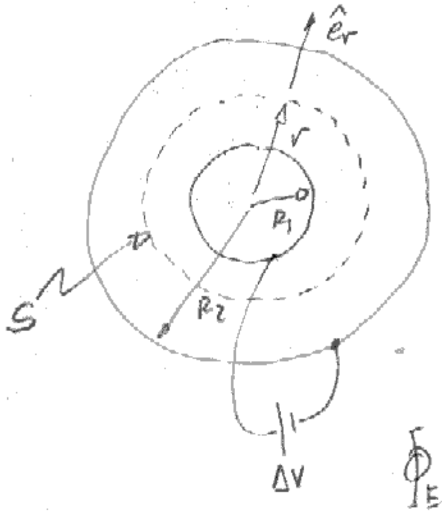
Examen de Física 3

Julio de 2023

Ejercicio 1

(a) Ley de Gauss: El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada, multiplicado por la constante de permitividad eléctrica del medio, es igual a la carga eléctrica neta encerrada dentro de dicha superficie.

(b) La capacidad (o capacitancia) de un sistema eléctrico compuesto por dos conductores permite calcular la carga neta Q que se acumula en uno de los conductores cuando se establece una diferencia de potencial eléctrico ΔV entre ellos a través de la expresión $Q = C\Delta V$.



$$\vec{E} = E\,\hat{e}_r \;, \quad -\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

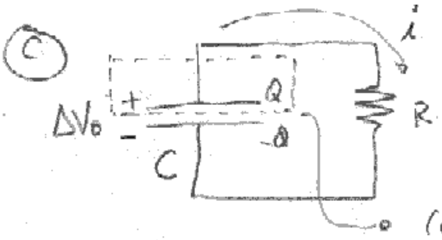
Por ley de Gauss $\underbrace{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{\Phi_E} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Phi_E = E(r)\,.\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

$$-\Delta V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \longrightarrow \boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

(c)



$$0 = -\Delta V_0 + Ri \longrightarrow \frac{q}{C} = -R\frac{dq}{dt} \longrightarrow$$

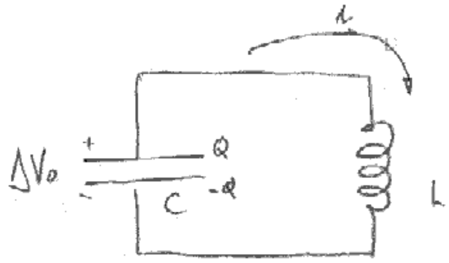
conservación de la carga $\Rightarrow$ $i = -\dfrac{dq}{dt}$

$$-\frac{1}{RC} = \frac{1}{q}\cdot\frac{dq}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad -\int_{t=0}^{t}\frac{dt}{RC} = \int_{t=0}^{t}\frac{1}{q}\frac{dq}{dt}\,dt = \int_{q(t=0)=q_0}^{q(t)}\frac{dq}{q} = \ln\left(\frac{q}{q_0}\right)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(q/q_0\right) \rightsquigarrow q(t) = q_0\, e^{-t/RC}$$

$$\left(i = -\frac{dq}{dt}\right) \longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC}}$$

(d)



$$0 = -\Delta V_0 + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} = -L\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\longrightarrow q(t) = A\cos(\omega t) \;/\; \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\left.\begin{array}{l} q(t=0) = Q \\ i(t=0) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow q(t) = Q\cos(\omega t)$$

$$\boxed{i(t) = \frac{Q}{\sqrt{LC}}\,\mathrm{sen}(\omega t)}$$

$$\boxed{i_{max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}}$$

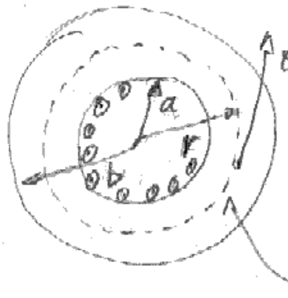
Ejercicio 2

(a) Considere un conductor eléctrico por el cual circula una corriente i. La auto-inductancia L de este conductor permite calcular la fem inducida ε entre los extremos del conductor a través de la expresión $\varepsilon = L \frac{di}{dt}$.

