Soluciones del segundo parcial de Física 3

1 de diciembre 2023

1. Problema 1

1) La resistencia de la espira está conformada por cables, por lo que su resistencia es igual a la resistividad multiplicada por el largo total y dividida por la sección del cable. Como el largo total de los cables que conforman la espira es $2(a+b)$ la resistencia de la espira es:

$$R = 2\frac{\rho}{A}(a+b). \tag{1}$$

2) Dado que se señaló que la espira no ha entrado totalmente dentro de la región con campo magnético, sólo se considera el intervalo de tiempo durante el cuál $x < b$. Por ende, el flujo magnético entrante a la figura es:

$$\Phi_B = Bax(t). \tag{2}$$

Utilizando la ley de Faraday la f.e.m. inducida (orientada en sentido horario) es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Ba\dot{x}(t) = -Bav(t). \tag{3}$$

Dada la resistencia calculada en la parte anterior, la corriente inducida (en sentido horario para ser consistente con la convención de signos de la ley de Faraday con signos) es:

$$i(t) = -\frac{B}{R}av(t), \tag{4}$$

con el R calculado anteriormente.

3) La espira experimenta dos fuerzas: el peso y la fuerza magnética. Las componentes horizonales de la fuerza magnética se cancelan. Por ende, ambas fuerzas son verticales, el peso hacia abajo y de módulo mg y la fuerza magnética es hacia arriba con módulo $a|i(t)|B = -ai(t)B$ (observe el signo negativo de la corriente calculada en la parte anterior). Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - aB|i(t)| = mg + aBi(t). \tag{5}$$

Utilizando la relación obtenida entre la corriente y la velocidad:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \frac{B^2a^2}{R}\frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

4) La ecuación resultante para la velocidad es:

$$m\dot{v}(t) = mg - \frac{B^2a^2}{R}v(t), \tag{7}$$

o, equivalentemente,

$$\dot{v}(t) = g - \frac{B^2a^2}{mR}v(t). \tag{8}$$

Es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes y no-homogénea. La solución general es la suma de una solución particular con una solución general de la homogénea. Una solución particular corresponde a una velocidad constante:

$$v_p = \frac{gmR}{B^2a^2}. \tag{9}$$

La ecuación homogénea tiene la forma:

$$\dot{v}_h(t) = -\frac{B^2a^2}{mR}v_h(t). \tag{10}$$

que tiene una solución general en forma de exponencial:

$$v_h(t) = C\exp\Big(-\frac{B^2a^2}{mR}t\Big), \tag{11}$$

dónde C es una constante libre a determinar. Por tanto, la solución general para la velocidad es:

$$v(t) = \frac{gmR}{B^2a^2} + C\exp\Big(-\frac{B^2a^2}{mR}t\Big). \tag{12}$$

Como la espira parte del reposo, se puede imponer la condición inicial $v(t=0)=0$, lo que implica que:

$$v(t) = \frac{gmR}{B^2a^2}\left(1 - \exp\Big(-\frac{B^2a^2}{mR}t\Big)\right). \tag{13}$$

Por ende, la corriente, orientada convencionalmente en sentido horario es:

$$i(t) = -\frac{gm}{Ba}\left(1 - \exp\Big(-\frac{B^2a^2}{mR}t\Big)\right). \tag{14}$$

Observe que, dado el signo negativo, el sentido real de la corriente (positiva) es antihorario.

2. Problema 2

1. Recordar que el valor de la impedancia para un circuito RLC en serie está dado por:

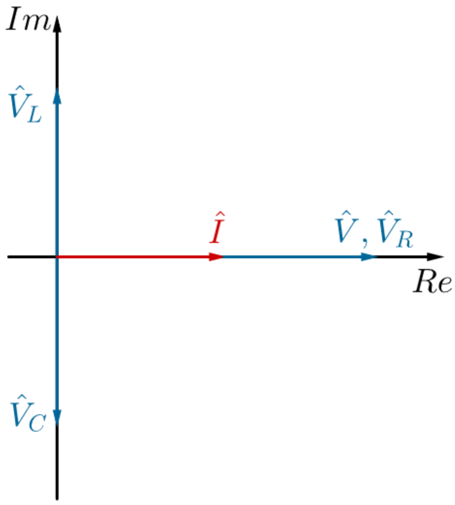
$$Z = R + j\,(\chi_L - \chi_C)$$

Dado que en nuestro caso $\chi_L = \chi_C$, se tiene que $Z = R$ y el circuito está en resonancia. Por lo tanto la impedancia es puramente real. Es decir, el ángulo de fase ϕ entre el fasor de corriente $\hat{I}$ y el fasor de voltaje total $\hat{V}$ es cero, por lo tanto están en fase.

