Capítulo 5

PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

5.1. Producto escalar.

DEFINICIÓN 5.1. Dado un vector $v \in V$ llamamos **norma** de v al número $d(A,B)$ con $v = \overrightarrow{AB}$, que notaremos: $\|v\|$ (observar que $d(A,B)$ no depende del par de puntos (A,B) que se elija como representante de v).

Propiedades:

1. $\|v\| \geqslant 0$; $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$.
2. $\|av\| = |a|\,\|v\|$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V$.
3. $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$, para todo $u, v \in V$.

Demostración. 1. Es inmediato.

2. Si $a = 0$ es trivial. Si $a \neq 0$ y $v = \overrightarrow{AB}$, por definición del producto de un número por un vector, $av = \overrightarrow{AC}$, donde $d(A,C) = |a|\,d(A,B)$. Luego $\|av\| = d(A,C) = |a|\,d(A,B) = |a|\,\|v\|$.

3. Un lado de un triángulo es menor o igual que la suma de los otros dos (es la propiedad triangular de geometría métrica). $\square$

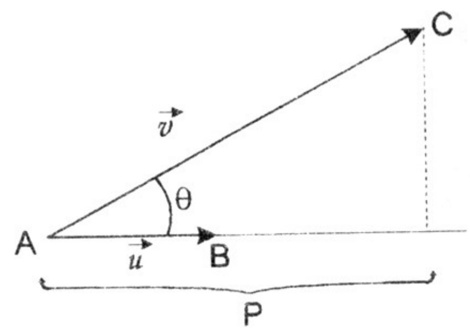
Diremos que v es un **versor** si $\|v\| = 1$. Para todo $v \neq 0$ se tiene que $\frac{v}{\|v\|}$ es un versor pues $\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{1}{\|v\|}\,\|v\| = 1$.

DEFINICIÓN 5.2. Dados los vectores u y v de V llamamos **producto interno o producto escalar** de u por v al número $\|u\|\,.\,\|v\|\,cos\,\theta$ donde θ es el ángulo BAC de tres puntos tales que $\overrightarrow{AB} = u$ y $\overrightarrow{AC} = v$. Observar que el producto escalar no depende de los puntos A, B, C que se elijan para representar u y v.

Notación: u.v ; $< u, v >$, (u, v) ; etc.

En particular $v.v = \|v\|^2$; luego $\|v\| = \sqrt{v.v}$.

Si u es un versor, es decir, si $\|u\| = 1$, entonces $u.v = \|v\| \, cos\, \theta = p$ es la proyección del segmento AC sobre la recta AB de la figura.



Propiedades:

1. $u.v = v.u$,
2. $(a.u)\,.v = u.\,(a.v) = a.\,(u.v)$,
3. $(u_1 + u_2)\,.v = u_1.v + u_2.v$; $u.\,(v_1 + v_2) = u.v_1 + u.v_2$,
4. $v.v \geqslant 0$ y $v.v = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Demostración. 1. Es inmediato.

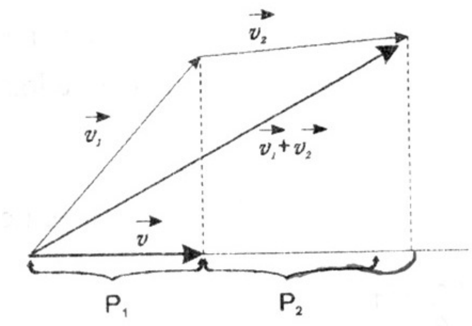
2. Si $a = 0$ la demostración es trivial. Si $a \geqslant 0$, $\text{áng}\,(au, v) = \text{áng}\,(u, v) = \theta$, luego $(\,a.u\,)\,.v = \|au\|\,.\,\|v\| \cos\theta = |a|\,.\,\|u\|\,.\,\|v\| \cos\,\theta\, = a\,(u.v)$.

Si $a < 0$, $\text{áng}\,(au, v) = \pi + \text{áng}\,(u, v) = \pi + \theta$, luego $(\,a.u\,)\,v = \|a.u\|\,\|v\| \cos\,(\pi + \theta) = -\,|a|\,\|u\|\,\|v\| \cos\,\theta = a\,\|u\|\,\|v\| \cos\,\theta = a(u.v)$.

3. Consideremos primero el caso $\|u\| = 1$. Entonces $v_1.u = p_1$, $v_2.u = p_2$, $(v_1 + v_2)\,u = p$ (proyección de $u_1 + u_2$). Es claro que $p = p_1 + p_2$, luego $(v_1 + v_2)\,.u = v_1.u + v_2.u$ (ver figura).

Consideremos ahora el caso general. Por el razonamiento anterior, como $\left\|\frac{u'}{\|u\|}\right\| = 1$, tenemos $(v_1 + v_2)\,.\frac{u}{\|u\|} = v_1.\frac{u}{\|u\|} + v_2.\frac{u}{\|u\|}$, luego $(v_1 + v_2)\,.u = v_1.u + v_2.u$.

4. Es inmediata pues $v.v = \|v\|^2$. □



DEFINICIÓN 5.3. Dos vectores u, v se dicen **ortogonales** si $u \,.\, v = 0$.

