastado con trazabilidad)*

Se mide un mismo mensurando simultáneamente con ambos instrumentos

Se obtienen dos lecturas: $\mathbf{X_L = X_o \pm \Delta X}$ y $V_r = \mathbf{V_{ro} \pm \delta V_r}$

el ERROR se calcula como $E = X_L - V_r = [(X_o - V_{ro}) \pm (\Delta X + \delta V_r)]$

INTERVALO de [10,0 $\pm$ 1,0] min

Precisión (según el VIM)---> Repetibilidad de las medidas (lo contrario de "dispersión")

Al REITERAR el procedimiento de medición puede suceder

a) SE REPITEN los "valores" → son intervalos = respecto de la Incertidumbre de Lectura

si son todos iguales no hay dispersión, **el "resultado" es UN UNICO INTERVALO**

b) NO SE REPITEN los "valores" → son intervalos ≠ respecto de la Incertidumbre de Lectura

al ser "diferentes" hay dispersión → **cuál es el "resultado"?**

Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012 (http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)

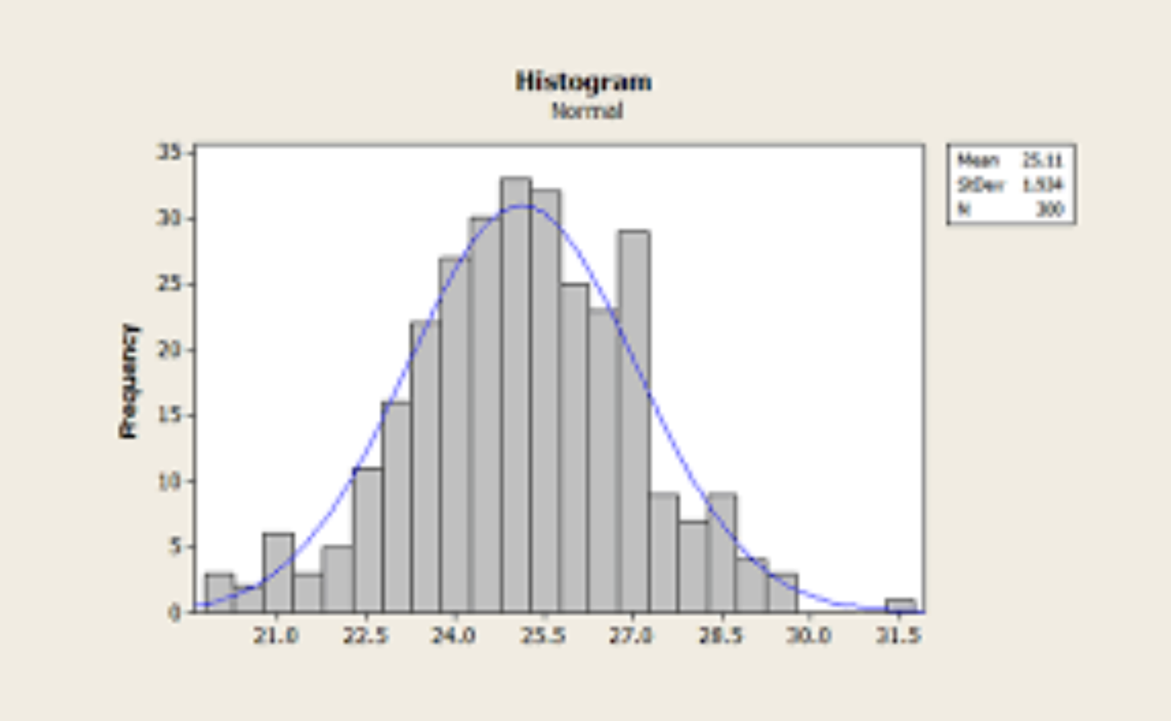
Precisión (según el VIM)

Repetibilidad de las medidas (lo contrario de "dispersión")

Al REITERAR el procedimiento de medición puede suceder

a) SE REPITEN los valores de lectura ⇒ Resultan = respecto de la Incertidumbre de Lectura

b) NO SE REPITEN los valores de lectura ⇒ Resultan ≠ respecto de la Incertidumbre de Lectura



