Solución - ejercicio 1

a) Modelamos el capacitor con el dieléctrico como dos capacitores en paralelo donde uno de ellos tiene el dieléctrico completamente dentro de él y el otro está vacío como se observa en la figura:

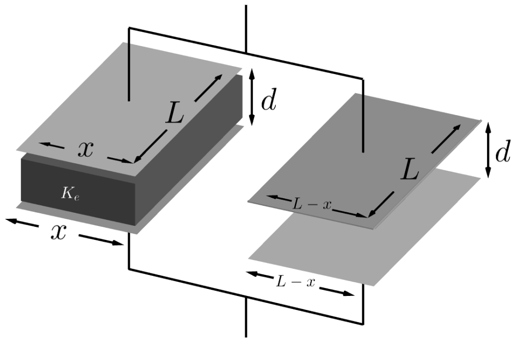


Figura 5

En ambos casos conocemos una expresión para la capacitancia en función de las medidas respectivas de cada placa:

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 K_e x L}{d} \qquad\qquad C_0 = \frac{\varepsilon_0 (L-x) L}{d}$$

Luego, podemos hallar la capacitancia equivalente del sistema:

$$C = C_{eq} = C_e + C_0 = \frac{\varepsilon_0 x L (K_e - 1) + \varepsilon_0 L^2}{d}$$

b) La carga máxima que alcanza el capacitor está dada por la expresión:

$$Q_0 = V C_e = V \frac{\varepsilon_0 x L (K_e - 1) + \varepsilon_0 L^2}{d}$$

Sustituyendo el valor de x hallado:

$$Q_0 = \frac{2 V \varepsilon_0 L^2}{d}$$

c) Después de transcurrido un tiempo muy largo el capacitor se carga por completo con carga Q_0 hallada en la parte 3. Una vez se lo conecta al circuito, este comienza a descargarse a través de las resistencias. Para resolverlo, consideraremos en primera instancia, dado que el amperímetro no posee resistencia interna, crear un resistencia equivalente entre R_1 y R_2:

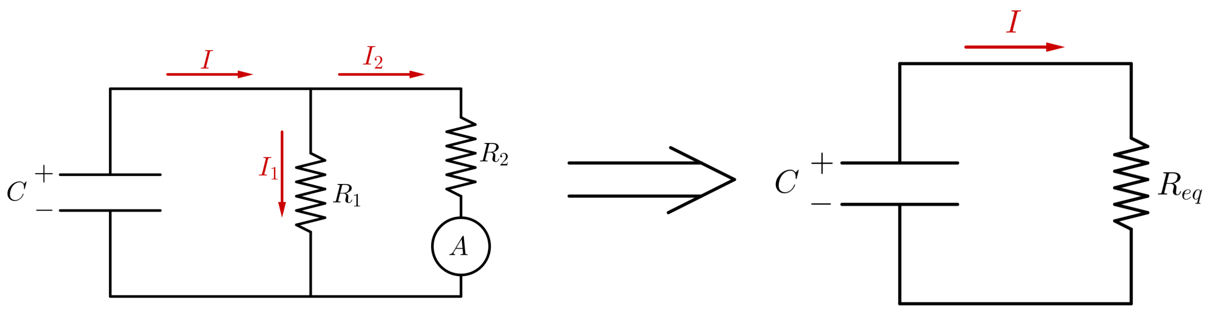


Figura 6

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Ahora, podemos considerar I saliente de la placa positiva y una orientación para la malla como se muestra en la figura 3:

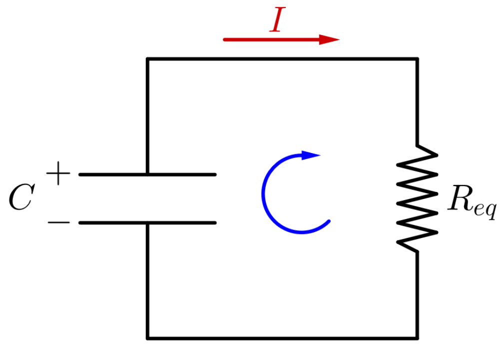


Figura 7

Si aplicamos la ley de mallas de Kirchhoff al circuito tenemos entonces que:

$$-IR_{eq} + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Por otra parte, dado que la corriente que hemos elegido es saliente a la placa positiva la carga en ella disminuye y por lo tanto:

$$I = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

Al sustituir en la ecuación de mallas, se tiene:

$$R_{eq}\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C}Q(t) = 0$$

Que corresponde a una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. Su solución, estará dada por una expresión de la siguiente forma:

$$Q(t) = Ae^{Bt}$$

Si colocamos la expresión en la ecuación diferencial tenemos que:

$$BAe^{Bt} + \frac{1}{R_{eq}C}Ae^{Bt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad B + \frac{1}{R_{eq}C} = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = -\frac{1}{R_{eq}C}$$