Luego, dado que los voltajes en el inductor y el capacitor están dados por:

$$\hat{V}_L = j\chi_L \hat{I} \qquad \hat{V}_C = -j\chi_C \hat{I}$$

Nuevamente, al tener iguales reactancias, se cumple que $\left|\hat{V}_L\right| = \left|\hat{V}_C\right|$. Y además, $\hat{V} = Z\hat{I}$. De lo cual tenemos que $\left|\hat{V}\right| = R\left|\hat{I}\right| = \left|\hat{V}_R\right|$ Finalmente, podemos representar los fasores en un único diagrama (figura 1).



(a) Figura 1

2. Para determinar la carga en una de las placas del capacitor comencemos por calcular la corriente en el circuito. Dado que $Z = R$ tenemos que:

$$i(t) = Re\left[\frac{V_0}{R}e^{j\omega t}\right] = \frac{V_0}{R}cos(\omega t)$$

Luego, tomamos una corriente saliente de la placa derecha del capacitor y entrante en la izquierda, por lo que para la carga de la placa izquierda se cumple que:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Entonces, tenemos que:

$$q(t) = \frac{V_0}{R} \int cos(\omega t)dt = \frac{V_0}{\omega R} sen(\omega t) + K$$

Para determinar el valor de la constante de integración K utilizamos el dato de que la carga media del capacitor es nula.

$$0 = \langle q(t)) \rangle = K + \frac{V_0}{\omega R} \langle sen(\omega t) \rangle = K$$

Ya que $\langle sen(\omega t) \rangle = 0$. Concluyendo que $K = 0$. Por lo tanto la carga es:

$$q(t) = q_0 sen(\omega t) \quad \text{con} \quad q_0 = \frac{V_0}{\omega R}$$

3. El valor de la energía en el capacitor está dado por:

$$U_c = \frac{q^2}{2C} \quad \rightarrow \quad \langle U_c \rangle = \frac{\langle q^2 \rangle}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \langle sen^2(\omega t) \rangle = \frac{q_0^2}{2C}\frac{1}{2} = \frac{V_0^2}{4C\omega^2 R^2}$$

4. Primero, observemos que podemos conocer el valor de la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Si aplicamos la ley de mallas al circuito en sentido horario vemos una caída de potencial ya que la placa de la izquierda es la que aumenta su carga y la de la derecha la disminuye. Por lo tanto

$$\Delta V_c(t) = -\frac{q(t)}{C} = -\frac{q_0}{C} sen(\omega t)$$

Luego, dado que la distancia entre las placas es mucho menor que el radio de las mismas y además despreciamos los efectos de borde, podemos modelar el campo eléctrico como uniforme entre las placas. Por lo tanto:

$$\vec{E} \simeq -\frac{\Delta V_c}{d}\, \hat{x} = E_0 sen(\omega t)\, \hat{x} \quad \text{con} \quad E_0 = \frac{q_0}{Cd} = \frac{V_0}{\omega RCd}$$

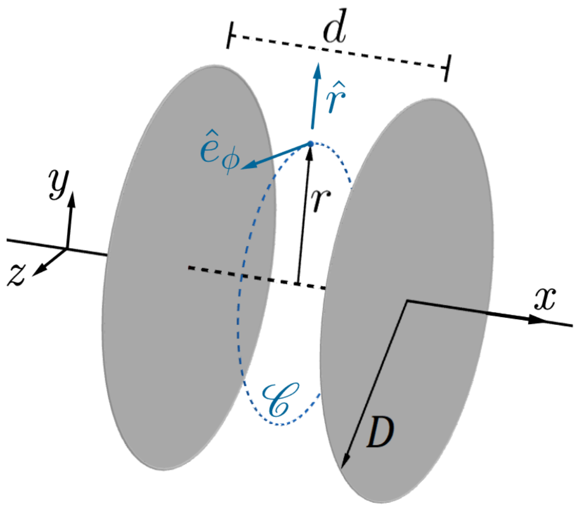
5. *i)* Para determinar el campo magnético, utilizaremos la ley de $Ampère - Maxwell$.