Modelo estadístico "clásico"

se aplica a "valores", **no a "intervalos"!**

$$\langle X \rangle = \int x \; f(x)\, dx \cong (1/N) \sum n_i \, x_i$$

$$\langle X2 \rangle = \int x2 \; f(x)\, dx \cong (1/N) \sum n_i \, x_i 2$$

$$\mathrm{Var} = \langle X2 \rangle - (\langle X \rangle)2$$

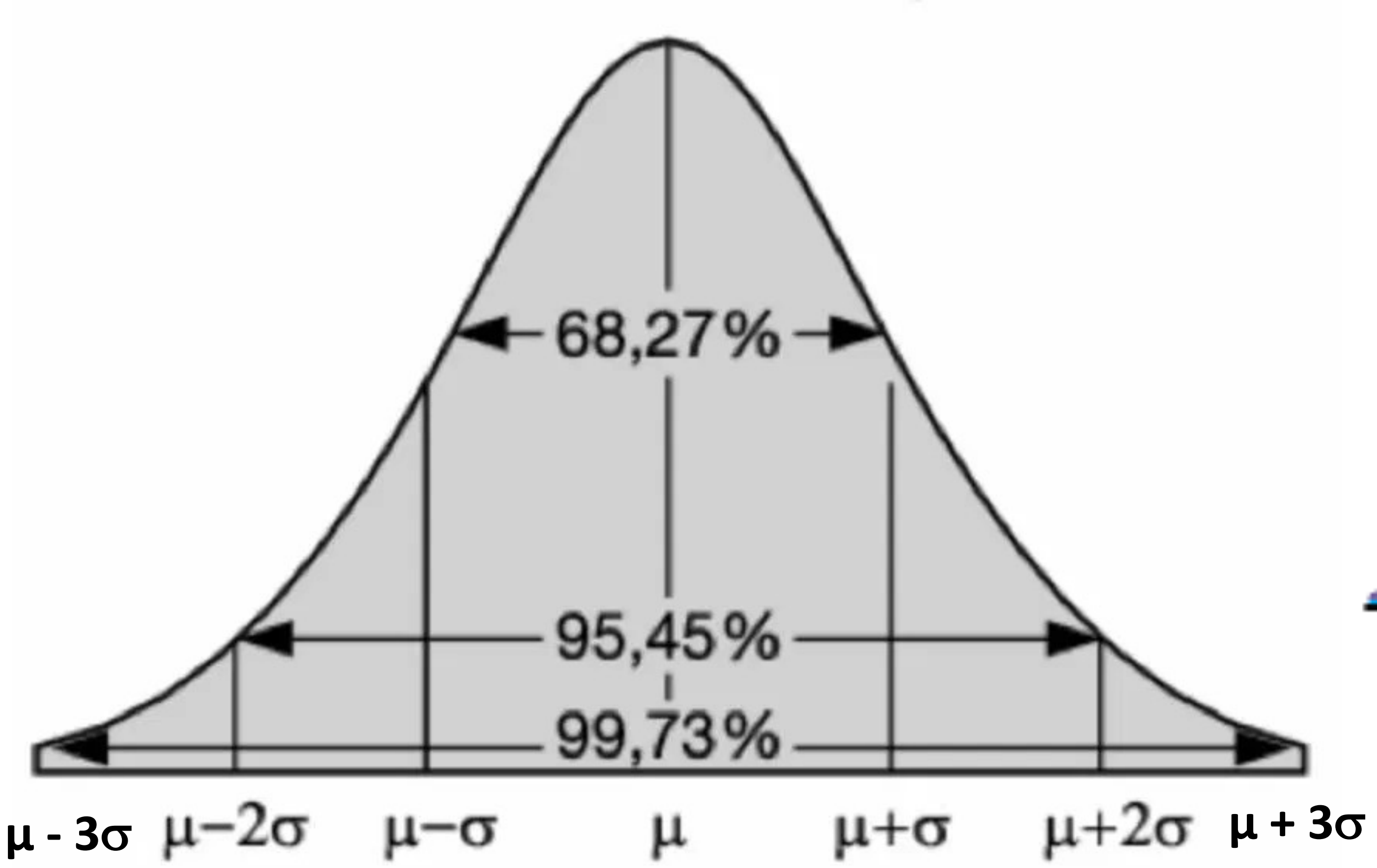
$$\mathrm{DE} = \sqrt{\mathrm{Var}} \quad ; \quad \mathrm{EE} \cong \mathrm{DE} / \sqrt{(N-1)}$$