Una base $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ (a partir de aquí no escribiremos la flecha $\rightarrow$) se dice **ortogonal** si $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$. La base se dice **ortonormal** si además de ser ortogonal verifica que $\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$.

Diremos que $\{O, i, j, k\}$ es un **sistema ortogonal de coordenadas** si $\{i, j, k\}$ es ortonormal.

En el resto de esta sección supondremos que todos los sistemas de coordenadas son ortonormales. En tal caso dados:

$$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k \text{ y } w = b_1 i + b_2 j + b_3 k \text{ se tiene } v.w = \sum_{i=1,2,3} a_i b_i.$$

En particular: $\|v\| = \sqrt{v.v} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

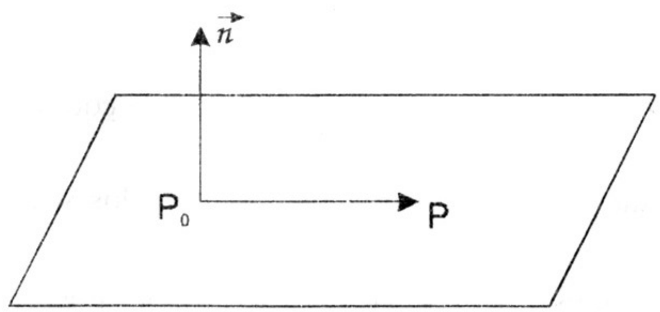
Si $P = O + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $Q = O + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ entonces $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (b_1 - a_1)\, v_1 + (b_2 - a_2)\, v_2 + (b_3 - a_3)\, v_3$, luego
$d\,(P, Q) = \|PQ\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

5.2. Aplicaciones a la geometría: ángulos y distancias.

Ya vimos que toda ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano y recíprocamente. Suponiendo que el sistema de coordenadas sea ortogonal volveremos a obtener esa ecuación y mostraremos que en ese caso se puede obtener más información de esta ecuación.

Sea $\{O, i, j, k\}$ un sistema ortogonal de coordenadas, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de un plano π y $n = ai + bj + ck \neq 0$ un vector de la dirección de una perpendicular a π (para abreviar diremos que n es un vector normal a π). Entonces, para todo $P \in \pi$, $P = (x, y, z)$, vale $n \cdot (P - P_0) = 0$, de aquí resulta:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0.$$



Esta es entonces la ecuación del plano dado por un punto y la dirección de la normal. Es claro que esa ecuación también se escribe en la forma:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Recíprocamente, dada una ecuación $ax+by+cz+d = 0$, con $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ (por ejemplo, $c \neq 0$), resulta: $ax + by + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = 0$. Si el sistema de coordenadas $\{O, v_1, v_2, v_3\}$ es ortogonal esto equivale a:

$$(av_1 + bv_2 + cv_3)\,.\left(xv_1 + yv_2 + \left(z + \frac{d}{c}\right)v_3\right) = 0.$$

Poniendo $P = (x, y, z)$, $P_0 = (0, 0, -d/c)$ y $n = av_1+bv_2+cv_3$, esta ecuación se escribe: $n.\,(P - P_0) = 0$. Por tanto, es la ecuación del plano perpendicular a π por P_0.

OBSERVACIÓN 5.1. Si el sistema de coordenadas no es ortogonal, la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ también representa un plano como vimos antes, pero en ese caso el vector $av_1 + bv_2 + cv_3$ no tiene por que ser normal al plano.

Veremos ahora algunas consecuencias de esto, siempre con la hipótesis de que el sistema de coordenadas es ortonormal.

a) Condición para que dos planos sean paralelos: Dos planos $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ son paralelos si y sólo si $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ y $c' = \lambda c$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}\,(\lambda \neq 0)$.

b) Condición para que una recta y un plano sean paralelos: Dados el plano y la recta de ecuaciones $ax + by + cz + d = 0$ y $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, son paralelos si y sólo si $pa + qb + rc = 0$, pues esto significa que $n.v = 0$, donde n es normal al plano y v es un vector de la dirección de la recta.

c) Ángulo entre dos planos: Para dos vectores cualesquiera, $u \neq 0$, $v \neq 0$, tenemos $\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} = \cos\theta$. Como el ángulo θ entre dos planos es igual al que forman sus vectores normales respectivos, tendremos: $\cos\theta = \frac{n_1.n_2}{\|n_1\|\,\|n_2\|}$ donde n_1 y n_2 son vectores normales a esos planos: luego el ángulo θ entre los planos de ecuaciones $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ verifica:

