MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS (LSQA)

Como ya sabemos este método realiza un ajuste de las observaciones de forma tal que la suma cuadrática de los residuales debe ser mínima, modificando mínimamente las observaciones realizadas y realizando un ajuste con independencia del observador.

El método de Mínimos Cuadrados se puede aplicar mediante dos algoritmos de resolución:

$\mathbf{AMC + M} \rightarrow$ **ADJUSTMENT BY ELEMENTS** Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes

$\mathbf{AMC + C} \rightarrow$ **CONDITION ADJUSTMENTS** Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones

Para la resolución de un problema se podrá optar por ambas técnicas.

(I) AJUSTE DE MÍNIMOS CUADRADOS ADJUSTMENT BY ELEMENTS AMC+M

Esta técnica mediante su proceso de resolución permite el cálculo directo de las magnitudes.

Este tipo de ajuste tiene las siguientes características:

- Las ecuaciones de condición incluyen observaciones y parámetros incógnita.
- El número de ecuaciones de condición es el mismo que el de observaciones.
- Cada ecuación de condición contiene una sola observación con un coeficiente igual a 1.

La forma en que escribimos las ecuaciones es la siguiente:

$$\bar{l} + B\Delta = d$$

Donde:

$$\underbrace{\bar{l}}_{\substack{Magnitud \\ Ajustada}} = \underbrace{l}_{\substack{Magnitud \\ Observada}} + \underbrace{v}_{\substack{Errores \\ Residuales}}$$

B es formada por los coeficientes de los parámetros

Δ contiene a los parámetros

d está formada por las constantes del método

Entonces:

$$(l + v) + B\Delta = d$$
$$v + B\Delta = \underbrace{d - l}_{f}$$

Por lo tanto la forma en la que se expresan las ecuaciones de condición es la siguiente:

$$\boldsymbol{v + B\Delta = f}$$

ADJUSTMENT BY ELEMENTS

$$\begin{gathered}
v_1 + b_{11}\tau_1 + b_{12}\tau_2 + \ldots\ldots + b_{1u}\tau_u = f_1 \\
v_2 + b_{21}\tau_1 + b_{22}\tau_2 + \ldots\ldots + b_{2u}\tau_u = f_2 \\
. \\
. \\
. \\
v_n + b_{n1}\tau_1 + b_{n2}\tau_2 + \ldots\ldots + b_{nu}\tau_u = f_n
\end{gathered}$$

Donde:

$v \rightarrow$ Errores residuales
$b \rightarrow$ Coeficientes numéricos de los parámetros
$\tau \rightarrow$ Parámetros incógnitas
$f \rightarrow$ Constantes numéricas

$n =$ número de observaciones
$n_0 =$ número mínimo de observaciones
$r =$ ecuaciones redundantes
$u =$ números de parámetros

Si lo expresamos en notación matricial, nos queda:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2u} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{nu} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ . \\ . \\ . \\ \tau_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v + B\Delta = f}$$

Ejemplos:

- Un ejemplo de ecuaciones de condición por este método es la doble lectura:

antes poníamos $l_1 + v_1 = \hat{x}$; ahora:

$$\begin{cases} l_1 + v_1 - \hat{x} = 0 \\ l_2 + v_2 - \hat{x} = 0 \end{cases}$$

reemplazamos $\hat{x}$ por Δ

$$v_1 - \Delta = -l_1$$
$$v_2 - \Delta = -l_2$$

podemos agrupar los residuales en una matriz y las observaciones en otra:

$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ $\quad$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ como la matriz coeficiente

$$\rightarrow V + B\Delta = f \rightarrow \boxed{V + B\Delta = f}$$
$(f = -l)$

esta es la forma general de escribir las condiciones de ecuación por la técnica de ajuste de mínimos cuadrados en observaciones indirectas.

- Recuperamos el problema de definir una recta por 3 puntos, $y - ax - b = 0$

Punto:	x	y
1	2	3.2
2	4	4.0
3	6	5.0

escribir las ecuaciones de condición en forma matricial.

$$v_1 + y_1 - ax_1 - b = 0 \rightarrow v_1 - x_1 a - b = -y_1$$
$$v_2 + y_2 - ax_2 - b = 0 \rightarrow v_2 - x_2 a - b = -y_2$$
$$v_3 + y_3 - ax_3 - b = 0 \rightarrow v_3 - x_3 a - b = -y_3$$

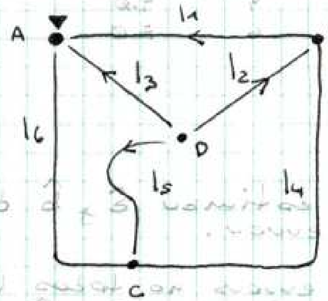
$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3.2 \\ -4.0 \\ -5.0 \end{vmatrix}$$

$$V + B\Delta = f$$

V y f $\quad 3\times1$
B $\quad 3\times2$
Δ $\quad 2\times1$

a y b son los parámetros desconocidos.