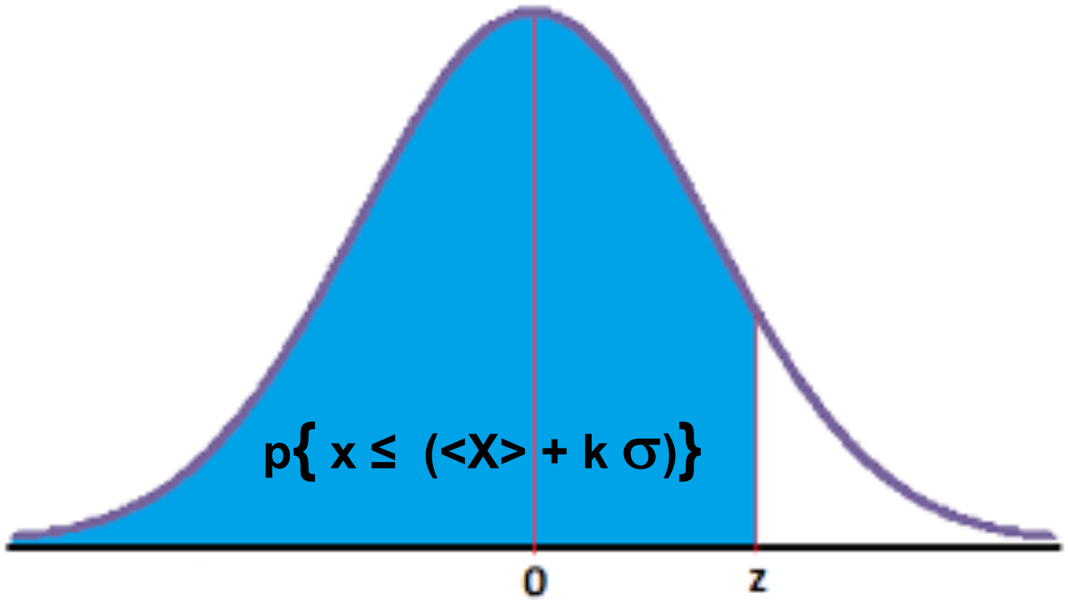
Finalmente: el "resultado" es

$X = [\langle X \rangle \pm \mathrm{DE}]$ o bien $X = [\langle X \rangle \pm \mathrm{EE}]$

Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012 (http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)

Elementos de metrología





$Z = (X - \langle X \rangle) / \sigma$

$p\ \{ z \leq k \}$

Incertidumbre Combinada (según el VIM):

Deben considerarse TODAS las causales de incertidumbre

Teoría de Probabilidades:

Si en un fenómeno (el proceso de medición) intervienen fuentes causales aleatorias INDEPENDIENTES, la VARIANZA total es la suma de las varianzas individuales de cada fuente causal.

Fuentes de Incertidumbre:

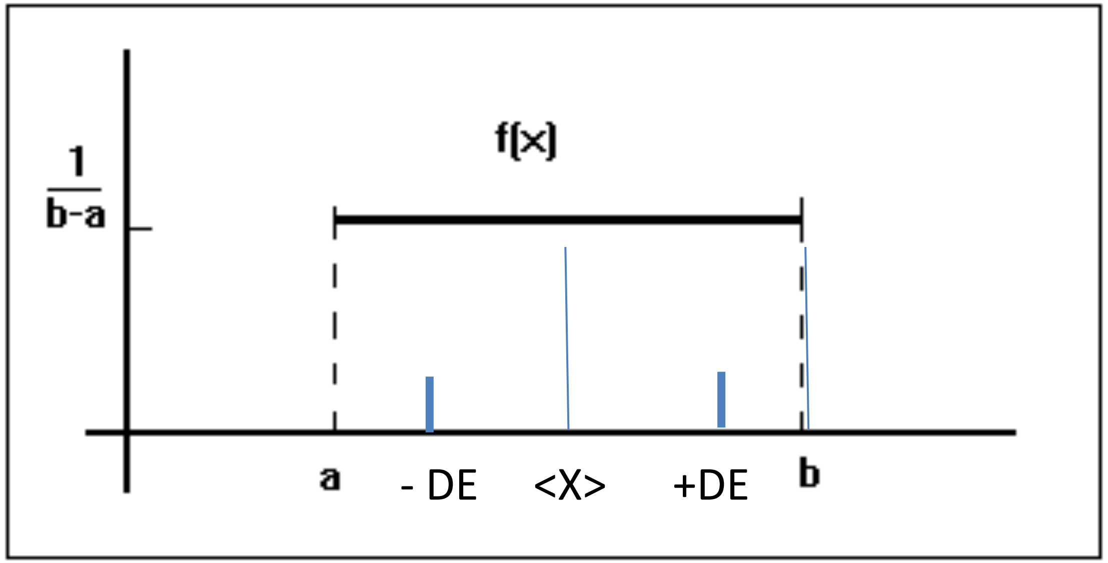
Incertidumbre de lectura: **U_L** de naturaleza $NO\ ESTOCASTICA$