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

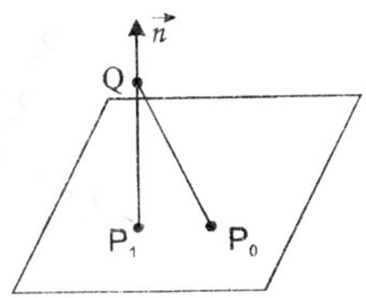
d) Ángulo de una recta con un plano: Sean n un vector normal al plano π y v un vector de la dirección de la recta . El ángulo del plano π con la recta es entonces $\theta = \pi/2 - \varphi$ donde φ es el ángulo determinado por n y v. Luego el ángulo de $ax + by + cz + d = 0$ con $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ se puede calcular mediante:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\varphi = \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

e) Ángulo entre dos rectas: El ángulo θ de $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ con $\frac{x-x_1}{p'}=\frac{y-y_1}{q'}=\frac{z-z_1}{r'}$ se calcula mediante la fórmula:

$$\cos\theta=\frac{pp'+qq'+rr'}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}.$$

f) Distancia de un punto a un plano: Definimos la distancia $d\left(Q,\pi\right)$ de Q al plano π como el mínimo de $d(Q,P)$ donde $P\in\pi$. Es claro que el mínimo de $d(Q,P)$ se obtiene cuando $P=P_1=\pi\cap r$, donde r es la perpendicular a π por Q. Luego: $d\left(Q,\pi\right)=d\left(Q,P_1\right)=\left|\left(Q-P_0\right)\cdot\frac{n}{\|n\|}\right|$, siendo P_0 un punto cualquiera del plano π.



Como la ecuación del plano es $\left(P-P_0\right).n=0$, esto significa que d se obtiene reemplazando P por $O=(0,0,0)$ en el primer miembro de la ecuación del plano.

Consideremos ahora un sistema ortonormal de coordenadas. Si $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $Q=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, $P=(x,y,z)$, $n=ai+bj+ck$ entonces:

$$(Q-P_0)\cdot n\;=\;a\left(\overline{x}-x_0\right)+b\left(\overline{y}-y_0\right)+c\left(\overline{z}-z_0\right)=\;a\overline{x}+b\overline{y}+c\overline{z}+d.$$

Luego:

$$d\left(Q,\pi\right)=\left|\left(Q-P_0\right)\cdot\frac{n}{\|n\|}\right|=\left|\frac{\overline{a}x+\overline{b}y+\overline{c}z+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

5.3. Aplicaciones: ecuaciones de algunas superficies.

a) Esferas de centro (x_0, y_0, z_0) **y radio** $\boldsymbol{r}$**:** En un sistema ortogonal de coordenadas la ecuación es: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

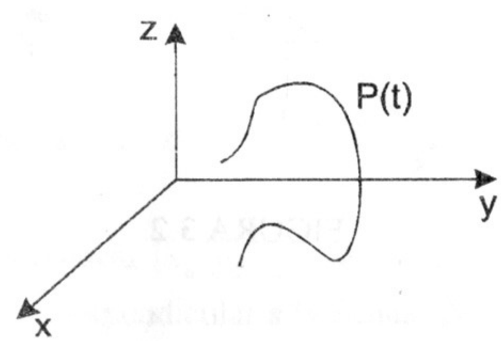
b) Superficies de revolución: Son las engendradas por una curva (generatriz), que gira alrededor de una recta (eje).

OBSERVACIÓN 5.2. Una **curva** en el espacio puede darse:

- O bien en forma **paramétrica**, por medio de tres ecuaciones de la

$$\text{forma} \begin{cases} x = x\,(t) \\ y = y\,(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z\,(t) \end{cases}$$

con tres funciones contínuas de un parámetro real (para cada valor del parámetro t se tendrá un punto $(x(t), y(t), z(t)) = P(t)$ que está en la curva).



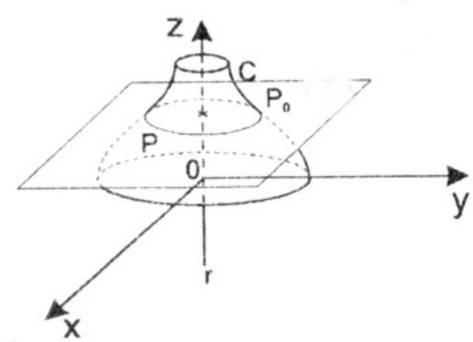
- O bien en la forma reducida $\begin{cases} f\,(x, y, z) = 0 \\ g\,(x, y, z) = 0 \end{cases}$

Cuando se tienen las ecuaciones paramétricas, **a veces** puede eliminarse el parámetro t y obtenerse una forma reducida. Generalmente hay muchos sistemas de ecuaciones posibles que representan a la misma curva.

OBSERVACIÓN 5.3. Una **superficie** en el espacio puede darse:
- O bien en forma parametrizada, por medio de tres ecuaciones con dos parámetros (como la ecuación paramétrica del plano).
- O bien en forma reducida por medio de una ecuación del tipo: $f(x, y, z) = 0$.

OBSERVACIÓN 5.4. La curva $C = \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ es la **intersección** de dos superficies S y S' donde $S : f(x, y, z) = 0$ y $S' : g(x, y, z) = 0$.

