Soluciones Examen de Física 3

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

30 de julio de 2022

Ejercicio 1

a) El campo eléctrico producido por una carga puntual es

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

siendo $\vec{r}$ el vector posición con origen en la carga y r su módulo. Para los puntos del plano $\vec{r} = (x, y, a)$. Por lo cual

$$\vec{E}\left(\vec{r} = (x, y, a)\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}(x, y, a).$$

b)

$$V\left(\vec{r} = (x, y, a)\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(x^2 + y^2 + a^2)^{1/2}}$$

c)

$$\Phi = \int_{\text{Área}} \vec{E} \cdot \vec{n} da = \int_{\text{Área}} \vec{E} \cdot \hat{z} da = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}dxdy$$

d) Como el campo eléctrico de la carga puntual tiene simetría esférica, si se considera un cubo de lado $2a$ con centro en la carga, el flujo de las seis caras serán el mismo. Notar que cara superior del cubo coincide con el cuadrado del ejercicio. Por lo cuál

$$\Phi = \frac{\Phi_{\text{cubo}}}{6}.$$

Por otra parte el cubo considerado es una superficie cerrada para cual podemos aplicar el teorema de Gauss.

$$\Phi_{\text{cubo}} = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

De aquí se deduce que

$$\Phi = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

sin necesidad de resolver la integral de la parte anterior.

Ejercicio 2

a) Para un conductor de largo ℓ y resistividad ρ la resistencia se calcula como $R = \dfrac{\rho\ell}{A}$ donde A es el área, quedando asi $R = \dfrac{\rho\ell}{\pi(a^2 - b^2)}$

La potencia disipada se calcula como $P_{disipada} = RI^2 = \dfrac{\rho\ell}{\pi(a^2 - b^2)}I^2$

b) La dirección de $\overrightarrow{E}$ es paralelo al eje del cilindro en la dirección de la corriente.

Como se trata de un material óhmico se tiene que $E = \rho J$ donde J es la densidad de corriente. Por lo tanto $E = \rho \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$

c) El cálculo del campo magnético se realiza aplicando Ampère. $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I_{enc}$, observar que como quiero el campo magnético a una distancia a del eje, la corriente encerrada será la corriente total I

Entonces $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B(2\pi a) = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I$

$\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{e_\theta}$

d) Si tomo un punto b del conductor muy próximo a su superficie interna tengo que $E_b = \rho \dfrac{I}{\pi(a^2 - b^2)}$, ya que el punto b pertenece al conductor y el campo eléctrico es constante. Por otro lado si aplico un razonamiento análogo al de la parte c) pero ahora quiero el campo magnético a una distancia b del eje, entonces la corriente encerrada es 0, por lo tanto $B_b = 0$

e) Por definición el vector de Poynting se calcula como $\overrightarrow{S} = \dfrac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}}{\mu_0}$

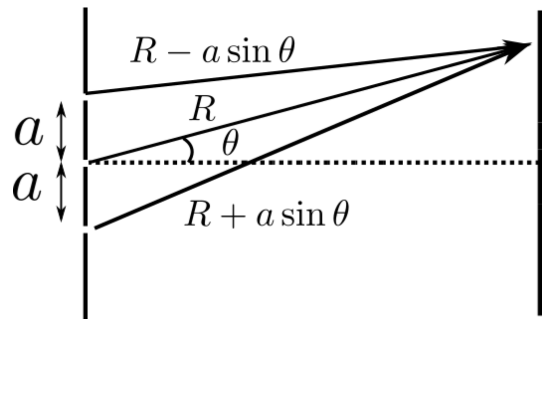
$S_a = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\dfrac{\rho I}{\pi(a^2 - b^2)}\right)\left(\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\right) = \dfrac{\rho I^2}{2\pi^2 a(a^2 - b^2)}$. Su dirección es radial entrante.