Luego, debemos imponer la condición inicial de que $Q(t=0) = Q_0$ y por tanto:

$$Q(t=0) = Ae^{B0} = A = Q_0$$

Concluyendo la solución final:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}$$

Dado que conocemos la carga del capacitor en el circuito equivalente, podemos conocer la corriente por el mismo:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{R_{eq}C}e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}$$

Y la diferencia de potencial en la resistencia equivalente:

$$\Delta V_{eq}(t) = R_{eq}I(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}$$

Finalmente, dado que las resistencias estaban en paralelo, esta diferencia de potencial encontrada es la misma para ambas. Y por lo tanto para conocer la intensidad de corriente por la resistencia R_2 planteamos la ley de Ohm para el mismo:

$$I_2(t) = \frac{\Delta V_{eq}(t)}{R_2} = \frac{Q_0}{CR_2}e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}$$

Y dado que el amperímetro está en serie con la resistencia R_2, este medirá el valor encontrado I_2.

Solución - ejercicio 2

a) Debido a que la espira está en presencia de un campo magnético y por ésta circula una corriente, los cables que la conforman se verán sometidos a una fuerza. Si queremos ver cuál es el torque a la que es sometida la espira tenemos que empezar por ver cuáles fuerzas hacen torque. El torque sobre el segmento que está sobre el eje es 0 porque no hay brazo de palanca. En los cables de longitud b el torque es no nulo pero como la espira no puede rotar en dicha dirección el movimiento no se ve afectado. Por último tenemos el segmento a que se encuentra a una distancia b del eje z, que tiene un torque no nulo. Para calcularlo primero tenemos que calcular la fuerza sobre ésta.

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Siendo $\vec{L} = L\hat{k}$ y $\vec{B} = B\hat{j}$. Estos vectores forman $90°$, por lo que el módulo de la fuerza es:

$$\left|\vec{F}\right| = iLB$$

Usando la regla de la mano derecha obtenemos que la fuerza va en sentido $-\hat{x}$.

Teniendo la fuerza podemos calcular el toque sobre la espira:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Donde $\vec{r}$ en componentes queda de la siguiente forma:

$$\vec{r} = bcos(\theta)\hat{i} + bsen(\theta)\hat{j}$$

De esta forma queda más claro que solo la componente en $\hat{j}$ va a contribuir al producto vectorial:

$$\vec{\tau} = bsen(\theta)\left|\vec{F}\right|\hat{j} \times -(\hat{x})$$

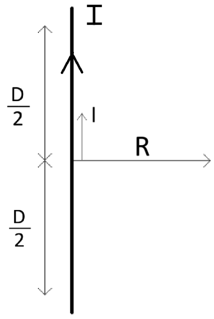
$$\vec{\tau} = biLBsen(\theta)\hat{z}$$

Por lo tanto el torque externo que se tiene que aplicar tiene que ser del mismo módulo y dirección y sentido opuesto.

$$\vec{\tau}_{ext} = biLBsen(\theta)(-\hat{z})$$

b) Para calcular utilizaremos Biot-Savart.

Como primer paso calcularemos el campo magnético producido por la siguiente configuración, es decir, obtendremos el campo magnético generado en la mediatriz de un cable finito a una distancia R de longitud L por donde circula una corriente I: c



$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{4\pi}\int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o i}{4\pi}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{sen(\theta)dl}{r^2}$$

Donde $sen(\theta)$ y r se escriben en función de l de la siguiente forma:

$$sen(\theta) = \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}} \quad , \quad r = \sqrt{l^2 + R^2}$$

Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o i}{4\pi}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{Rdl}{(l^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o i}{4\pi} \frac{l}{R\sqrt{l^2 + R^2}}\Bigg|_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_o i}{2\pi} \frac{D}{R\sqrt{D^2 + 4R^2}}$$

c) Volviendo a la espira cuadrada, el campo magnético generado con cada segmento apunta en la misma dirección y sentido y por lo tanto se suman. De la expresión hallada arriba podemos calcular el campo generado por los segmentos a utilizando que $D = a$ y $R = b/2$ y para los segmentos b sustituyendo $D = b$ y $R = a/2$. Notar que por simetría el campo generado por un cable de longitud a es igual al producido por el otro cable de las mismas dimensiones. Por lo tanto:

$$\left|\vec{B}_{espira}\right| = \frac{2\mu_o i}{\pi}\frac{a}{b\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2\mu_o i}{\pi}\frac{b}{a\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\left|\vec{B}_{espira}\right| = \frac{2\mu_o i}{\pi}\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\Big)$$