- Esto es una red de nivelación donde A es un repere de cota conocida 281.13 m, y se ha nivelado con el metodo directo.



(DESDE)	(A.)	ΔN (l_i)
B	A	11.973
D	B	10.940
D	A	22.932
B	C	21.040
D	C	31.891
A	C	8.983

Hay que calcular las elevaciones de B, C y D.

$n_0 = 3 \quad n = 6 \rightarrow r = 3.$

Si todo estuviera bien, no habría discrepancia al cerrar la nivelación: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A = 0.019$
$(-11.973 - 10.940 + 22.932)$

- Retomamos aquí el problema de la nivelación en red del capítulo anterior.
Se requiere establecer en forma matricial las ecuaciones de condición y dimensiones.
B C y D son z_1 z_2 z_3
Según el ejemplo del C3, las 6 ecuaciones son:
— RED —

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
B + l_1 + v_1 - A = 0 & \rightarrow & v_1 + z_1 = A - l_1 = 269.157 = f_1 \\
D + l_2 + v_2 - B = 0 & \rightarrow & v_2 - z_1 + z_3 = -l_2 = -10.940 = f_2 \\
D + l_3 + v_3 - A = 0 & \rightarrow & v_3 + z_3 = A - l_3 = 258.198 = f_3 \\
B + l_4 + v_4 - C = 0 & \rightarrow & v_4 + z_1 - z_2 = -l_4 = -21.040 = f_4 \\
D + l_5 + v_5 - C = 0 & \rightarrow & v_5 - z_2 + z_3 = -l_5 = -31.891 = f_5 \\
A + l_6 + v_6 - C = 0 & \rightarrow & v_6 - z_2 = -A - l_6 = -290.113 = f_6
\end{array}
\right.
$$

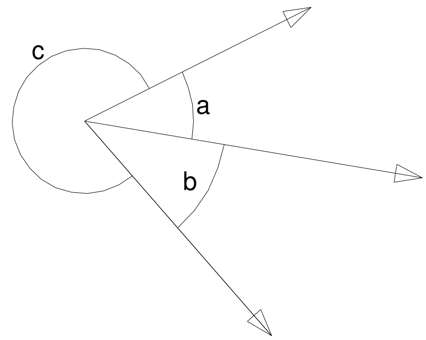
los parámetros a determinar son z_1, z_2, z_3

$$
\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 281.130 \\ 0 \\ 281.130 \\ 0 \\ 0 \\ -281.130 \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} 11.973 \\ 10.940 \\ 22.932 \\ 21.040 \\ 31.891 \\ 8.983 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 269.157 \\ -10.940 \\ 258.198 \\ -21.040 \\ -31.891 \\ -290.113 \end{vmatrix}
$$

$$/\ V + BA = d - l = f\ /$$

→ ∃ cuando son directamente lineales.

- En la siguiente figura se midieron los ángulos a, b y c. Escribir las ecuaciones de condición apropiadas bajo la forma $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.



Las ecuaciones las podemos escribir como:

$$a + v_a = \bar{a}$$
$$b + v_b = \bar{b}$$
$$c + v_c = 360 - \bar{a} - \bar{b}$$

Ordenando, tenemos:

$$v_a - \bar{a} = -a$$
$$v_b - \bar{b} = -b$$
$$v_c + \bar{a} + \bar{b} = 360$$

Llegamos a una expresión de la forma:

$$[v] + [B\Delta] = [d - l] = f$$

Donde:

$$v = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 360 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 360 - c \end{bmatrix}$$

(II) AJUSTE DE MÍNIMOS CUADRADOS CONDITION ADJUSTMENTS AMC+C

Esta técnica mediante su proceso de resolución permite el cálculo directo de las correcciones.

Este tipo de ajuste tiene las siguientes características:

- En las ecuaciones de condición no se incluyen los parámetros incógnitas.
- El número de ecuaciones de condición es igual al de mediciones redundantes.

