Soluciones del Primer Parcial de Física 3, Segundo Semestre 2023

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

23/09/2023

Problema 1

a) Mucho tiempo después de conectado el capacitor está totalmente cargado y no circula corriente por el mismo. Elegimos la corriente I saliendo del borne positivo de la batería V. Debido a que está en paralelo con R_2 tenemos que $V_C = \frac{Q}{C} = V_{R_2} = IR_2$. La corriente en este régimen está dada por el circuito en serie conteniendo: V, R_1 y R_2, por lo tanto, $I = \frac{V}{R_1+R_2}$.
Juntando todo, tenemos que

$$Q = \frac{CR_2V}{R_1 + R_2}. \tag{1}$$

Observamos que el valor de la carga es positivo, esto condice con haber tomado la placa positiva del capacitor como aquella que se encuentra conectada al borne positivo de la batería.

b) Los únicos elementos que disipan energía del circuito conectado a la batería son R_1 y R_2, por lo que la potencia está dada por

$$P = P_1 + P_2 = (R_1 + R_2)I^2 = \frac{V^2}{R_1 + R_2}. \tag{2}$$

c) El capacitor se encuentra totalmente cargado con energía almacenada en el campo eléctrico en su interior. El valor de esta energía esta dado por

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CR_2^2V^2}{2(R_1 + R_2)^2} \tag{3}$$

d) Las resistencias R_1 y R_2 se encuentran en paralelo, por lo que la resistencia equivalente está dada porla siguiente ecuación,

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}. \tag{4}$$

e) Tomamos una corriente saliente de la placa marcada con + en el capacitor, por lo que tenemos nuestra primera ecuación: $I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. La ley de mallas aplicada a este sistema moviéndonos en sentido antihorario es la siguiente: $\frac{Q}{C} - R_{eq}I = 0$. Sustituyendo la intensidad tenemos

$$\frac{Q}{C} - R_{eq}\left(-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right) = 0. \tag{5}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (5) e imponiendo la condición inicial $Q(t=0) = \frac{CR_2V}{R_1+R_2}$ obtenemos

$$Q(t) = \frac{CR_2V}{R_1+R_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_{eq}C}}. \tag{6}$$

Por lo que la corriente está dada por:

$$I(t) = -\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{R_2V}{R_{eq}(R_1+R_2)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_{eq}C}} = \frac{V}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R_{eq}C}} > 0. \tag{7}$$

Como el resultado de la corriente es positivo podemos concluir que el sentido tomado inicialmente es el correcto.

Problema 2

a) Para esta primera parte llamaremos $q'(r)$ a la carga encerrada por una superficie esférica de radio r.

Caso $r < 2a$

La carga se distribuye de manera uniforme en toda la esfera entonces, por un lado sabemos que

$$\rho = \frac{2Q}{\frac{4\pi}{3}(2a)^3}$$

Por otro lado al ser la densidad uniforme

$$\rho = \frac{q'(r)}{\frac{4\pi}{3}r^3}$$

$$q'(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2Q}{\frac{4\pi}{3}(2a)^3}\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$q'(r) = \frac{Qr^3}{4a^3}$$

Caso $2a < r < 3a$

La densidad ρ_2 es la carga total sobre el volumen total

$$\rho_2 = \frac{-Q}{\frac{4\pi}{3}((3a)^3-(2a)^3)} = \frac{-Q}{\frac{4\pi}{3}(19a^3)} \tag{8}$$

La carga es la densidad por el volumen, entonces

$$q'(r) = \frac{-Q}{19a^3}(r^3 - 8a^3) + 2Q$$

Caso $r > 3a$:

Tengo carga +2Q-Q=Q

b)

Para el campo eléctrico aplicamos Gauss $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$

Identificamos que tenemos una simetría esférica. En consecuencia, el campo eléctrico es radial y el módulo del campo es uniforme en cualquier esfera concéntrica con las presentes en la letra. Dada esta simetría, tomamos superficies gaussianas a lo largo de esta parte del ejercicio serán superficies esféricas centradas en el origen de las esferas. Recordar que la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$

Caso $r < 2a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\vec{r})4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{4a^3\epsilon_0}$$
$$\vec{E}(r) = \frac{Qr}{16\pi a^3\epsilon_0}\hat{e}_r$$

Caso $2a < r < 3a$
La carga encerrada es $+2Q - \frac{Q}{19a^3}(r^3 - 8a^3)$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\vec{r})4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\left(+2Q - \frac{Q}{19a^3}(r^3 - 8a^3)\right)$$
$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{46}{19r^2} - \frac{r}{19a^3}\right)\hat{e}_r$$

Caso $r > 3a$
La carga encerrada es $+Q$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\vec{r})4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0}\hat{e}_r$$

c) Caso $r > 3a$

$$\begin{aligned} V(\infty) - V(r) &= -\int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_r^\infty \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \\ V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \end{aligned}$$

En la última expresión utilizamos $V(r \to \infty) = 0$
Caso $2a < r < 3a$

$$\begin{aligned} V(3a) - V(r) &= -\int_r^{3a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_r^{3a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{46}{19r^2} - \frac{r}{19a^3}\right)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{46}{19r} + \frac{r^2}{38a^3}\right)\Big|_r^{3a} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[+\frac{46}{19(3a)} - \frac{46}{19r} + \frac{9a^2}{38a^3} - \frac{r^2}{38a^3}\right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{119}{114a} - \frac{r^2}{38a^3} - \frac{46}{19r}\right] \end{aligned}$$

Despejando tenemos que

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{119}{114a} + \frac{r^2}{38a^3} + \frac{46}{19r}\right] + V(3a)$$

Donde $V(3a)$ la obtenemos de la parte anterior

$$V(r = 3a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3a}$$

Finalmente

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{119}{114a} + \frac{r^2}{38a^3} + \frac{46}{19r}\right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{27}{38a} + \frac{r^2}{38a^3} + \frac{46}{19r}\right] \tag{9}$$

d) Planteamos energía en el instante inicial (cuando la partícula esta a una distancia $d = 6a$) y el instante final (cuando la partícula esta a una distancia $d = 3a$)

$$\begin{aligned} K_f + U_f &= K_i + U_i \\ \frac{1}{2}mv_f^2 + q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(3a)} &= \frac{1}{2}mv_i^2 + q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(6a)} \end{aligned}$$

Si queremos que llegue con velocidad nula entonces $v_f = 0$. Por lo que

$$q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(3a)} = \frac{1}{2}mv_i^2 + q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(6a)}$$

De aquí encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_i^2 &= q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(3a)} - q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(6a)} \\ v_i^2 &= \frac{qQ}{12\pi\epsilon_0 am} \\ v_i &= \sqrt{\frac{qQ}{12\pi\epsilon_0 am}} \end{aligned}$$