FÍSICA 3 - Primer parcial - soluciones

Septiembre 2022

Problema 1

a) Considero una superficie Gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L centrada en el cilindro. Se cumple entonces que:

$$\int \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Además, por simetría sabemos que en todos los casos $\vec{E} = E\hat{e}_r$ y $\hat{e}_r \equiv \hat{n}$
Por lo tanto:

1. $r < R$

$$\int E_{\text{in}} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r da = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} \tag{2}$$

   Y en este caso:

$$q_{\text{neta}} = \rho \times \text{Vol del cilindro encerrado por la superficie gaussiana} = \rho \pi r^2 L \tag{3}$$

$$E_{\text{in}}(r) 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{\text{in}}(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \hat{e}_r \tag{4}$$

2. $r > R$
   Ahora

$$q_{\text{neta}} = \rho \times \text{Vol del cilindro encerrado por la superficie de radio } R = \rho \pi R^2 L \tag{5}$$

   Por lo tanto

$$\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{e}_r \tag{6}$$

   Observamos que $\vec{E}_{\text{ext}}(R) = \vec{E}_{\text{in}}(R)$.

b) Aplicando el principio de superposición obtenemos que en la zona de interés $\vec{E}_{\text{total}}(r) = \vec{E}_{\text{in}}^{(+\rho)}(r) + \vec{E}_{\text{in}}^{(-\rho)}(r)$
Por lo tanto

$$\vec{E}_{\text{total}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \hat{e}_r - \frac{\rho}{2\epsilon_0} r' \hat{e}_{r'} \tag{7}$$

dónde r es la distancia medida desde el punto a y e_r es un versor dirigido de a a b con $r' = R - r$ y $\hat{e}_{r'} = -\hat{e}_r$. Obtenemos entonces que el campo es constante y vale

$$\vec{E}_{\text{total}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R \hat{e}_r \tag{8}$$

c) Para obtener la diferencia de potencial entre los puntos a y b integramos la expresión obtenida en la parte anterior.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}_{\text{total}} \cdot d\vec{\ell} = -\left. \frac{\rho R}{2\epsilon_0} r \right|_a^b = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \tag{9}$$

Supongamos $\rho > 0$. Para saber cuál de los dos puntos está a un potencial mayor consideramos una partícula con carga positiva en a. El resultado de la parte b) nos dice que sobre la partícula aparece una fuerza en la dirección de $\hat{e}_r$, es decir que tiende a llevar la partícula hacia el punto b. Por lo tanto, considerando el principio de que las partículas cargadas se dirigen hacia los puntos con menor potencial (si sólo están sometidas a la fuerza eléctrica) concluimos que el potencial de b es menor que el potencial de a. Esto también puede observarse en el resultado siempre negativo obtenido para $V_b - V_a$. Si $\rho < 0$ el signo de la diferencia de potencial se invierte.

Problema 2

a) Capacitancia inicial: $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}$. $C_0 = 8,85 \times 10^{-8}$ F. Carga inicial $Q_0 = C_0 V = 10,6 \mu C$.

b) $U_0 = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} V Q_0 = 6,37 \times 10^{-4}$ J..

c) Despues de separadas las placas la capacitancia es $C_1 = C/2$ por lo tanto la carga es $Q_1 = Q_0/2 = 5,31 \times 10^{-6}$ C.

d) Trabajo efectuado por las baterías: $W_B = V(Q_1 - Q_0) = -\frac{V Q_0}{2} = -U_0 = -6,37 \times 10^{-4}$ J.

e) Después de separadas las placas la energía almacenada en el capacitor es $U_1 = \frac{1}{2} V Q_1 = \frac{U_0}{2}$.

Sea W_F el trabajo efectuado por las fuerza externa. Por conservación de energía $W_F + W_B = U_1 - U_0$. Por lo tanto: $W_F = U_1 - U_0 - W_B = \frac{U_0}{2} - U_0 + U_0 = \frac{U_0}{2} = 3,19 \times 10^{-4}$ J.

Problema 3

1) En el instante inicial la carga es nula por lo que la diferencia de potencial entre los bornes del condensador también lo es. En consecuencia, inmediatamente después de cerrado el interruptor el condensador se comporta como un cable y el circuito consta únicamente de la batería y del resistor de resistencia R_1. Por lo tanto la corriente por el resistor es V/R_1.

2) Luego de esperar mucho tiempo, la carga en el condensador se estabiliza, por ende la corriente que circula por él tiende a cero. Por ende en ese límite, la diferencia de potencial por la resistencia tiende a cero y ésta se comporta como un cable ideal. En consecuencia, el circuito se comporta a tiempos largos como si estuviera únicamente compuesto por el condensador y la batería, por lo que $V = q/C$ o, equivalentemente, $q = VC$.

3) Por la ley de mallas, la diferencia de potencial en el condensador es igual a la del resistor de resistencia R_2 (tomando convenciones de signo apropiadas). En el instante inmediatamente posterior a cerrar el interruptor S_2, la diferencia de potencial en el condensador es $V = q/C$ por lo que la corriente en el resistor de resistencia R_2 es V/R_2.

4) Al esperar mucho tiempo la carga del condensador tenderá a estabilizarse, por lo que la corriente por el condensador tenderá a cero. Entonces a tiempos muy largos la corriente circula exclusivamente por los resistores. Por ende, a los efectos del cálculo de la corriente, el condensador se comporta como un interruptor abierto a tiempos largos. Como entonces los resistores se comportan como si estuvieran en serie, la corriente por R_2 será, para tiempos largos, $V/(R_1 + R_2)$.

   Como ya se mencionó, debido la la ley de mallas la diferencia de potencial en el condensador es igual a la diferencia de potencial en la resistencia R_2. Por ende $q/C = R_2 i_2$. Por esto, la carga luego de esperar mucho tiempo de cerrar S_2 es $q = C R_2 V/(R_1 + R_2)$.