Ecuación de la superficie de revolución con eje $\vec{Oz}$. Sea r el eje $r = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y C la generatriz $C = \begin{cases} x = 0 \\ z = f(y) \end{cases}$



La superficie de revolución S está constituida por **todos** los puntos P del espacio que cumplen, a la vez, dos condiciones:

$$\begin{cases} P \in \pi \perp r\,,\ \pi \text{ plano por algún } P_0 \in C \\ d(P,r) = d(P_0,r) \end{cases}$$

Las condiciones se traducen en:

$$\begin{cases} z - z_0 = 0\,, \quad P = (x,y,z) \in \pi \perp\ r,\ por\ \ P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in C \\ x_0 = 0\ , \qquad z_0 = f\ (y_0) \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y_0^2},\ \ d(P,r) = d(P_0,r) \end{cases}$$

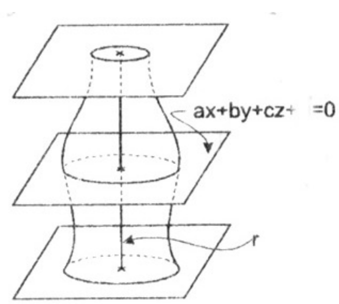
de donde, despejando y_0 se obtiene: $z = f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

OBSERVACIÓN 5.5. Dada una ecuación $F(x,y,z) = 0$ **no** intentaremos, en general, reconocer si es o no una superficie de revolución. Observaremos sólo que si se halla una familia de planos paralelos (es decir $ax+by+cz+\alpha = 0$ con (a,b,c) fijo y α variable) que cumplan las condiciones de más abajo, entonces $F(x,y,z) = 0$ es una superficie de revolución que verifica (ver Figura 3.3):

i) La intersección $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ ax+by+cz+\alpha = 0 \end{cases}$ es una **circunferencia** para cada valor de α.

ii) El centro de la circunferencia $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ pertenece, para todo α, a una recta fija r colineal al vector (a,b,c) (o sea perpendicular a la familia de planos paralelos).

EJEMPLO 5.1. Demostrar que $xy + yz + zx = 7$ es una superficie de revolución.



Notar que se puede escribir como: $(x+y+z)^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) = 14$. Cortándola en el plano $x+y+z+\alpha = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} x+y+z+\alpha = 0 \\ (x+y+z)^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) = 14 \end{cases}$$

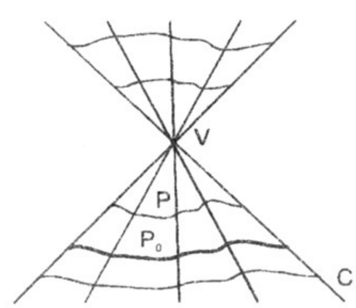
i) Es una **circunferencia** porque es la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 14$ con el plano $x + y + z + \alpha = 0$ (con $\alpha > \sqrt{14}$).
ii) El centro C_α de la circunferencia se halla trazando la perpendicular al plano $x+y+z+\alpha = 0$ que pasa por el centro de la esfera $x^2+y^2+z^2 = \alpha^2-14$, o sea:

$$C_\alpha = \begin{cases} x + y + z + \alpha = 0 \\ x = y = z \;\; recta \;\; por\,(0,0,0) \perp \\ \;\; al \;\; plano, \;\; x + y + z + \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow C_\alpha = \begin{cases} x = -\alpha/3 \\ y = -\alpha/3 \\ z = -\alpha/3 \end{cases}$$

es una recta colineal al vector $(-1/3, -1/3, -1/3)$ o sea, colineal con $(1, 1, 1)$.

c) Conos: Se llama "cono" o "superficie cónica" de vértice V y directriz C (donde V es un punto y C es una curva dada, tales que $V \notin C$), a la superficie engendrada por todas las rectas que pasan por V y cortan a C.



Si $V = (a, b, c)$ y $C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ la ecuación paramétrica del cono se puede obtener con los parámetros t y λ como:

$$S = \begin{cases} x = a + \lambda\,(f(t) - a) \\ y = b + \lambda\,(g(t) - b) \\ z = c + \lambda\,(h(t) - c) \end{cases}$$

Para escribir la ecuación reducida habrá que eliminar los parámetros t, λ para obtener una ecuación del tipo

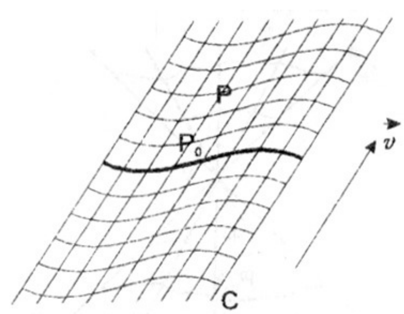
$$F(x, y, z) = 0.$$

EJEMPLO 5.2. Hallar las ecuaciones reducidas y paramétrica del cono de vértice $V = (0, 0, 0)$ y generatriz $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \\ z = 1 \end{cases}$.

La ecuación parametrizada es: $\begin{cases} x = \lambda \operatorname{sen} t \\ y = \lambda \cos t \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

Despejando t y λ se obtiene la ecuación reducida $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$.

d) Cilindros: Se llama "cilindro" o "superficie cilíndrica" de directriz C y generatriz colineal al vector $v = (a, b, c)$ a la superficie engendrada por todas las rectas colineales al vector v que cortan a la curva C.