Este campo magnético apunta en el mismo sentido que la normal de la espira (si está orientada usando la regla de la mano derecha). El versor $\hat{n}$ se puede descomponer en los vectores de la base:

$$\hat{n} = sen(\theta)\hat{i} - cos(\theta)\hat{j}$$

Por lo tanto el campo total en el centro de la espira es:

$$\vec{B}_{Total} = \left(\frac{2\mu_o i}{\pi}\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\Big)sen(\theta)\right)\hat{i} + \left(-\frac{2\mu_o i}{\pi}\Big(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\Big)cos(\theta) + B_0\right)\hat{j}$$

Solución - ejercicio 3

a) Primero calculemos la posición en la pantalla de los máximos de interferencia. Para eso notar que la diferencia de camino esta dada por $d\sin(\theta)$. En el caso de los máximos tenemos interferencia constructiva que se da cuando la diferencia de camino es un múltiplo entero de la longitud de onda, así se tiene que

$$d\sin(\theta) = m\lambda \tag{1}$$

con m entero. Entonces

$$\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{d} \tag{2}$$

Observar que

$$\frac{\lambda}{d} \sim 10^{-3} \tag{3}$$

entonces para los primeros m, $\sin(\theta) \ll 1 \Rightarrow \theta \ll 1$. Sea y_m la distancia entre el centro del patrón $(\theta = 0)$ y el centro de la m-ésima banda lateral brillante.

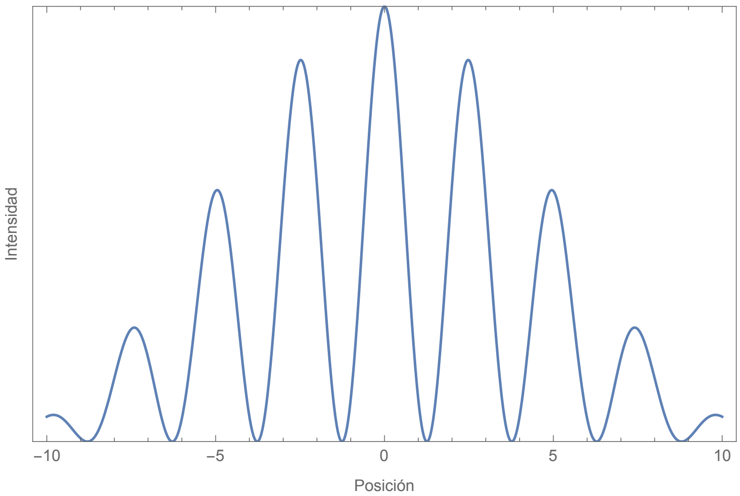
$$y_m = D\tan(\theta_m). \tag{4}$$

Cuando el ángulo es pequeño podemos aproximar $\tan(\theta) \approx \sin(\theta)$. Entonces se tiene en el caso de las bandas brillantes

$$y_m \sim D\sin(\theta_m) = \frac{Dm\lambda}{d} \tag{5}$$

En el caso de las franjas oscuras la condición es de interferencia destructiva por lo que $d\sin\theta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Haciendo un cálculo similar llegamos a que los mínimos se encuentran en

$$y_{min} = \frac{D\lambda}{2d}(2m+1) \tag{6}$$



b)

c) Para esta parte debemos calcular la diferencia de camino óptico cuando se coloca la mica en la rendija superior.

$$\delta' = e + r_1 - (ne + r_2) = e + d\sin\theta - n_1 e = e(1-n_1) + d\sin\theta \tag{7}$$

Sabemos que la condición de mínimo es $\delta' = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ donde el primer mínimo corresponde a $m = 0$. Por ende tenemos que

$$\delta' = e(1-n_1) + d\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \tag{8}$$

De donde podemos despejar $\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{1}{d}\Big(\frac{\lambda}{2} - e(1-n_1)\Big) \tag{9}$$

Para $\theta \ll 1$ la posición y sobre la pantalla es de la forma

$$y_{min} = D\sin\theta = \frac{D}{d}\Big(\frac{\lambda}{2} - e(1-n_1)\Big) \tag{10}$$

Por otra parte, en la configuración original, el quinto máximo lateral está en la posición

$$y_5 = \frac{D\lambda}{d}5 \tag{11}$$

Imponiendo que las alturas sean iguales

$$y_{min} = y_5 \tag{12}$$
$$\frac{D}{d}\Big(\frac{\lambda}{2} - e(1-n_1)\Big) = \frac{D\lambda}{d}5 \tag{13}$$

De aquí podemos despejar e:

$$e = \frac{9\lambda}{2}\frac{1}{(n_1-1)} = 9\lambda \tag{14}$$