Segundo Parcial de Física 3 - Solución

15 de julio de 2024

Ejercicio 1

a) Para una altura h fija orientamos la espira en dirección $\hat{y}$ y por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi_B &= b\int_h^{h+a} B(z)dz \\
&= bB_0\int_h^{h+a} (\alpha z - 1)dz \\
&= bB_0\left(\alpha\frac{z^2}{2} - z\right)\Bigg|_{h}^{h+a} = abB_0(\alpha h(t) + \frac{a}{2}\alpha - 1)
\end{aligned}$$

b) Para el valor de la fem aplicamos la ley de Faraday y obtenemos:

$$\varepsilon_{ind}(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -abB_0\alpha\frac{dz}{dt} = -abB_0\alpha v(t)$$

luego, la corriente estará dada por:

$$I_{ind}(t) = \frac{\varepsilon_{ind}(t)}{R} = -\frac{abB_0\alpha}{R}v(t),$$

donde $v(t) = \frac{dh}{dt} < 0$. Notar que conforme la espira cae el flujo de campo magnético a través de ella decrece, debido a que el módulo de campo magnético disminuye. Por lo tanto, el sentido de la corriente inducida será antihorario.

c) Observar que en los lados paralelos al eje $\hat{z}$ las fuerzas magnéticas se anulan para todos los valores de z. Luego, las fuerzas en los extremos inferior y superior están dadas por:

$$\vec{F}_{inf} = IbB(h)(-\hat{z}) = -Ib(\alpha h - 1)\hat{z}$$

y

$$\vec{F}_{sup} = IbB(h+a)\hat{z} = Ib(\alpha(h+a) - 1)\hat{z},$$

respectivamente. Por lo tanto, la fuerza magnética total sobre la espira es:

$$\vec{F}_{mag} = Iab\alpha B_0\hat{z} = -\frac{(ab\alpha B_0)^2}{R}v\hat{z}$$

(notar que es hacia arriba ya que v es negativa).

d) Planteando la segunda ecuación de Newton obtenemos:

$$-\frac{(ab\alpha B_0)^2}{R}v - mg = m\dot{v} \tag{1}$$

e) Para el límite en que la velocidad tiende a la velocidad terminal, es decir, $v \to v_T$, se tiene que $\dot{v} = 0$. Sustituyendo en la Ec. (1) se llega a que

$$v_T = -\frac{mgR}{(B_0 ab\alpha)^2}.$$

La corriente final es:

$$I_F = \frac{mg}{abB_0\alpha}$$

Por lo tanto, la potencia disipada en la resistencia es:

$$P = I_F^2 R = \frac{m^2 g^2 R}{a^2 b^2 B_0^2 \alpha^2}$$

Ejercicio 2

a) Al cerrarse el interruptor S_2 y se mantiene abierto S_1 se obtiene un circuito R-L. En el instante $t = 0$ el inductor se opone al cambio de corriente y como se pasa de valor nulo de corriente a uno finito no se puede tener un valor de fem infinito. Por lo tanto el voltaje en el inductor va a ser igual a ε, dando como resultado un valor de corriente $i = 0$ en el circuito.

b) En el caso de $t = \infty$ la corriente en el ciruito se estabiliza y el voltaje en el inductor es cero. En este caso el inductor se comporta como un cable. Entonces en el circuito solo nos quedan tres resistencias y una fem. Para encontrar la intensidad aplicamos ley de mallas con una resistencia equivalente de la forma $R_{eq} = \frac{3R}{2}$. La intensidad del circuito es de la forma

$$i = \frac{2\varepsilon}{3R}. \tag{2}$$

c) Como el inductor S_2 se abre y se cierra S_1 se obtiene un circuito L-C. Al aplicar mallas se obtiene

$$L\frac{di}{dt} = -\frac{q}{C} \tag{3}$$

como $i = \frac{dq}{dt}$ se re-escribe la ecuación (3) como

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \tag{4}$$

teniendo la ecuación la forma de un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Esta ecuación diferencial tiene soluciones de la forma $q(t) = A\cos(\omega t) + B\text{sen}(\omega t)$. Para determinar los parámetros usamos las condiciones iniciales $q(t=0) = q_0$ y $\dot{q}(t=0) = \frac{2\epsilon}{3R}$ y llegamos a

$$q(t) = q_0 cos(\omega t) + \frac{2\epsilon}{3R\omega} sen(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{2\epsilon}{3R} cos(\omega t) - q_0 \omega sen(\omega t)$$

d) La energía almacenada en $t = 0$ en el inductor es $U_L(t=0) = \frac{1}{2}Li(t=0)^2 = \frac{2L\epsilon^2}{9R^2}$ y en el condensador $U_C(t=0) = \frac{q_0^2}{2C}$. En $t = T/4$ la energía del condensador y del inductor se intercambian con respecto a las energías acumuladas en $t = 0$. Por lo tanto, $U_L(t = T/4) = \frac{q_0^2}{2C}$ y $U_C(t = T/4) = \frac{2L\epsilon^2}{9R^2}$. Estos valores pueden hallarse explícitamente usando las expresiones para la carga del condensador y la corriente halladas en la parte anterior.

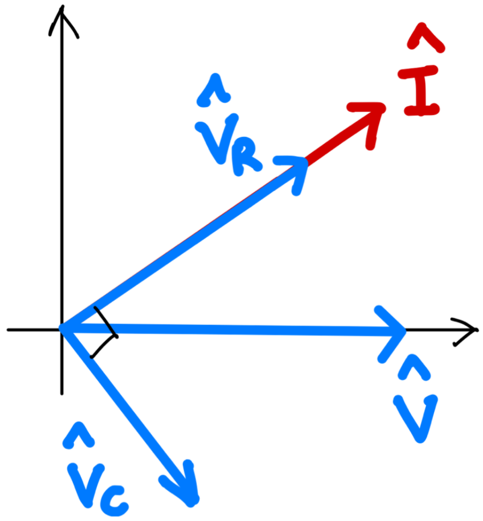
Ejercicio 3

a)

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R - \frac{j}{\omega C}} \Rightarrow I_{rms} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{-1}{\omega C}\right)^2}} = 0{,}1577\ A$$

$$\phi_I = -arctan\left(\frac{1}{R\omega C}\right) = 0{,}8150\ rad$$

b)



c) La corriente en el inductor debe anular la parte imaginaria de la corriente por el capacitor, por lo tanto:

$$\tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}}{jL\omega} = -|I|sen\phi_I j \Rightarrow L = \frac{|V|}{|I|sen\phi_I \omega} = 6{,}377\ H$$

d) La potencia media entregada por la fuente es igual la potencia media disipada por la resistencia. Como la corriente que atraviesa la resistencia es igual antes y después de cerrar la llave, la potencia media entregada por la fuente es la misma en ambas situaciones y puede calcularse como

$$\bar{P} = RI_{rms}^2 = \frac{RV_{rms}^2}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 24{,}8849\ W$$