Si $v=(a,b,c)$ y $C=\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$. Un punto $P=(x,y,z)$ pertenece al cilindro si y sólo si existe algún punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ tal que:

$$\begin{cases} P_0\in C \\ P\in \textit{recta por } P_0 \textit{ colineal a } v. \end{cases}$$

Entonces, las ecuaciones paramétricas del cilindro son:

$$S=\begin{cases} x = f(t)+\lambda a \\ y = g(t)+\lambda b \\ z = h(t)+\lambda c \end{cases}$$

de las que habrá que eliminar los parámetros t,λ para obtener la ecuación reducida del tipo $F(x,y,z)=0$.

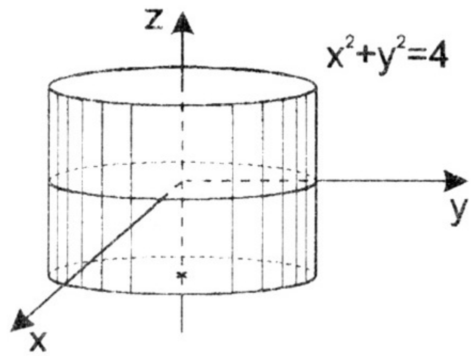
OBSERVACIÓN 5.6. La curva C también puede estar dada como

$$C=\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

en cuyo caso se trabajará análogamente, pero con un parámetro menos.

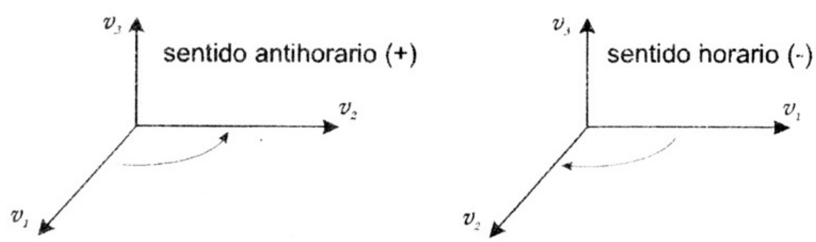
OBSERVACIÓN 5.7. Una ecuación $F(x,y,z)=0$ en la que no figura la variable z, por ejemplo, representa un cilindro de generatrices colineales con el eje Oz. Si $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ verifica la ecuación $F(x_0,y_0,z_0)=0$, entonces tomando $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0+\lambda$ (eso es la recta por P_0 colineal con $(0,0,1)$), se tiene $F(x_0,y_0,z_0+\lambda)=F(x_0,y_0,z_0)=0$ porque F es, en realidad, independiente de z. O sea: cuando P_0 está en la superficie, toda la recta por la colineal al eje Oz también la está.

EJEMPLO 5.3. $x^2+y^2=4$ es un **cilindro** con generatrices paralelas al eje Oz y directriz, por ejemplo, en la circunferencia $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$



5.4. Producto vectorial.

Consideremos las ternas ordenadas de vectores de V, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, que constituye una base de V. Estas las vamos a clasificar en dos grupos: uno formado por las ternas $\{i, j, k\}$ tales que para un observador parado en v_3, la rotación de ángulo convexo (o sea, de medida $< \pi$) que lleva i en j es de sentido antihorario; el otro formado por las ternas en las que esa rotación tiene sentido horario.



Para definir el producto vectorial necesitamos elegir uno de los dos tipos como terna preferida. Nos quedaremos para esto con las ternas del primer tipo que llamaremos **positivas**.

Esta convención sirve para definir el producto vectorial como una función de $V \times V$ *en* V (así como el producto escalar era una función de $V \times V$ *en* $\mathbb{R}$)

que a cada par de vectores v, w le asocia un vector, que denotaremos $v \wedge w$, que cumple:

a) $\|v \wedge w\| = \|v\| \,.\, \|w\| \,.\operatorname{sen} \theta$ (donde θ es el ángulo de v con w).
b) $(v \wedge w) \,.v = 0$ y $(v \wedge w) \,.w = 0$
c) Si $v \neq 0$ y $w \neq 0$, la terna $\{v, w, v \wedge w\}$ es positiva.

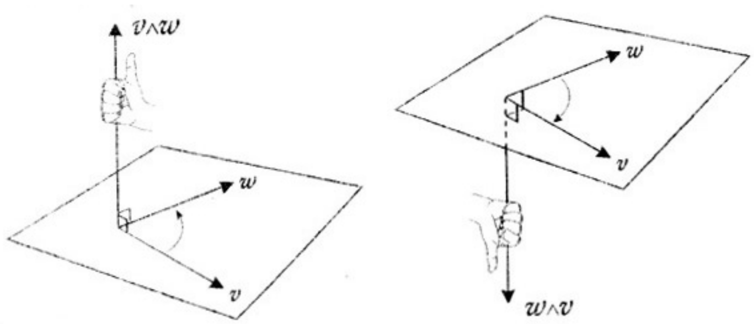
Propiedades:

1) $\|v \wedge w\|$ es el doble del área del triángulo determinado por esos vectores.

2) $v \wedge w = 0$ si y sólo si v y w son colineales (en particular, si alguno de ellos es el vector 0).

