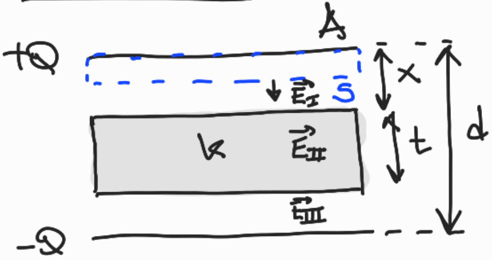
Solución Examen Física 3 (1153) 19/02/2025

EJERCICIO 1



a) ley de Gauss: (con dieléctrico) $\oint_S k\vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ ← carga libre encerrada por la sup. cerrada S

k ← constante dieléctrica ($k=1$ para el vacío)

Consideremos S en forma de prisma de sección A con una de sus caras en la placa + del capacitor y la otra cara paralela a dicha placa, en la región de interés. De ese modo, la carga libre encerrada por S es siempre Q.

El campo eléctrico es ortogonal a las placas y su sentido es de la placa + a la placa −

región I (distancia a placa +Q menor a x)

$$E_I A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_I = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

región II (distancia a la placa +Q entre x y t+x)

$$k E_{II} A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{II} = \frac{Q}{k\varepsilon_0 A} = \frac{E_I}{k}$$

región III (distancia a la placa +Q entre x+t y d)

$$E_{III} A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{III} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = E_I$$

En la región sin diel $\boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}}$

y con diel $\boxed{E = \frac{Q}{k\varepsilon_0 A}}$

independiente de x, t y d

b) $$\Delta V = V_{(+)} - V_{(-)} = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{(+)}^{(-)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_I x + E_{II} t + E_{III}(d-t-x) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left[\cancel{x} + \frac{t}{k} + d - t - \cancel{x}\right]$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left[d + \left(\frac{1}{k}-1\right)t\right]}$$

c) $$\Delta V = \frac{Q}{C} \rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{Q}\varepsilon_0 A}{\cancel{Q}\left[d + \left(\frac{1}{k}-1\right)t\right]} = \frac{k\varepsilon_0 A}{kd + (1-k)t}}$$

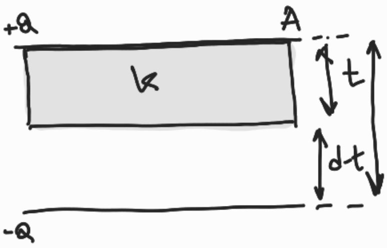
i) $t \to 0$ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$, al hacer el espesor del bloque dieléctrico tender a cero, recuperamos la capacidad del capacitor vacío.

ii) $t \to d$ $C = \frac{k\varepsilon_0 A}{\cancel{kd} + d - \cancel{kd}} = k\frac{\varepsilon_0 A}{d} = kC_0$, el bloque llena todo el espacio entre las placas. La capacidad es k veces la capacidad del capacitor vacío.

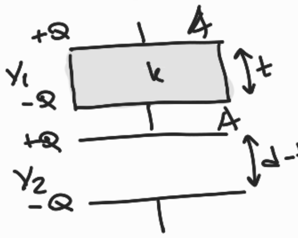
iii) $k \to 1$ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$, k=1 es para el vacío por lo que nuevamente recuperamos C_0.

iv) $k \to \infty$ $\left(\frac{1}{k} \to 0\right)$ $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t}$, el bloque se comporta como conductor ($E_{II} = \frac{E_I}{k} \to 0$) y la capacidad resulta la de un capacitor vacío con distancia d-t entre sus placas.

d) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{\left[d + \left(\frac{1}{k}-1\right)t\right]}$ es independiente de x y por tanto de la posición del bloque entre las placas. Por tanto podemos considerar la siguiente configuración, con el bloque dieléctrico junto a una de las placas (x=0):



≈



$C_1 = \frac{k\varepsilon_0 A}{t}$

$C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d-t}$

Capacitores C_1 y C_2 en serie: $\Delta V = V_1 + V_2$

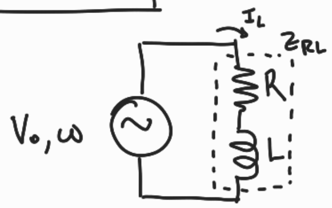
$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{t}{k\varepsilon_0 A} + \frac{d-t}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{t}{k} + d - t\right] = \frac{d + \left(\frac{1}{k}-1\right)t}{\varepsilon_0 A} \rightarrow C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d + \left(\frac{1}{k}-1\right)t}$$