La forma que escribimos las ecuaciones de condición es la siguiente:

$$\underbrace{\bar{l}}_{\substack{Magnitud\\Ajustada}} = \underbrace{l_1}_{\substack{Magnitud\\Observada}} + \underbrace{v_1}_{\substack{Error\\Residual}}$$

$$\underbrace{\bar{l}} = \underbrace{l_2} + \underbrace{v}_2 \ldots$$

$$l_1+v_1-l_2-v_2=0 \qquad v_1-v_2=-l_1+l_2=f \rightarrow$$

$$Av = \underbrace{d - Al}_{f}$$

Por lo que las ecuaciones de condición se expresan de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{Av = f}$$

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots\ldots + a_{1n}v_n &= f_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots\ldots + a_{2n}v_n &= f_2 \\ &\vdots \\ a_{u1}v_1 + a_{u2}v_2 + \ldots\ldots + a_r v_n &= f_r \end{aligned}$$

Donde: v →*Errores residuales*
a →*Coeficientes numéricos*
f →*Constantes numéricas*

Si lo expresamos en notación matricial, nos queda:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{u1} & a_{u2} & . & . & a_{rn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_r \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

Se considera un triángulo, del mismo se conocen sus tres ángulos internos. Si ajustamos el triángulo por el método de mínimos cuadrados, las ecuaciones de condición son las siguientes:

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \underbrace{180}_{d}$$

$$(\alpha + v_\alpha) + (\beta + v_\beta) + (\gamma + v_\gamma) = 180$$

$$\boldsymbol{v_\alpha + v_\beta + v_\gamma = \underbrace{\underbrace{180}_{d} - \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{Al}}_{f}}$$

$$A = [1,1,1] \quad \text{y} \quad l = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Refiriéndonos nuevamente a la red de nivelación

$l_1 = 11.973$ (B→A)
$l_2 = 10.940$ (D→B)
$l_3 = 22.932$ (D→A)
$l_4 = 21.040$ (B→C)
$l_5 = 31.891$ (D→C)
$l_6 = 8.983$ (A→C)

/ A = 281.130m /

Se debe escribir en forma matricial, las condiciones por mínimos cuadrados.

$m = 6 \quad n_0 = 3 \quad r = 3$ ¿B, C, D?

BADB $\quad l_1 + v_1 - l_3 - v_3 + l_2 + v_2 = 0$
DBCD $\quad l_2 + v_2 + l_4 + v_4 - l_5 + v_5 = 0$
DACD $\quad l_3 + v_3 + l_6 + v_6 - l_5 + v_5 = 0$

reordenando:

$$v_1 + v_2 - v_3 = -(l_1 + l_2 - l_3)$$
$$v_2 + v_4 - v_5 = -(l_2 + l_4 - l_5)$$
$$v_3 - v_5 + v_6 = -(l_3 - l_5 + l_6)$$

en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{vmatrix}$$

$$f = \begin{vmatrix} 0.019 \\ -0.089 \\ -0.024 \end{vmatrix} \qquad / \; Av = -Al \; /$$

(I) ALGORITMO AMC + M

Si trabajamos con observaciones de igual precisión y no correlacionadas, la función que vamos minimizar es:

$$\varphi = v_1^2 + v_2^2 + \ldots\ldots + v_n^2 = \sum_1^n v_i^2$$

Para observaciones de distinta precisión no correlacionadas, la función que vamos a minimizar es:

$$\varphi = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \ldots\ldots + w_n v_n^2 = \sum_1^n w_i v_i^2$$

Como vimos anteriormente, la forma en la que se expresan las ecuaciones de condición es la siguiente:

$$\mathrm{v} + \mathrm{B}\Delta = \mathrm{f}$$

En este método intervienen u parámetros a determinar y n residuales, teniendo un total de $\mathrm{n} + \mathrm{u}$ incógnitas, con lo que estamos en presencia de un sistema de n ecuaciones con $\mathrm{n} + \mathrm{u}$ incógnitas, por lo tanto es indeterminado.

El Método de Mínimos Cuadrados, en su proceso, resuelve esta indeterminación incorporando u ecuaciones de condición (ecuaciones normales), tal que el sistema tenga dimensión $(\mathrm{n} + \mathrm{u}) * (\mathrm{n} + \mathrm{u})$ y con ello obtener una única y óptima solución.

La forma de construir las ecuaciones normales es la siguiente:

Si sustituimos en la función de mínimos cuadrados $\varphi = \mathrm{w}_1\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{w}_2\mathrm{v}_2^2 + \ldots\ldots + \mathrm{w}_\mathrm{n}\mathrm{v}_\mathrm{n}^2$ los residuales que están en función de los parámetros y luego derivamos φ respecto de cada unos de los parámetros e igualando a 0 para hallar el mínimo, se obtienen las u ecuaciones normales.