La fem. (fuerza electro-motriz) inducida es la integral de la componente del campo eléctrico inducido a lo largo de una curva por el conductor. Este campo eléctrico es inducido por las variaciones del flujo de campo magnético generado por la propia corriente por el conductor.

La auto-inductancia L sólo depende de la geometría del conductor y de la permeabilidad magnética del medio donde se induce el flujo magnético.

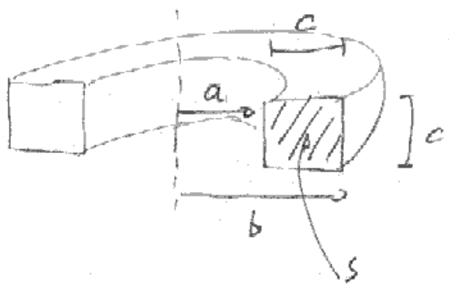
(b)



Ley de Ampère $= \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu N i$

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu N i$$

$$\vec{B} = B(r)\,\hat{e}_\varphi = \frac{\mu N i}{2\pi r}\,\hat{e}_\varphi$$



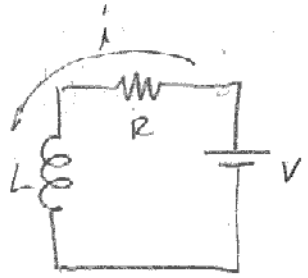
$$\vec{B} = \frac{\mu N i}{2\pi r}\,\hat{e}_\varphi$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{\mu N^2 i}{2\pi}\, c \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu N^2 i c}{2\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \underbrace{\frac{\mu N^2 c}{2\pi} \operatorname{Ln}(b/a)}_{L}\, \frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L = \frac{\mu N^2 c}{2\pi} \operatorname{Ln}(b/a)}$$

(c)



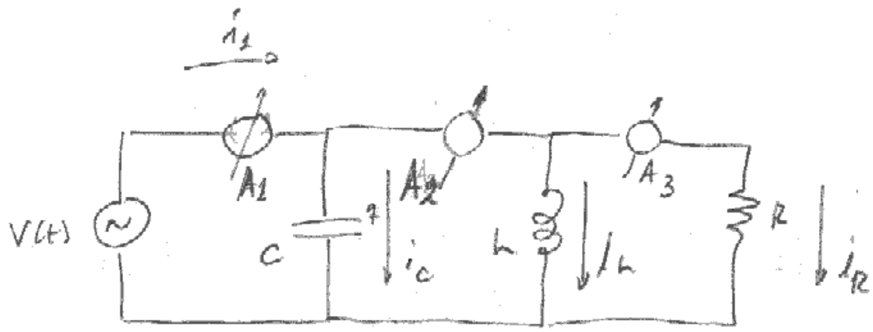
$t = \varphi$

$$i_0 = \frac{V}{R} \Rightarrow E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{L}{2} \frac{V^2}{R^2}$$

La energía "acumulada" en el campo magnético de la bobina en $t = \varphi$ es enteramente disipada en la resistencia

$$\boxed{E_R = \frac{4 N^2 C}{4\pi} \ln(b/a) \frac{V^2}{R^2}}$$

Ejercicio (3)



(a) $i_1 \to \infty$

(b) $i_1 \to \infty$

(c)