$$\int_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_c + \mu_0 I_d$$

Donde I_c y I_d son las corrientes de conducción y desplazamiento a través de $\mathscr{C}$ respectivamente. Para este caso consideremos $\mathscr{C}_r$ la circunferencia de radio $r < D$ y concéntrica con el eje del capacitor como se muestra en la figura:

Primero, observe que a través de ella no existe corriente de conducción. Por lo que el termino $I_c = 0$. Ahora bien, dado que tenemos un campo eléctrico que varía en el tiempo, eso provocará un flujo eléctrico cambiante en el tiempo con lo que el término $I_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$ es no nulo. Entonces:

$$\int_{\mathscr{C}_r} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_d$$



Luego, dado que, por la simetría del problema el campo magnético es tangente en cada punto a $\mathscr{C}$ tenemos que $\vec{B}\cdot\vec{dl} = B\ dl$ y dado que además por el mismo motivo este es constante en módulo sobre $\mathscr{C}$ podemos extraerlo de la integral:

$$B\int_{\mathscr{C}_r} dl = \mu_0 I_d \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi r}$$

Para calcular la corriente de desplazamiento necesitaremos el flujo del campo eléctrico a través de $\mathscr{C}_r$. Para ello observe que $\vec{E}$ está en la dirección $\hat{x}$ por lo que orientamos la superficie encerrada por $\mathscr{C}$ que llamaremos S_r en la dirección de $\hat{x}$ positivo para ser consistentes con la ley de *Ampère*, es decir, tomamos el vector normal a la superficie como $\hat{x}$ y dado que $\vec{E}$ es uniforme, entonces:

$$\phi_E = \vec{E}\cdot \acute{A}rea(S_r)\hat{x} = E\acute{A}rea(S_r)\ \hat{x}\cdot\hat{x} = E\pi r^2 = \frac{q_0\pi r^2}{Cd}sen(\omega t)$$

Luego, la corriente de desplazamiento queda:

$$I_d = \varepsilon_0\frac{d\phi_E}{dt} = \varepsilon_0\frac{q_0\pi r^2}{Cd}\frac{d}{dt}\left[sen(\omega t)\right] = \varepsilon_0\frac{q_0\pi r^2\omega}{Cd}cos(\omega t)$$

Entonces el módulo del campo magnético es:

$$B = \frac{\mu_0 I_d}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\varepsilon_0\frac{q_0\pi r^2\omega}{Cd}cos(\omega t) = B_0(r)cos(\omega t) \quad \text{con} \quad B_0(r) = \mu_0\varepsilon_0\frac{q_0 r\omega}{2Cd}$$

Observar que, por como orientamos S_r, por la regla de la mano derecha, el campo magnético inicialmente $(t = 0)$ está en el sentido $\hat{e}_\phi$. Concluyendo:

$$\vec{B}(r,t) = B_0(r)cos(\omega t)\ \hat{e}_\phi$$

ii) Este caso es completamente análogo al anterior solo que debemos notar que si $r > D$ entonces el máximo flujo a través de la espira es el correspondiente al radio D, es decir, el área por fuera de D no aporta al flujo ya que no existe campo eléctrico ahí, entonces:

$$\phi_E = \int_{S_r} \vec{E} \cdot \hat{x} ds = \int_{S_D} \vec{E} \cdot \hat{x} ds = E \acute{A}rea(S_D)$$

El mismo procedimiento tenemos que:

$$\vec{B}(r,t) = B_0(r) cos(\omega t) \ \hat{e}_\phi \quad \text{con} \quad B_0(r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{q_0 D^2 \omega}{2Crd}$$

6. Ya que conocemos los campos de las partes anteriores, podemos calcular el vector de Poynting directamente:

$$\vec{S}(r,t) = \frac{\vec{E}(r,t) \times \vec{B}(r,t)}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0(r)}{\mu_0} sen(\omega t) cos(\omega t) \ \hat{x} \times \hat{e}_\phi = \frac{E_0 B_0(r)}{\mu_0} sen(\omega t) cos(\omega t) \ (-\hat{r})$$