3) Respecto de la condición c) de la definición, corresponde observar que si $v \wedge w \neq 0$ la terna $\{v, w, v \wedge w\}$ es una base, pues por b) esos vectores no son coplanares salvo que v y w sean colineales, en cuyo caso $v \wedge w = 0$.

4) $v \wedge w = -(w \wedge v)$ (en particular, esta operación no es conmutativa). Para verificar esto basta notar que si para cierto observador la rotación del ángulo $< \pi$ que lleva v en w es de sentido antihorario, para el mismo observador la que lleva w en v es de sentido horario. De modo que el observador debe ubicarse del lado opuesto del plano v, w para que esa rotación parezca de sentido contrario. Luego esa debe ser la ubicación de $w \wedge v$ para que la terna $[w, v, w \wedge v]$ sea positiva.



5) Este producto no es asociativo. Se puede deducir que:

$$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0$$

de donde, usando **4)**, $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u)$, y como en general $v \wedge (w \wedge u) \neq 0$, la propiedad asociativa no vale.

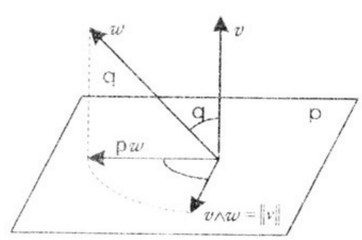
6) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \,(v \wedge w) = (\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w)$. Esta propiedad se deduce directamente de la definición en el caso $\lambda \geqslant 0$. Para el caso $\lambda < 0$, hay que observar que del hecho que la terna $\{v, w, v \wedge w\}$ es positiva se deduce que $\{-v, w, -(v \wedge w)\}$ y $\{v, -w, -(v \wedge w)\}$ son también positivas.

7) El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores. Esto es:

a) $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$.

b) $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$.

Para demostrar esta propiedad hacemos algunas observaciones previas. En primer lugar, observamos que llamando π al plano con vector normal v e indicando por $p(w)$ la proyección de w sobre ese plano, y con $r(p(w))$ el vector que se obtiene rotando esa proyección un ángulo de medida $\pi/2$ en sentido antihorario observado desde v, se verifica que: $v \wedge w = \|v\| .r\,(p(w))$ pues $\|r\,(p(w))\| = \|p(w)\| = \|w\| \,.\, \text{sen}\, \theta$ (ver figura).



Como $p\,(w_1 + w_2) = p(w_1) + p(w_2)$ y $r\,(p(w_1) + p(w_2)) = r\,(p(w_1)) + r\,(p(w_2))$ tendremos que: $v \wedge (w_1 \wedge w_2) = \|v\| \,.\, r\,(p\,(w_1 + w_2)) = \|v\| \; .r\,(p(w_1)) + \|v\| \,.\, r\,(p(w_2)) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$.

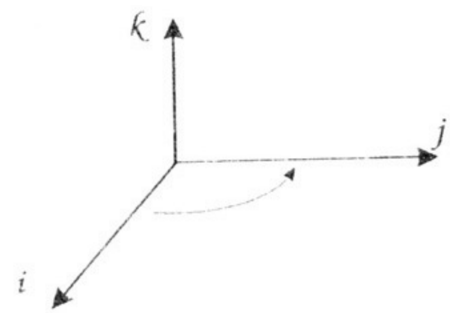
Así se prueba b) y análogamente se obtiene a).

8) Si $\{i, j, k\}$ es una base ortonormal positiva de V, entonces:

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0;$$
$$i \wedge j = k; \quad j \wedge k = i; \quad k \wedge i = j.$$

Es decir, en la sucesión $(i, j, k, i, j, \cdots)$ el producto de dos vectores sucesivos da el que le sigue:

$$j \wedge i = -k,\ k \wedge j = -i;\ i \wedge k = -j.$$



9) De **6)**, **7)** y **8)** resulta que si $v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$. entonces:

$$v \wedge w = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k.$$

Obsérvese que este resultado puede recordarse pensando en el desarrollo por la primer fila de un determinante:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k.$$

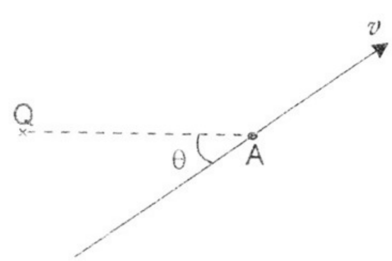
Esta expresión del producto vectorial puede también tomarse como su definición. Más precisamente, dada una terna ortonormal cualquiera $\{i, j, k\}$ (positiva o negativa), puede definirse el producto de dos vectores por la expresión dada en **9)**. Se comprueba entonces sin dificultad que el vector: $u = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k$ verifica $\|u\| =$

$\|v\| \,.\, \|w\| \,.\, \text{sen}\,\theta$ y $u.v = u.w = 0$. Si además $\{i, j, k\}$ es una terna positiva puede verificarse que $\{v, w, u\}$ es también positiva. Luego $u = v \wedge w$, por lo tanto esta definición de $v \wedge w$ coincide con la inicial.