(mismo resultado de la parte c)

— X —

EJERCICIO 2



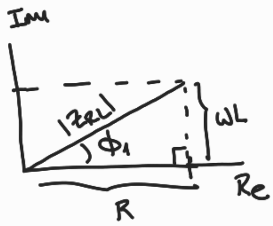
a) $\boxed{X_L = \omega L}$

$\boxed{Z_{RL} = R + jX_L = R + j\omega L}$

$\boxed{Z_{RL} = |Z_{RL}| e^{j\phi_1}}$

con $\boxed{|Z_{RL}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ y

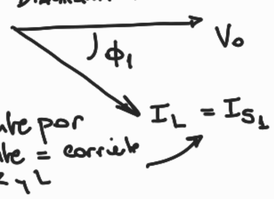
$\operatorname{tg} \phi_1 = \dfrac{\omega L}{R} \Rightarrow \boxed{\phi_1 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)}$



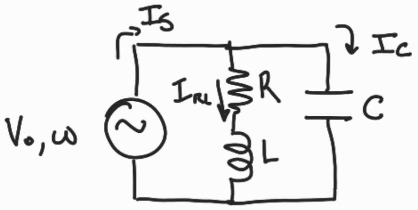
b) $V_0 = Z_{RL} I_L = |Z_{RL}| e^{j\phi_1} I_L \Rightarrow \boxed{I_L = \dfrac{V_0}{|Z_{RL}|} e^{-j\phi_1} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j\phi_1}}$

$\boxed{FP_1 = \cos\phi_1 = \dfrac{R}{|Z_{RL}|} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}} \left(= \cos\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)\right]\right)$

DIAGRAMA FASORIAL



c)



$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

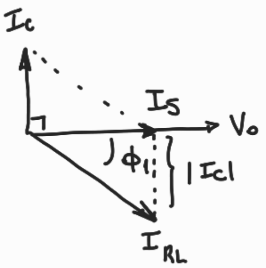
Como aquí $V_0 = Z_{RL} I_{RL}$ y de la configuración anterior $V_0 = Z_{RL} I_L$

$\Rightarrow \boxed{I_{RL} = I_L}$ calculado antes (pasa la misma corriente por R y L en ambas configuraciones)

También $V_0 = Z_C I_C = \dfrac{1}{j\omega C} I_C \rightarrow \boxed{I_C = j\omega C V_0 = (\omega C V_0) e^{j\pi/2}}$ *

$I_S = |I_S| e^{j\phi_S}$ con $FP_2 = \cos\phi_S = 1 \rightarrow \phi_S = 0 \Rightarrow I_S = |I_S|$ (en fase con el voltaje V_0)

DIAGRAMA FASORIAL



$I_S = I_{RL} + I_C$

Del diagrama vemos que:

$|I_S| = \underbrace{|I_{RL}|}_{I_L} \underbrace{\cos\phi_1}_{FP_1} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \dfrac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \dfrac{V_0 R}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \boxed{I_S = \dfrac{V_0 R}{R^2 + (\omega L)^2}}$

$|I_C| = |I_{RL}| \underbrace{\operatorname{sen}\phi_1}_{\frac{\omega L}{|Z_{RL}|} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \dfrac{\omega L V_0}{R^2+(\omega L)^2} \underset{\substack{\text{de } * \\ |I_C| = \omega C V_0}}{=} \omega C V_0 \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{L}{R^2+(\omega L)^2}}$

Obs: también puede hallarse C a partir de la impedancia equivalente del circuito:

$Z_{eq} = |Z_{eq}| \underbrace{e^{j\phi_S}}_{1} = |Z_{eq}|$ (Z_{eq} es real) ($FP_2 = \cos\phi_S = 1 \rightarrow \phi_S = 0$)