$\varphi = \mathrm{v}'\mathrm{W}\mathrm{v} \Rightarrow$ $\quad \varphi = (\mathrm{f} - \mathrm{B}\Delta)'\mathrm{W}(\mathrm{f} - \mathrm{B}\Delta)$

$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}$ $\quad \varphi = \big(\mathrm{f}'\mathrm{W} - \Delta'\mathrm{B}'\mathrm{W}\big)\big(\mathrm{f} - \mathrm{B}\Delta\big)$

optimización pues cumple EC COND + MMCC $\quad \varphi = \mathrm{f}'\mathrm{W}\mathrm{f} - \Delta'\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{f} - \mathrm{f}'\mathrm{W}\mathrm{B}\Delta + \Delta'\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{B}\Delta$

Como φ es escalar, todos los términos son escalares y el traspuesto de un escalar es igual a si mismo $\underbrace{\Delta'\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{f}}_{\text{Escalar}} = (\Delta'\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{f})' = \mathrm{f}'\mathrm{W}'\mathrm{B}\Delta = \mathrm{f}'\mathrm{W}\mathrm{B}\Delta$

entonces $\quad \varphi = \mathrm{f}'\mathrm{W}\mathrm{f} - 2\mathrm{f}'\mathrm{W}\mathrm{B}\Delta + \Delta'(\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{B})\Delta$

Recordando que derivada de un término $(\mathrm{X}^\mathrm{t}\mathrm{A}\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^\mathrm{t}\mathrm{A}$ o $\frac{\partial(\Delta'(\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{B})\Delta)}{\Delta} = 2\Delta'\mathrm{B}'\mathrm{W}\mathrm{B}$

entonces $\frac{\partial\varphi}{\partial\Delta} = -2f'WB + 2\Delta'B'WB = 0 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow B'W'f = B'W'B\Delta \rightarrow$

$$\underbrace{B'Wf}_{t} = \underbrace{B'WB}_{N} * \underbrace{\Delta}_{\Delta}$$ Ecuaciones Normales en forma matricial

$t = N * \Delta$, entonces $\rightarrow \boldsymbol{\Delta = N^{-1} * t}$

Vemos que la solución $\Delta = N^{-1}t$ cumple con el modelo geométrico matemático (mediante las Ecuaciones de Condición) y con la minimización de la función φ de mínimos cuadrados.

La matriz Nes simétrica y contiene los coeficientes de las ecuaciones normales, y t es un vector que contiene los términos independientes de las ecuaciones normales.

Por lo tanto este algoritmo combina el modelo matemático planteado por las ecuaciones de condición y el criterio de mínimos cuadrados planteado por las ecuaciones normales. El método utiliza las ecuaciones normales para hallar primero los parámetros, y luego con estos y las ecuaciones de condición, obtenemos los residuales.

Algoritmo de resolución: $\begin{cases} \mathbf{v + B\Delta = f} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{N = B'WB} \\ \mathbf{t = B'Wf} \\ \mathbf{\Delta = N^{-1}t} \end{cases}$

Resumen de Resolución del Algoritmo

Para m observaciones →

$\phi = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \dots + w_m v_m^2 = \sum w_i v_i^2 \to$ mínimo.

Si son de igual precisión $\to w_i = 1$. $\quad W = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} =$ Id.

El sistema en general es:

$$\begin{cases} v_1 + b_{11} z_1 + \dots + b_{1u} z_u = f_1 \\ \vdots \\ v_m + b_{m1} z_1 + \dots + b_{mu} z_u = f_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1u} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

$$v + B \Delta = f$$

m obs
m_0 " mín.
$r = m - m_0$
u parám $= m_0$
c ec. condición
$c = m$

Pero las incógnitas en total son:

$\left.\begin{matrix} v_1 \dots v_m \\ z_1 \dots z_u \end{matrix}\right\} m+u \to \partial$ hay m ecuaciones → INDETERMINADO

→ por MMC se agregarán u ec. más → $\left.\begin{matrix} m+u \text{ incog} \\ m+u \text{ ecuac} \end{matrix}\right\}$

→ DETERMINADO

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z_u} \end{matrix}\right\} \to u \text{ ecuaciones.}$$

El algoritmo resolverá directamente los parámetros incógnita z_i sin calcular v_i
(resaltarlo)

Desarrollo del Algoritmo explicitado para la Red de Nivelación por AMC+M

Solve the level net problem of Examples 3-7 and 4-2 using the procedure of adjustment of indirect observations for two cases, (1) when the observed differences in elevation are uncorrelated and have equal precision, and (2) when the *weight* of each observation is inversely proportional to the leveled distance (see Fig. 3-7).