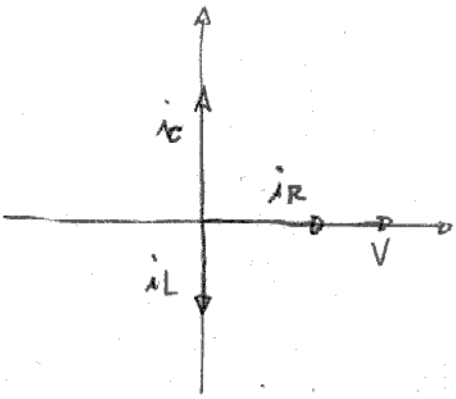
$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(V_0 e^{j\omega t}\right)$$

$$q = C\, V(t) \longrightarrow i_c = C \frac{dV}{dt} = -C V_0 \omega \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$i_c = j\omega C V_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{d i_L}{dt} = \frac{V(t)}{L} \longrightarrow i_L = \frac{V_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)}{\omega L}$$

$$i_L = -j \frac{V_0}{\omega L} e^{j\omega t}$$



$$i_R = \frac{V(t)}{R} \longrightarrow i_R = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{R}$$

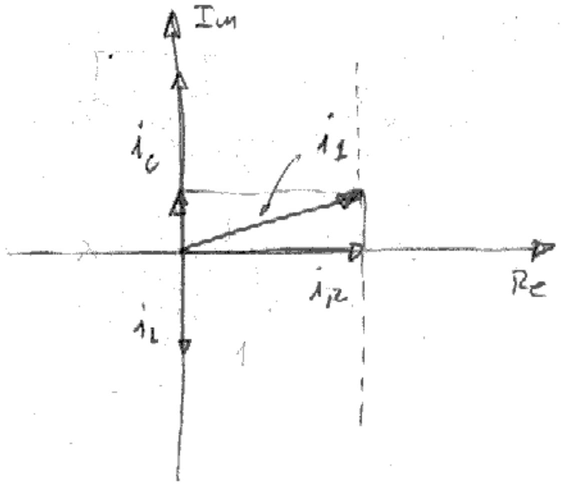
$$i_R = \frac{V_0}{R} e^{j\omega t}$$

(d) Del diagrama fasorial se desprende fácilmente que $\dot{i}_{1\,min} = \dot{i}_R$, lo que ocurre cuando $|\dot{i}_C| = |\dot{i}_L|$

$$\Downarrow$$

$$j\omega C V_0 = j\frac{V_0}{\omega L}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

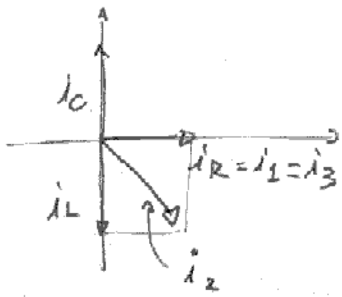


(e)

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_R = \frac{V_0}{R}$$

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_L + \dot{i}_R = \left| \frac{V_0}{R} - j\frac{V_0}{\omega L} \right| = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{C}{L}}$$

$$\dot{i}_3 = \dot{i}_R = \frac{V_0}{R}$$

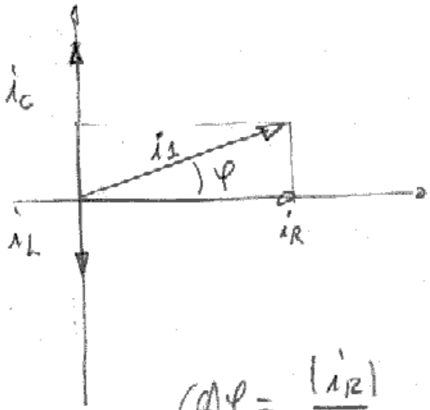


(f)

$$\overline{P}_{\omega_0} = \frac{1}{2}|V_0||\dot{i}_R| = \frac{V_0^2}{2R}$$

$$\overline{P}_{2\omega_0} = \frac{1}{2} V_0 |\dot{i}_1| \cos\varphi = $$

$$= \frac{1}{2} V_0 |\dot{i}_1| \cdot \frac{|\dot{i}_R|}{|\dot{i}_1|} = \overline{P}_{\omega_0}$$



$$\cos\varphi = \frac{|\dot{i}_R|}{|\dot{i}_1|}$$

El cambio de frecuencia solo cambia las corrientes por el condensador e inductancia, no modifica la corriente (y voltaje) por la resistencia que es el único elemento disipativo.