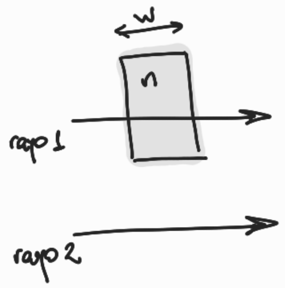
$\underbrace{\dfrac{1}{Z_{eq}}}_{\text{real}} = \dfrac{1}{Z_C} + \dfrac{1}{Z_{RL}} = j\omega C + \dfrac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \dfrac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \overbrace{\underbrace{\left[\omega C - \dfrac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]}_{0}}^{\text{parte imaginaria}} \rightarrow \omega C = \dfrac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \rightarrow \boxed{C = \dfrac{L}{R^2 + (\omega L)^2}}$

d) $\boxed{\bar{P} = \dfrac{1}{2} V_0 |I_S| \underbrace{\cos\phi_S}_{FP_2 = 1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{V_0^2 R}{R^2 + (\omega L)^2}}$

—— x ——

EJERCICIO 3

a)

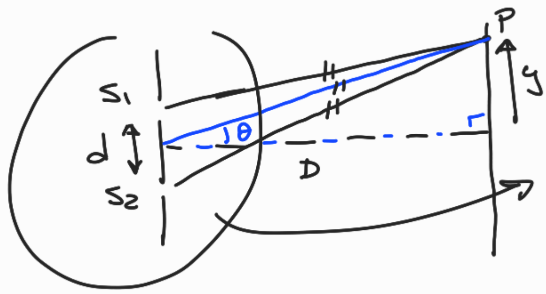


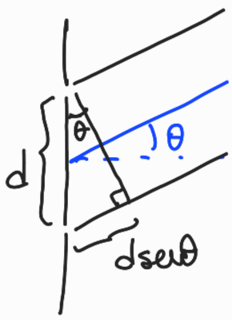
$x_1 = w = v_n t = \frac{c}{n} t \rightarrow ct = nw$

$x_2 = ct = nw$

$$\boxed{\Delta x = x_2 - \underset{w}{\underset{\shortparallel}{x_1}} = nw - w = (n-1)w}$$

b) En el experimento de Young de la doble rendija, con la pantalla a distancia D ($D \gg d$), la diferencia de camino óptico entre los haces que llegan desde S_1 y S_2 a un punto P a una distancia y del centro de la pantalla está dado por:

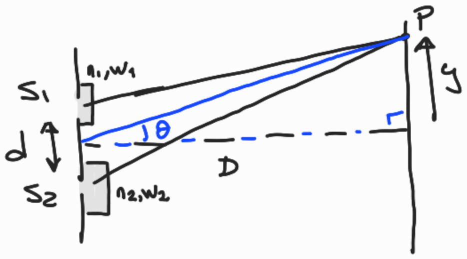




$$\Delta x = S_2P - S_1P$$
$$= \underbrace{d\,\mathrm{sen}\theta}_{\approx \mathrm{tg}\theta} \approx d\,\mathrm{tg}\theta = \frac{d\,y}{D}$$

(pantalla lejana, θ pequeño)

Al colocar las láminas hay que considerar una diferencia de camino óptico adicional, debido a que la luz viaja con diferente velocidad en c/u de las láminas y en el vacío:



$$\Delta x' = (S_2P)' - (S_1P)'$$
$$= [S_2P + (n_2-1)w_2] - [S_1P + (n_1-1)w_1]$$
$$= \underbrace{S_2P - S_1P}_{\frac{dy}{D}} + (n_2-1)w_2 - (n_1-1)w_1 \quad (*)$$

interferencia constructiva $\Delta x' = m\lambda = 0$ $\quad m = 0$ (máximo central sin rendijas)

$$\Rightarrow \frac{d\,y_0}{D} + (n_2-1)w_2 - (n_1-1)w_1 = 0$$

$$\boxed{y_0 = -\frac{D}{d}\left[(n_2-1)w_2 - (n_1-1)w_1\right]}$$

Obs: se verifica que para $n_2 = n_1$ y $w_2 = w_1$ (dos láminas idénticas), el máximo vuelve al centro de la pantalla. Ocurre también cuando $n_2 = n_1 = 1$ (vacío) independientemente de w_1 y w_2.

[(*) Alternativamente:

$\Delta x' \approx \frac{dy}{D} + \Delta L$ ← diferencia de camino óptico adicional debido a las láminas

con $\Delta L = L_2 - L_1 = [n_2 w_2] - [n_1 w_1 + \underset{1\,(\text{vacío})}{\underset{\shortparallel}{n_0}}(w_2 - w_1)] = (n_2-1)w_2 - (n_1-1)w_1$]

—— X ——