Solution

Recall from Example 4-2 the matrices for the condition equations $\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 269.157 \\ -10.940 \\ 258.198 \\ -21.040 \\ -31.891 \\ -290.113 \end{bmatrix}$$

(1) For the first case, the weight matrix $\mathbf{W}$ of the observations is the identity matrix because the observations are uncorrelated and have equal precision. Consequently, the $\mathbf{N}$ and $\mathbf{t}$ matrices are [see Eqs. (4-28) and (4-29)]

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}'\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}'\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 269.157 \\ -10.940 \\ 258.198 \\ -21.040 \\ -31.891 \\ -290.113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 259.057 \\ 343.044 \\ 215.367 \end{bmatrix}$$

The inverse of $\mathbf{N}$ is

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

and

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = 1/4\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 259.057 \\ 343.044 \\ 215.367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 269.131 \\ 290.128 \\ 258.209 \end{bmatrix} \text{m}$$

which are the elevations of points B, C, and D when the observed differences in elevation are assumed equal in weight.

(2) The weight of each difference in elevation is proportional to the reciprocal of the leveled distance between the two points. These distances are given below.

Observation	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6
Distance (km)	20	12	15	28	20	26
Reciprocal of distance	0.050	0.083	0.067	0.036	0.050	0.039
Weight	1.400	2.333	1.867	1.000	1.400	1.077

The weights are such that the smallest value (0.036) in the third line is given a weight value of 1.0 and the rest are proportionately computed. Thus the weight matrix is

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1.400 & & & & & \\ & 2.333 & & & & \\ & & 1.867 & & & \\ & & & 1.000 & & \\ & & & & 1.400 & \\ & & & & & 1.077 \end{bmatrix}.$$

With this matrix, the corresponding normal equation matrices are

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^t\mathbf{W}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.400 & & & & & \\ & 2.333 & & & & \\ & & 1.867 & & & \\ & & & 1.000 & & \\ & & & & 1.400 & \\ & & & & & 1.077 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.733 & -1.000 & -2.333 \\ -1.000 & 3.477 & -1.400 \\ -2.333 & -1.400 & 5.600 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{t}=\mathbf{B}^t\mathbf{W}\mathbf{f}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.400 & & & & & \\ & 2.333 & & & & \\ & & 1.867 & & & \\ & & & 1.000 & & \\ & & & & 1.400 & \\ & & & & & 1.077 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 269.157 \\ -10.940 \\ 258.198 \\ -21.040 \\ -31.891 \\ -290.113 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 381.3028 \\ 378.1391 \\ 411.8852 \end{bmatrix}.$$

The inverse of **N** is

$$\mathbf{N}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.337902 & 0.171085 & 0.183543 \\ 0.171085 & 0.406418 & 0.172880 \\ 0.183543 & 0.172880 & 0.298256 \end{bmatrix}.$$

The three parameters (i.e., elevations of points B, C, and D) are then

$$\mathbf{\Delta}=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{t}=\begin{bmatrix} 0.337902 & 0.171085 & 0.183543 \\ 0.171085 & 0.406418 & 0.172880 \\ 0.183543 & 0.172880 & 0.298256 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 381.3028 \\ 378.1391 \\ 411.8852 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 269.135 \\ 290.124 \\ 258.205 \end{bmatrix}\text{m.}$$

(II) ALGORITMO AMC + C

De acuerdo a lo visto en la introducción referente al ajuste para el cálculo de las correcciones, tenemos que la forma matricial es:

$$\underbrace{A}_{(r,n)}\ \underbrace{v}_{(n,1)} = \underbrace{f}_{(r,1)}$$

donde r es la redundancia y n es el número de observaciones.

Cuando aplicamos el método de mínimos cuadrados se obtienen r ecuaciones de condición, con n residuales no conocidos, donde $r = n - n_0$ y $r < n$, por lo tanto no tenemos una única solución. Pero el método en su resolución incorpora r ecuaciones adicionales que transforman al sistema para que sea determinado.

Podemos ver que no es posible la sustitución de los residuales v_i en la función φ como si lo era en el ajuste de las magnitudes, por ello el método introduce una aproximación. Dicha aproximación respeta la minimización de la función $\dot{\varphi}$ y a su vez cumple con las ecuaciones de condición. Para ello se introducen los Multiplicadores de Lagrange K_i de forma normal, al solo efecto de poder separa los residuales v_i.