$S_b = 0$

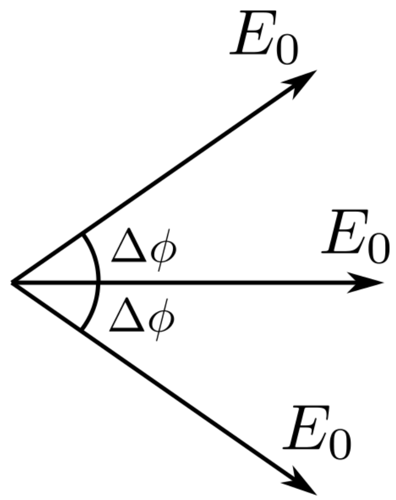
f) S es constante en la superficie del conductor, la potencia P se calcula como $P = \oint \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{dA} = S(2\pi a\ell) = \dfrac{\rho I^2}{2\pi^2 a(a^2 - b^2)}(2\pi a\ell) = RI^2$ donde se identificó $R = \dfrac{\rho \ell}{\pi(a^2 - b^2)}$

Ejercicio 3

a) Dado un punto arbitrario en la pantalla caracterizado por el ángulo θ, llamemos R al camino recorrido por la onda proveniente de la rendija central. La distancia recorrida por las ondas provenientes de las rendijas superior e inferior son respectivamente $R - a\sin\theta$ y $R + a\sin\theta$:

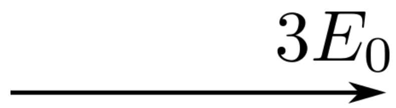


El diagrama de fasores correspondiente a los campos eléctricos de las tres rendijas:



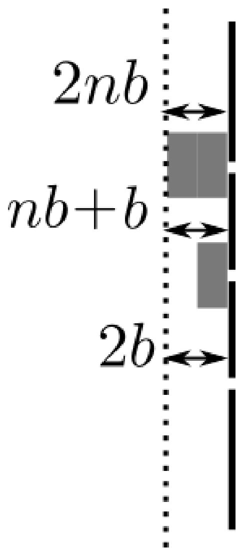
Siendo $\Delta\phi = ka \sin\theta$, con $k = 2\pi/\lambda$.

b) En $\theta = 0$, $\Delta\phi = 0$:



Dado que $I \propto |E|^2$ y $E = 3E_0$, tenemos que para $\theta = 0$ se cumple $I = 9I_0$

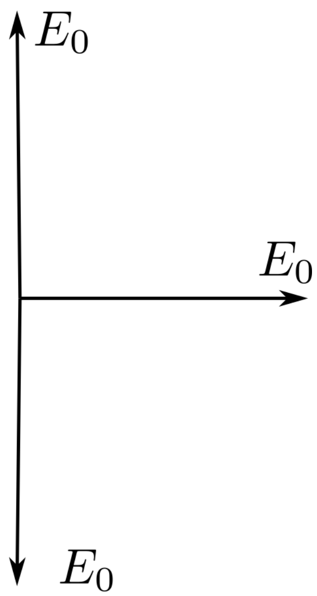
c) Para $\theta = 0$, la diferencia de camino óptico se debe únicamente a las láminas:



La diferencia de camino óptico recorrido por las ondas provenientes de las rendijas superior y central está dada por $(n-1)b$, mientras que la diferencia entre la rendija inferior y la central es igual en módulo pero de signo contrario (el camino óptico inferior es menor). Los campos eléctricos provenientes de las tres rendijas se pueden representar en un diagrama de fasores anàlogo al de la parte a), donde ahora $\Delta\phi = k(n-1)b$. Dado que $k = 2\pi/\lambda$ y $b = \frac{\lambda}{4(n-1)}$, la diferencia de fase:

$$\Delta\phi = k(n-1)b = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\frac{\lambda}{4(n-1)} = \frac{\pi}{2}$$

Entonces, el diagrama de fasores en este caso:



De donde se puede obtener fácilmente que el campo eléctrico total es $E = E_0$ y por lo tanto $I = I_0$