Incertidumbre de calibración: **U_{cal}** puede ser o no $ESTOCASTICA$

Incertidumbre por dispersión: **U_p** de naturaleza $ESTOCASTICA$

Incertidumbre Combinada (según el VIM): Cálculo de U_L

Paso I: En el proceso de ‘lectura” se genera un intervalo de incertidumbre $[X_o \pm \Delta X_L]$ de naturaleza no aleatoria. Se asocia al intervalo de incertidumbre por lectura, una distribución uniforme de probabilidad, **f(x)**



Paso II: Se **i**gualan los extremos de la distribución uniforme, con los extremos del intervalo $[X_o \pm \Delta x]$

$a = X_o - \Delta X_L$, $b = X_o + \Delta X_L$ $\rightarrow$ $(b-a) = 2\,\Delta X_L$

Paso III: Se calculan los parámetros de ESTADISTICA DESCRIPTIVA de la distribución uniforme

$$\langle X \rangle = \int x\, f(x)\, dx = (b-a)/2 = 0{,}5\,(b-a)$$
$$\langle X^2 \rangle = \int x^2 f(x)\, dx = (a^2 + ab + b^2)/3$$
$$Var = (\langle X^2 \rangle - (\langle X \rangle)^2) = ((b-a)^2)/12 = 0{,}0833\,(b-a)^2$$
$$DE = \sqrt{Var} = (b-a)/\sqrt{12} = 0{,}289\,(b-a)$$
$$p\{x\, \varepsilon\, [\langle X \rangle \pm DE]\} = \int f(x)\, dx = 1/\sqrt{3} = 0.577 \text{ --> } \mathbf{57{,}7\%}$$

Paso IV: Se define **$U_L = \pm DE_{dist.unif.}$** ; el DE por “lectura”

Resulta en $U_L = \pm (b-a)/\sqrt{12} = \pm 2\,\Delta X_L/\sqrt{12}$

$$\mathbf{U_L = \pm \Delta X_L/\sqrt{3} = \pm 0{,}577\,\Delta X_L}$$

Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 201
(http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)

Incertidumbre Combinada (según el VIM)

Incertidumbre de Lectura:

Resolución = $\pm$ ΔX_L ; intervalo (b-a) = 2 ΔX_L

$(U_L)2$ = Varianza = ((b-a)2) / 12 = 0,0833 x 4 x $(\Delta X_L)2$ = 3,33 $(\Delta X_L)2$

Incertidumbre de Calibración:

Incertidumbre del patrón (tolerancia) = $\pm$ δV; Resolución del instrumento = $\pm$ ΔX_L

$(U_{Cal})2$ = Varianza = $((\delta V + 2\ \Delta X_L)2)$ / 12 **= 0,0833 $((\delta V + 2\ \Delta X_L)2)$**

Incertidumbre por dispersión (precisión):

$(U_p)2$ = Varianza = DE2

Incertidumbre combinada:

$UC = \sqrt{\ (\ (UL)2\ +\ (UCal)2 + (Up)2\ )}$

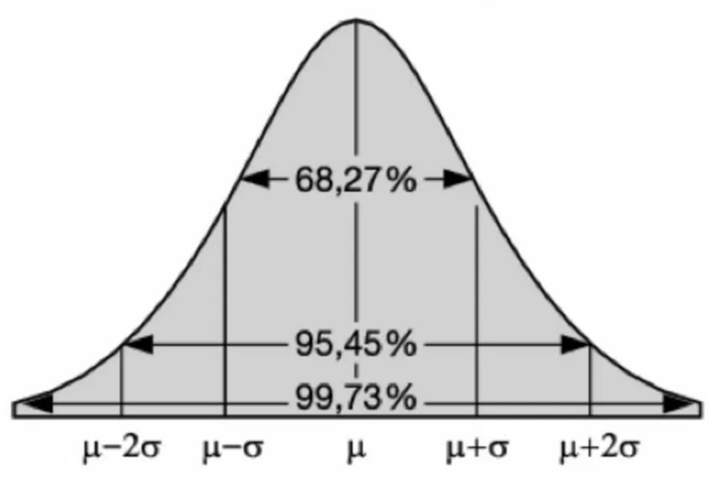
Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012 (http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)

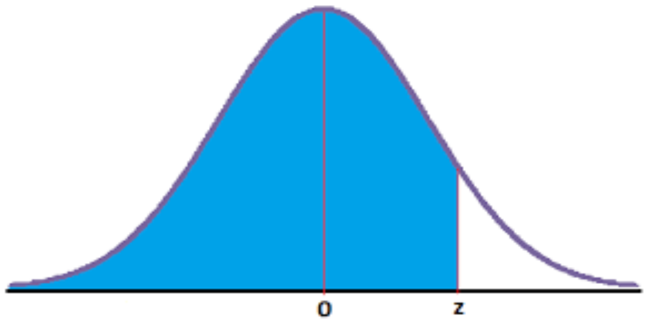
Incertidumbre Expandida (según el VIM)

Se asume que todo el proceso de medición se describe por una distribución normal con media **<X>** y **DE = Uc** $= \sigma$ (incertidumbre combinada del proceso de medición).