OPTIMIZACION

$$\dot{\varphi} = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + \ldots\ldots + w_n v_n^2 - 2K_1\left(\underbrace{1^{er} Ec.Cond}_{=0}.\right) - 2K_2\left(\underbrace{2^{da} Ec.Cond}_{=0}.\right) - \ldots\ldots - 2K_r\left(\underbrace{r^{o} Ec.Cond.}_{=0}\right)$$

Al derivar la función φ respecto de cada multiplicador de Lagrange se obtienen las ecuaciones adicionales, las cuales son las mismas que las ecuaciones de condición.

Al derivar la función φ respecto de cada residual:

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_1} = 0, \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_2} = 0, \cdots, \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_n} = 0 \quad \therefore \quad 2w_1v_1\text{-}2a_1k_1\text{=}0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{w_1} a_{ii}{}' k_1$$

en notación matricial se expresa como:

$$v = W^{-1}A'K$$

donde:

- v_{1xn} *es el vector que contiene a los residuales*
- W_{nxn} *es la matriz peso de las observaciones*
- A_{nxr} *es la matriz de los coeficientes de las ecuaciones de condición*
- A'_{rxn} *es la matriz de los coeficientes de los Multiplicadores de Lagrange*
- K_{1xr} *es el vector que contiene a los Multiplicadores de Lagrange*

Llamamos **Q** a la **Matriz Cofactor**, es una matriz diagonal que representa las varianzas relativas de las observaciones.

$$Q = W^{-1}$$

Cuando la varianza referencial $\sigma_0^2 = 1$, la matriz cofactor es igual a la matriz varianza

$$\rightarrow Q = \Sigma$$

Entonces si tenemos: $\left.\begin{array}{c} v = W^{-1}A'K \\ Av = f \end{array}\right\} \rightarrow AW^{-1}A'K = f \rightarrow \underbrace{AQA'}_{Q_e}K = f$

Sustituyendo v en Av…

Llamamos $\mathbf{Q_e = AQA'}$ es la **Matriz Cofactor Equivalente**, es una matriz cuadrada.

$$Q_eK = f \rightarrow K = Q_e^{-1}f$$

Siendo $W_e = Q_e^{-1}$ la matriz peso equivalente.

Si imponemos el criterio de Mínimos Cuadrados: $\varphi = v'Wv$ y sumamos los multiplicadores de Lagrange, tenemos:

$\varphi^{\bullet} = v'Wv - 2K'(Av - f) \Rightarrow \frac{\partial\varphi^{\bullet}}{\partial v} = 2v'W - 2K'A = 0 \Rightarrow$ traspongo y $Wv = A'K \Rightarrow$ por ser W simétrica

$$\mathbf{v = W^{-1}A'K = QA'K}$$

Tenemos entonces que el algoritmo de resolución es el siguiente:

Algoritmo de resolución: $\left\{\begin{array}{c} \mathbf{Av = f} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{Q = W^{-1}} \\ \mathbf{Q_e = AQA'} \\ \mathbf{K = Q_e^{-1}f} \\ \mathbf{v = QA'K} \end{array}\right.$

Desarrollo del Algoritmo explicitado por un caso (RED NIVELACION):

$$vA = f \rightarrow \underset{r\,m}{A}\ \underset{m\,1}{v} = \underset{r\,1}{f}$$

las ecuaciones adicionales son obtenidas por la aplicación de los mínimos cuadrados y su derivación.
Para un ejemplo vamos a tomar el problema de la red de nivelación; las ecuaciones de condición son:

$$v_1 + v_2 - v_3 = -(l_1 + l_2 - l_3) = f_1$$
$$v_2 + v_4 - v_5 = -(l_2 + l_4 - l_5) = f_2$$
$$v_3 + v_5 + v_6 = -(l_3 - l_5 + l_6) = f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & +1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

asumiendo las observaciones no relacionadas y de desigual precisión →

$$\phi = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + w_3 v_3^2 + w_4 v_4^2 + w_5 v_5^2 + w_6 v_6^2$$ y debe ser minimizada.

Hay que asegurarse que al mismo tiempo de minimizar ϕ las ecuaciones de condición se cumplan.

