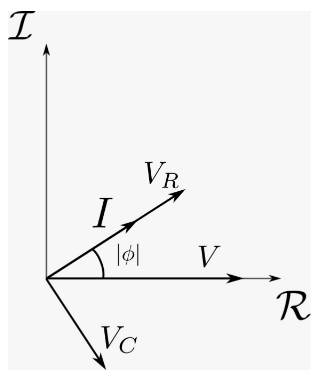
Soluciones del examen de Física 3

22 de diciembre 2023

Solución a problema 1

a) El circuito es capacitivo, por lo tanto la corriente se adelanta al voltaje. No se adelante 90 grados por la presencia de la resistencia R. El ángulo entre el voltaje y la corriente está dado por $|\phi| = \arctan\left(\frac{1}{R\omega C}\right)$ con $\phi < 0$.



b) Aplicando la ley de mallas llegamos

$$\hat{I} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} e^{-j\phi}, \tag{1}$$

siendo

$$\phi = -\arctan\left(\frac{1}{R\omega C}\right) < 0. \tag{2}$$

Por lo tanto, proyectando al eje real, tenemos que

$$i(t) = \Re(\hat{I}\mathrm{e}^{j\omega t}) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} \cos(\omega t - \phi), \tag{3}$$

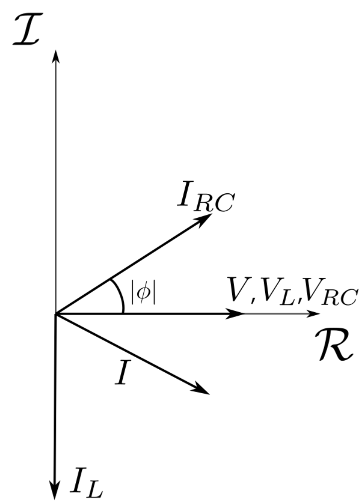
c) La potencia media disipada por el circuito es la misma que está siendo disipada por la resistencia R, por lo tanto,

$$\overline{P} = \frac{|V_R||I_R|}{2} \cos(0) = \frac{V_0^2 R}{2(R^2 + (\omega C)^{-2})} \tag{4}$$

d) La fuente acomodará la corriente que circula por ella de forma tal que mantendrá la diferencia de potencial suministrada. Por lo tanto, la rama que contiene la resistencia R y el capacitor C permanecerá con la misma diferencia potencial que previo a la conexión del inductor. Debido a que por esta rama no se modifica la impedancia Z_{RC}, la corriente que circula por ésta será igual a la parte anterior.
El inductor L está conectado en paralelo tanto a la fuente como a la rama RC, por lo que los voltajes serán iguales.
Por la ley de nodos, tenemos que $\hat{I} = \hat{I}_{CR} + \hat{I}_L$.
La corriente por el inductor está dada por $\hat{V} = Z_L \hat{I}_L = j\omega L \hat{I}_L$. Por lo que tenemos que

$$\hat{I}_L = \frac{V_0}{j\omega L} = \frac{V_0}{\omega L} e^{-j\pi/2}, \tag{5}$$

Es decir, la corriente por la rama del inductor se atrasa $\pi/2$ con respecto al voltaje de la fuente.



e) Como podemos apreciar en el dibujo, para que $\hat{I}$ sea colineal con $\hat{V}$ deberemos imponer que $\hat{I}_{RC}\text{sen}(|\phi|) = |\hat{I}_L|$.
Para entender esto de otra forma, pueden observar la ley de nodos compleja y descomponerla en la dirección paralela a $\hat{V}$ y perpendicular a ella.
Por lo tanto,

$$\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}\text{sen}(|\phi|) = \frac{V_0}{\omega L}. \tag{6}$$

Despejando,

$$L = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}{\omega \text{sen}(|\phi|)}, \tag{7}$$

con

$$\operatorname{sen}(|\phi|) = \frac{\operatorname{Im}(Z_{RC})}{|Z_{RC}|} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}. \tag{8}$$

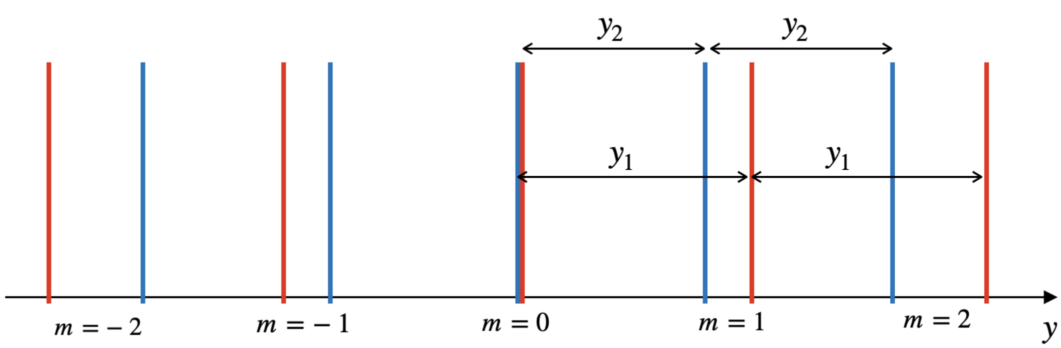
Por lo que simplificando obtenemos

$$L = CR^2 + \frac{1}{\omega^2 C} \tag{9}$$

f) La potencia disipada en este nuevo circuito será la misma que la calculada en la parte c. Esto se debe a que ni el voltaje, ni la corriente que pasa por la resistencia han cambiado.