5.5. Aplicaciones geométricas.

a) Distancia de un punto a una recta: sea r una recta dada por un punto A y un vector v. La distancia de Q a r es:

$$d\,(Q, r) = |d\,(Q, A)\,.\,\text{sen}\,\theta| = \|AQ\|\,.\,\text{sen}\,\theta = \frac{\|AQ \wedge v\|}{\|v\|}.$$



Si $A = (x_0, y_0, z_0)$; $Q = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$; $v = ai + bj + ck$ entonces la distancia es $d(Q, r) =$

$$\frac{\sqrt{[(\overline{y} - y_0)c - (\overline{z} - z_0)b]^2 + [(\overline{x} - x_0)c - (\overline{z} - z_0)a]^2 + [(\overline{x} - x_0)b - (\overline{y} - y_0)a]^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

EJEMPLO 5.4. En la Subsección 5.3 de este capítulo se vieron algunas superficies de revolución particulares. Sea $r = \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ y $C = \begin{cases} x = 0 \\ zy = 1 \end{cases}$. Hallar la superficie de revolución de eje r y generatriz C.

Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \ \ P_0 \in C \\ z_0 y_0 = 1, \ \ P_0 \in C \\ x - x_0 + y - y_0 = 0, \ \ plano, \ \ \pi, \ \ por, \ \ P_0 \perp r \\ 2z^2 + (x-y)^2 = 2z_0^2 + (x_0 - y_0)^2, \ \ dist\,(P, r) = dist\,(P_0, r) \end{cases}$$

eliminando x_0, y_0, z_0 resulta $(x+y)^2 \left(z^2 - 2xy\right) = 1$.

b) Intersección de dos planos no paralelos:

Sea $r = \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ una recta (dada como intersección de dos planos no paralelos). Supongamos que queremos las ecuaciones paramétricas de esa recta, es decir, las de la forma: $x = x_0 + \lambda p$, $y = y_0 + \lambda q$, $z = z_0 + \lambda r$ (o también $P = P_0 + \lambda v$). Para esto se necesita hallar un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la recta y un vector $v = p\,i + q\,j + r\,k$ de la dirección de r. Esto se puede hacer sin usar el producto vectorial, resolviendo el sistema de ecuaciones

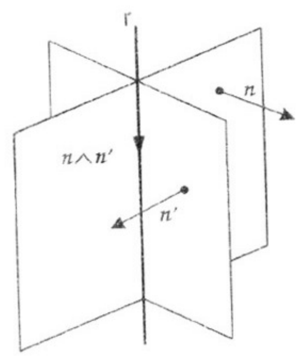
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Usando el producto vectorial: tomar $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ una solución particular del sistema de ecuaciones. Si el sistema de coordenadas es ortogonal, entonces: $n = ai + bj + ck$ y $n' = a'i + b'j + c'k$ son vectores normales a los planos, y entonces $n \wedge n'$ es un vector de la intersección de ambos planos (luego, está en la dirección de la recta de intersección de ambos).

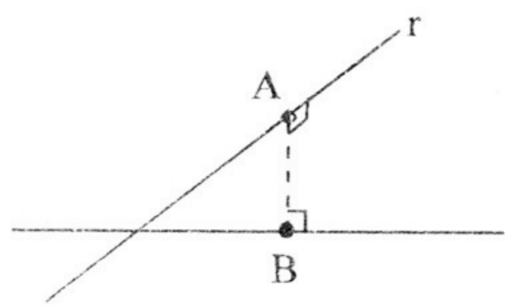
Luego: $n \wedge n' = (bc' - b'c)\,i - (ac' - ca')\,j + (ab' - ba')\,k$ es de la dirección de r.

c) Distancia entre dos rectas: Se define la distancia $d\,(r, r')$ entre dos rectas r, r' como el mínimo de $d\,(P, P')$ donde $P \in r$ y $P' \in r'$.

Es claro que este mínimo se obtiene cuando la recta PP' es perpendicular al mismo tiempo a r y a r'. Sea r dada por un punto $A \in r$ y un vector v de su dirección y r' por $B \in r$ y un vector w.



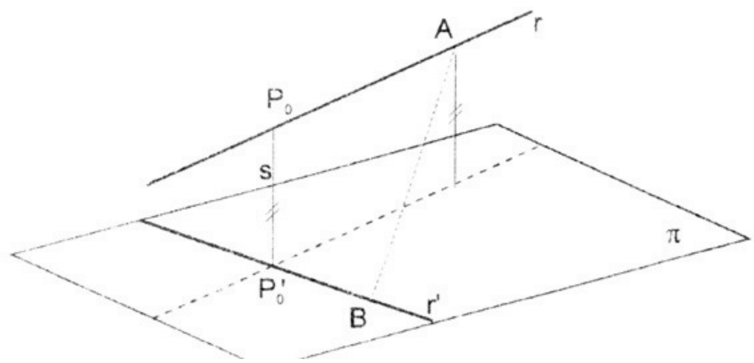
Para obtener $d(r, r')$: si r y r' son paralelas: basta tomar el punto A y hallar $dist(A, r')$; si r y r' se cortan: $d(r, r')$= 0.