Esto es posible si escribimos las ecuaciones en forma normal (=0) y multiplicando los términos por $-2K_i$ y adicionando a ϕ.
K_i son llamados los multiplicadores de Lagrange → K_i son introd.

$$\phi' = w_1 v_1^2 + \cdots + w_6 v_6^2 - 2K_1(v_1 + v_2 - v_3 + f_1) - 2K_2(v_2 + v_4 - v_5 - f_2) - 2K_3(v_3 - v_5 + v_6 - f_3)$$

El -2 es simplemente para operaciones.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v_1} = 2w_1 v_1 - 2K_1 = 0 \rightarrow v_1 = \frac{1}{w_1} K_1$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v_2} = 2w_2 v_2 - 2(K_1 + K_2) = 0 \rightarrow v_2 = \frac{1}{w_2}(K_1 + K_2)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v_3} = 2w_3 v_3 - 2(-K_1 + K_3) = 0 \rightarrow v_3 = \frac{1}{w_3}(-K_1 + K_3)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v_4} = 2w_4 v_4 - 2K_2 = 0 \rightarrow v_4 = \frac{1}{w_4} K_2$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v_5} = 2w_5 v_5 - 2(-K_2 - K_3) = 0 \rightarrow v_5 = \frac{1}{w_5}(-K_2 - K_3)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v_6} = 2w_6 v_6 - 2K_3 = 0 \rightarrow v_6 = \frac{1}{w_6} K_3$$

ϕ' diferenciando respecto K_1 K_2 y K_3 e igualando a $\emptyset$ → tenemos,

$$\frac{\partial \phi'}{\partial K_1} = -2(v_1 + v_2 - v_3 - f_1) = \emptyset \rightarrow v_1 + v_2 - v_3 = f_1$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial K_2} = -2(v_2 + v_4 - v_5 - f_2) = \emptyset \rightarrow v_2 + v_4 - v_5 = f_2$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial K_3} = -2(v_3 - v_5 + v_6 - f_3) = \emptyset \rightarrow v_3 - v_5 + v_6 = f_3$$

ECUACIONES COMPLEMENTARIAS

que son idénticas a las ecuaciones de condición. → la introducción de las K de Lagrange requieren el cumplimiento de las condiciones mientras ϕ es minimizado. En notación matricial:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/w_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset \\ 1 & 1 & \emptyset \\ -1 & \emptyset & 1 \\ \emptyset & 1 & \emptyset \\ \emptyset & -1 & -1 \\ \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

la matriz $1/w_i$ es $Q = W^{-1}$ es denominada matriz cofactor

La matriz cofactor representa las varianzas relativas de las observaciones.
Cuando $\sigma_0^2 = 1 \rightarrow Q$ es identica a la matriz varianza Σ.
La segunda matriz en el lado derecho es la matriz transpuesta de las ec. de condición A.

K, vector Lagrange $= \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$

→ la ecuación (I) puede escribirse como

$v = W^{-1} A^t K = Q A^t K \quad (II)$

sustituyendo en $Av = f$

$A(QA^tK) = (AQA^t)K = f$

la cantidad (AQA^t) es una matriz cuadrada pudiendo determinar las ecuaciones normales

$\rightarrow Q_c = AQA^t$

$\rightarrow Q_c K = f$

y la solución es $K = Q_c^{-1} f = W_c f$

Vemos que la c se usa para cofactores.

$W_c = Q_c^{-1} = (AQA^t)^{-1} \quad (III)$

Tanto II como III en general puede ser aplicado para observaciones relacionadas o no.
Para los mínimos cuadrados debemos minimizar

$\phi = v^t W v$

junto con $Av = f$

$\phi' = v^t W v - 2K^t(Av - f)$ debe ser minimizada.

$\frac{\partial \phi'}{\partial v} = 2v^t W - 2K^t A = 0$

$\rightarrow Wv = A^t K$

notar que W es simetrica $\rightarrow W^t = W$.

$\rightarrow v = W^{-1} A^t K = Q A^t K$ que es identica a la formulación anterior (II)

Los pasos o algoritmos del proceso de mínimos cuadrados son los siguientes:

1) Q_c es formado usando $Q_c = AQA^t$ y multiplicado por el vector k tenemos f.

2) Con el valor de k los residuales son calculados por la ecuación (II), y usando se adiciona l para ajustar $\hat{l}$.

Desarrollo del Algoritmo explicitado para la Red de Nivelación por AMC+C

FROM (LOWER POINT)	TO (HIGHER POINT)	OBSERVED DIFFERENCE IN ELEVATION (m)	LEVELED DISTANCE (km)
B	A	$\ell_1 = 11.973$	20
D	B	$\ell_2 = 10.940$	12
D	A	$\ell_3 = 22.932$	15
B	C	$\ell_4 = 21.040$	28
D	C	$\ell_5 = 31.891$	20
A	C	$\ell_6 = 8.983$	26

The elevation of A is fixed at 281.130 m.

Using the procedure of least squares adjustment of observations only, calculat the elevations of points B, C, and D for two cases:

1. When the measured differences in elevation are uncorrelated and have th same weight.
2. When the measurements are uncorrelated but have weights that are inversel proportional to the respective leveled distances.