Solución a problema 2

a)



Primero calculemos la posición en la pantalla de los máximos de interferencia. Para eso notar que la diferencia de camino esta dada por $d\sin(\theta)$. En el caso de los máximos tenemos interferencia constructiva que se da cuando la diferencia de camino es un múltiplo entero de la longitud de onda, así se tiene que

$$d\sin(\theta) = m\lambda \tag{10}$$

Con m entero.
Entonces

$$\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{d} \tag{11}$$

Observar que

$$\frac{\lambda}{d} \sim 10^{-3} \tag{12}$$

entonces para los primeros m, $\sin(\theta) \ll 1 \Rightarrow \theta \ll 1$

Sea y_m la distancia entre el centro del patrón ($\theta = 0$) y el centro de la m-ésima banda brillante.

$$y_m = D\tan(\theta_m) \tag{13}$$

Cuando el ángulo es pequeño podemos aproximar $\tan(\theta) \approx \sin(\theta)$

Entonces se tiene que

$$y_m = D\sin(\theta_m) = \frac{Dm\lambda}{d} \tag{14}$$

Para las franjas brillantes usaremos que $y_m = \frac{Dm\lambda}{d}$.
y a primer orden $m = 1$.

El primer máximo lateral rojo ($m = 1$) se encuentra a una distancia

$$\begin{aligned} y_1^{\text{rojo}} &= \frac{D\lambda_1}{d} = \frac{(5{,}00m)(660nm)}{0{,}260mm} && (15) \\ &= 12{,}7mm && (16) \end{aligned}$$

El primer máximo lateral azul ($m = 1$) se encuentra a una distancia

$$\begin{aligned} y_2^{\text{azul}} &= \frac{D\lambda_2}{d} = \frac{(5{,}00m)(470nm)}{0{,}260mm} && (17) \\ &= 9{,}03mm && (18) \end{aligned}$$

Para los mínimos la diferencia de camino es $d\sin(\theta) = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Su altura en la pantalla es

$$y_{\min} = \frac{D\lambda}{2d}(2m+1) \tag{19}$$

Cada mínimo se encuentra en el punto medio de dos máximos consecutivos.

b) Para esta parte debemos calcular la diferencia de camino óptico cuando se coloca la mica en la rendija superior. La nueva diferencia de camino óptico δ' será

$$\delta' = e + d\sin(\theta) - ne = e(1-n) + d\sin(\theta) \tag{20}$$

Por otra parte sabemos que la condición de mínimo rojo es $\delta' = (2m'+1)\frac{\lambda_1}{2}$.

El primer mínimo rojo corresponde a $m' = 0$
$\Rightarrow \delta' = \frac{\lambda_1}{2}$.

Por ende vemos que

$$\delta' = e(1-n) + d\sin(\theta) = \frac{\lambda_1}{2} \tag{21}$$

De dónde podemos despejar $\sin(\theta)$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{d}\Big(\frac{\lambda_1}{2} - e(1-n)\Big) \tag{22}$$

Como ya se observó que $\theta \ll 1$ la posición y sobre la pantalla es de la forma

$$y_{min} = D\sin(\theta) = \frac{D}{d}\Big(\frac{\lambda_1}{2} - e(1-n)\Big) \tag{23}$$

Por otra parte sabemos de la parte anterior que el cuarto máximo azul se encuentra en la posición

$$y_a = \frac{D4\lambda_2}{d} \tag{24}$$

Finalmente imponemos que las alturas sean las mismas

$$y_{min} = y_a \tag{25}$$

$$\frac{D}{d}\Big(\frac{\lambda_1}{2} - e(1-n)\Big) = \frac{D4\lambda_2}{d} \tag{26}$$

Despejando e

$$e = \frac{1}{(n-1)}\Big(4\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2}\Big) \tag{27}$$

$$e = 3{,}1 \times 10^{-6} m \tag{28}$$

Solución a problema 3

a) El capacitor está compuesto por dos placas esféricas concéntricas de radios $r_1 = a$ y $r_2 = 2a$. La región entre las placas contiene un material de permitividad dieléctrica $\varepsilon = 2\varepsilon_0$. Dicho capacitor carga por medio de una betería que provee una diferencia de potencial V. De acuerdo a la figura la placa que contiene la carga positiva es la de radio r_2.