Definiendo la incertidumbre expandida **Ue = k Uc**, se sigue que el **intervalo de confianza** x = <X> ± Ue expresa la la probabilidad **p(k,x)** de que el valor del mensurando **x** se encuentre en el intervalo <X> ± k Uc.

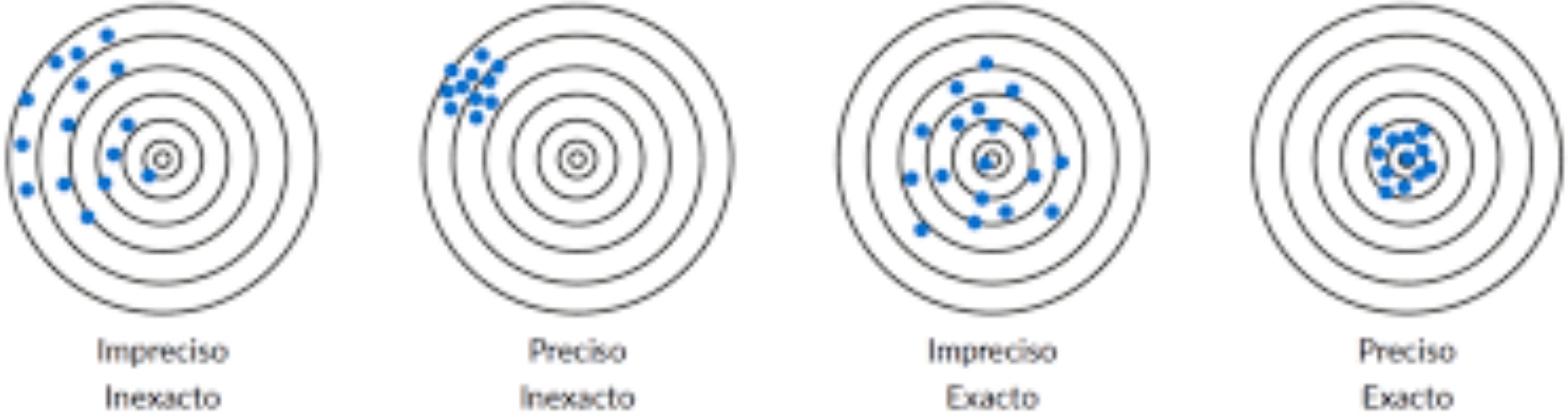
Para k = 1, p(1,x) = 68%	**p(k,x) = 90%**	**si k = 1,64**	**Ue= 1,64 Uc**
Para k = 2, p(2,x) = 95,5%	**p(k,x) = 95%**	**si k = 1,96**	**Ue= 1,96 Uc**
Para k = 3, p(3,x) = 99,7%	**p(k,x) = 99%**	**si k = 2,58**	**Ue= 2,58 Uc**





p(k,x) = p {x ≤ (<X> + k Uc)}
Equivale a **p(z ≤ k)**
El estadístico **Z = (x - <X>) / Uc**
tiene distribución **Normal (0;1)**

Referencia: Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012 (http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html)


Impreciso
Inexacto
Preciso
Inexacto
Impreciso
Exacto
Preciso
Exacto

Bibliografía de consulta

Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM 1995 with minor corrections); (2008)
JCGM 100:2008
https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

Vocabulario Internacional de Metrología: Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM) 3ª Edición en español 2012 Traducción de la 3ª edición del VIM 2008, con inclusión de pequeñas correcciones (2012)
JCGM 200:2012
https://www.cem.es/sites/default/files/vim-cem-2012web.pdf

Mar PÉREZ HERNÁNDEZ (2012)
Estimación de incertidumbres. Guía GUM
e-medida. Revista Española de Metrología. Diciembre 2012
https://www.uv.es/meliajl/Docencia/WebComplementarios/GuiaGUM_e_medida.pdf

FIN de la 3ª CLASE de METROLOGIA

Preguntas?