Supongamos ahora que r y r' no son coplanares. Si s es la perpendicular común, $P_0 = s \cap r$ y $P_0' = s \cap r'$, entonces: $d(r, r') = d\left(P_0, P_0'\right) = d(A, \pi)$ donde π es el plano paralelo a r que contiene a r' (ver figura más abajo). Como versor de la dirección de s puede tomarse $n = \frac{v \wedge w}{\|v \wedge w\|}$. Luego :

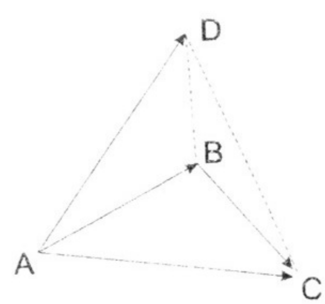
$$d\left(r, r'\right) = d(A, \pi) = \frac{1}{\|v \wedge w\|} \left|(v \wedge w) . \overrightarrow{AB}\right|.$$

d) Perpendicular común a dos rectas: Si las dos rectas son paralelas, una perpendicular común es la recta perpendicular a una de ellas trazada



por un punto de la otra. Si se intersectan, el problema es también fácil de resolver. Supongamos ahora que las dos rectas no son coplanares. La perpendicular común s está en el plano π de s y r, y en el π' determinado por s y r'. Luego $s = \pi \cap \pi'$. Dadas las direcciones v de r y w de r', y puntos $A \in r$, $B \in r'$, el plano π queda determinado por A, v y $v \wedge w$. El plano π' queda determinado por B, w, $v \wedge w$, pues $v \wedge w$ es un vector de la dirección de s. Las ecuaciones de π y π' así obtenidas constituyen un par de ecuaciones que representan la recta s.

e) Volumen de un tetraedro: Consideremos un tetraedro dado por sus vértices A, B, C, D. Su volumen es $V = \frac{1}{3}$ área de la base $\times$ altura. Tendremos: área base $= 1/2\, \|(B - A) \wedge (C - A)\|$.



Si n es el versor normal a la base, la altura es $|n.(D-A)|$ con n igual a

$$n = \frac{(B-A)\wedge(C-A)}{\|(B-A)\wedge(C-A)\|}.$$

Luego

$$V = 1/6.\,\|(B-A)\wedge(C-A)\|\,.\frac{|[(B-A)\wedge(C-A)]\,.(D-A)|}{\|(B-A)\wedge(C-A)\|}$$

por lo que

$$V = 1/6.\,|[(B-A)\wedge(C-A)]\,.(D-A)|\,.$$

5.6. Producto mixto.

Es una operación definida de $V \times V \times V$ en $\mathbb{R}$. Dados tres vectores u, v y w, llamamos producto mixto al número $(v\wedge w)\,.u$ que indicamos $v\wedge w.u$, o también $u.(v\wedge w)$. Consideremos un sistema ortonormal $\{i,j,k\}$ y sean:

$$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k\,,\;\; w = b_1 i + b_2 j + b_3 k\,,\;\; u = c_1 i + c_2 j + c_3 k.$$

Entonces:

$$v\wedge w = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k.$$

$$\Longrightarrow v\wedge w.u = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aquí hemos desarrollamos el determinanrte por la primer fila. Usando el hecho de que si se permutan dos filas de una matriz entre sí el determinante sólo cambia de signo, resulta que dos de esas permutaciones no cambian el determinante; luego:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

En consecuencia: $(v \wedge w).u = (u \wedge v).w = (w \wedge u).v$. Es decir, que en la sucesión (u, v, w, u, v, w) el producto vectorial de dos vectores sucesivos multiplicado escalarmente por el siguiente, da lo mismo cualesquiera sean los tres vectores sucesivos. Se puede entonces hablar del producto mixto de u, v, w sin indicar si se trata de $(u \wedge v).w$ o de $u.(v \wedge w)$, pues el resultado es el mismo. Es por esto que se escribe (u, v, w) como notación para $(u \wedge v).w = u.(v \wedge w)$.

Observamos que $v, w, u) = 0$ si y sólo si $\text{áng}(v \wedge w, u) = \pi/2$ o alguno de los vectores es el nulo. Como áng $(v \wedge w, v) =$ áng $(v \wedge w, w) = \pi/2$, para que $v, w, u) = 0$ es necesario y suficiente que v, w y u sean coplanares. Obsérvese que esto podría sacarse como conclusión del cálculo del volumen del tetraedro: $(v, w, u) = 0$ si y sólo si el volumen del tetraedro determinado por esos vectores es 0, esto es equivalente a decir que los vectores son coplanares.

Esta condición permite escribir la ecuación vectorial del plano dado por tres puntos A, B, C en otra forma. Decir que P pertenece a ese plano equivale a decir que los vectores $P - A$, $B - A$ y $C - A$ son coplanares, o sea que $(P - A,\ B - A,\ C - A) = 0$.

Pasando a coordenadas, si $P = (x, y, z)$, $A = a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ esta ecuación se escribe:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ ó también: } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para ver esto obsérvese que si se le resta la 2da. fila a la 1ra., la 3da. y la 4ta., entonces el determinante no cambia. Así se tiene:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$