Para encontrar la capacitancia, primero calculamos el campo eléctrico entre las placas por medio de la ley de gauss. Tomando una esfera de radio r que encierra la placa de radio r_1 y suponiendo que las placas tienen carga de modulo Q_0, se tiene la siguiente expresión.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q_0}{\varepsilon} \tag{29}$$

Como es un problema que posee simetría esférica entonces el campo eléctrico entre las placas tiene la forma $\vec{E} = E\hat{r}$ y su módulo es constante en una esfera de radio r. Por lo tanto la ley de gauss se simplifica a la siguiente forma.

$$E\oint_S dS = \frac{-Q_0}{\varepsilon} \tag{30}$$

Sabiendo que la superficie de una esfera es $4\pi r^2$ se llega a que el módulo del campo eléctrico $E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2}$. Siendo vectorialmente de la forma

$$\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2}(-\hat{r}) \tag{31}$$

A partir del campo eléctrico y del módulo de la carga Q_0 se puede determinar la diferencia de potencial V.

$$V = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{-1}{r} \bigg|_{r_1}^{r_2} \right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \right) \tag{32}$$

Sustituyendo los valores de r_1, r_2 y ε se llega a que

$$V = \frac{Q_0}{16\pi a\varepsilon_0}. \tag{33}$$

Despejando obtenemos $Q_0 = 16\pi\varepsilon_0 aV$. Conociendo Q_0 en función de V se puede determinar la capacitancia del condensador.

$$C = \frac{Q_0}{V} = 16\pi\varepsilon_0 a \tag{34}$$

b) La densidad superficial de carga en la superficie esférica de radio r_2 es la siguiente

$$\sigma = \frac{Q_0}{4\pi(r_2)^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 aV}{16\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 V}{a} \tag{35}$$

c) Ahora se desconecta la batería y se elimina el dielétrico para $r < 3a/2$. Las cargas en las placas se mantienen constantes, lo que se va a modificar es la diferencia de potencial entre las placas. Antes de calcular la nueva diferencia de potencial, calculamos el campo eléctrico de forma análoga a la parte anterior. El campo eléctrico tiene la forma $\vec{E}' = E'(-\hat{r})$ y su módulo se modifica producto de que se tienen dos regiones con permitividades diferentes.

$$E' = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{para } a < r \leq \frac{3a}{2} \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} & \text{para } \frac{3a}{2} < r \leq 2a \end{cases}$$

Conociendo el campo eléctrico entre las placas se procede a calcular la diferencia de potencial V':

$$V' = -\int_{-}^{+} \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E' dr = \int_{r_1}^{r'} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{r'}^{r_2} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} dr \tag{36}$$

donde $r' = \frac{3a}{2}$. Integrando y sustituyendo por los valores de r_1, r_2, r' y ε se obtiene que

$$V' = \frac{5Q_0}{48\pi a\varepsilon_0}. \tag{37}$$

De esto se deduce la nueva capacitacia:

$$C' = \frac{48\pi a \varepsilon_0}{5}. \tag{38}$$

Sustituyendo la expresión de Q_0 puede darse esta otra expresión para V':

$$V' = \frac{5}{3} V. \tag{39}$$

d) El condesador de la segunda perte se conecta cargado a una resistencia en $t = 0$. La resistencia se construye utilizando dos cables de longitud L y sección transversal A, conectados en paralelo. Los cables poseen resistividad ρ y son óhmicos. La resistencia de cada uno de los cables es $R = \frac{\rho L}{A}$, al estar en paralelo la resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}. \tag{40}$$

Despejando se obtiene que $R_{eq} = \frac{R}{2}$. En este caso se tiene la descarga de un capacitor. Para encontrar el voltaje del capacitor en función del tiempo se necesita encontrar la carga del capacitor en función del tiempo. Aplicando ley de mallas se llega a que

$$V' - R_{eq} I = 0 \tag{41}$$

que se reescribe de la forma

$$\frac{Q'}{C'} + R_{eq} \frac{dQ'}{dt} = 0 \tag{42}$$

con $I = -\frac{dQ'}{dt}$. Resolviendo la ecuación se llega a que la carga en el condensador es función del tiempo es la siguiente

$$Q(t) = Q_0 e^{\frac{-2t}{RC'}} \tag{43}$$

El voltaje en el capacitor en función del tiempo es de la forma $V'_C(t) = Q'(t)/C'$. Sustituyendo obtenemos que el voltaje en el capacitor es

$$V'_C(t) = \frac{5}{3} V e^{\frac{-2t}{RC'}} \tag{44}$$

e) Para encontrar el tiempo en el que la mitad de la energía acumulada inicialmente en el capacitor se disipa por la resistencia observamos que dicho tiempo coincide con aquel en que la energía almacenada en el capacitor es la mita que la energía almacenada inicialmente. Para hallarlo calculamos la energía potencial en función del tiempo para cada uno de los dispositivos. La energía potencial en el capacitor es

$$U_C(t) = \frac{Q^2(t)}{2C'} = \frac{Q_0^2}{2C'} e^{\frac{-4t}{RC'}}. \tag{45}$$

Entonces, el instante t en el que $U_C(t) = U_C(t=0)/2$ corresponde a:

$$\frac{Q_0^2}{2C'} e^{\frac{-4t}{RC'}} = \frac{Q_0^2}{4C'}, \tag{46}$$

o, equivalentemente,

$$e^{\frac{-4t}{RC'}} = \frac{1}{2}. \tag{47}$$

Es decir,

$$t = \frac{RC'}{4} \ln(2). \tag{48}$$