Solution

As discussed in Example 4-4, $n_0 = 3$, and with $n = 6$, the redundancy is $r = 3$. The conditions corresponding to this redundancy may be written for three independent loops, each starting with, and closing on, the same point. Using the same loops as used in Example 4-4, and referring to Fig. 3-7, the three conditions are

Loop B-A-D-B $\quad \ell_1 + v_1 - \ell_3 - v_3 + \ell_2 + v_2 = 0$

Loop D-B-C-D $\quad \ell_2 + v_2 + \ell_4 + v_4 - \ell_5 - v_5 = 0$

Loop D-A-C-D $\quad \ell_3 + v_3 + \ell_6 + v_6 - \ell_5 - v_5 = 0.$

Rearranging these equations into the matrix form $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$, we have

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell_1 - \ell_2 + \ell_3 \\ -\ell_2 - \ell_4 + \ell_5 \\ -\ell_3 + \ell_5 - \ell_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.019 \\ -0.089 \\ -0.024 \end{bmatrix}.$$

(1) In this case, the cofactor matrix is $\mathbf{Q} = \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$. Thus,

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{AQA}^t = \mathbf{AA}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{Q}_c^{-1} = (1/16) \begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.50 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.50 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{W}_c\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.50 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.50 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.019 \\ -0.089 \\ -0.024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0258 \\ -0.0433 \\ 0.0150 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^t\mathbf{k} = \mathbf{A}^t\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0258 \\ -0.0433 \\ 0.0150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.026 \\ -0.018 \\ -0.011 \\ -0.043 \\ 0.028 \\ 0.015 \end{bmatrix}.$$

The adjusted observations are

$$\hat{\ell}_1 = \ell_1 + v_1 = 11.973 + 0.026 = 11.999 \text{ m}$$
$$\hat{\ell}_2 = \ell_2 + v_2 = 10.940 - 0.018 = 10.922 \text{ m}$$
$$\hat{\ell}_3 = \ell_3 + v_3 = 22.932 - 0.011 = 22.921 \text{ m}$$
$$\hat{\ell}_4 = \ell_4 + v_4 = 21.040 - 0.043 = 20.997 \text{ m}$$
$$\hat{\ell}_5 = \ell_5 + v_5 = 31.891 + 0.028 = 31.919 \text{ m}$$
$$\hat{\ell}_6 = \ell_6 + v_6 = \ \ 8.983 + 0.015 = \ \ 8.998 \text{ m.}$$

At this point, the least squares adjustment is technically complete. The elevations of points B, C, and D are obtained from the adjusted observations by reference to Fig. 3-7. It should be emphasized that regardless of which combination of adjusted differences in elevation is used, the calculated elevation of any point is unique, because the adjusted observations are consistent with the model, i.e., they satisfy the condition equations. For example, the elevation of point B may be calculated as

$$B = A - \hat{\ell}_1 = 281.130 - 11.999 = 269.131 \text{ m}$$

or as

$$B = A - \hat{\ell}_3 + \hat{\ell}_2 = 281.130 - 22.921 + 10.922 = 269.131\text{m.}$$

Similarly,

$$C = A + \hat{\ell}_6 = 281.130 + \ \ 8.998 = 290.128 \text{ m}$$
$$D = A - \hat{\ell}_3 = 281.130 - 22.921 = 258.209 \text{ m.}$$

All values computed agree exactly with the results obtained in Example 3-7 and in Example 4-7 using the technique of least squares adjustment of indirect observations. This clearly shows that no matter which technique is used, the least squares adjustment results for a given problem are, except for round off, the same.

(2) In this case, the weight of each measurement is inversely proportional to the leveled distance. Thus the weight matrix $\mathbf{W}$ is

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a/20 & & & & & \\ & a/12 & & & & \\ & & a/15 & & & \\ & & & a/28 & & \\ & & & & a/20 & \\ & & & & & a/26 \end{bmatrix},$$

where a is the constant of proportionality. Since the cofactor matrix $\mathbf{Q}$ is the inver of the weight matrix, then

$$\mathbf{Q} = 1/a \begin{bmatrix} 20 & & & & & \\ & 12 & & & & \\ & & 15 & & & \\ & & & 28 & & \\ & & & & 20 & \\ & & & & & 26 \end{bmatrix}.$$

Now, any convenient value can be selected for a. Let $a = 12$; then

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1.67 & & & & & \\ & 1.00 & & & & \\ & & 1.25 & & & \\ & & & 2.33 & & \\ & & & & 1.67 & \\ & & & & & 2.17 \end{bmatrix}.$$

Thus

$$\mathbf{AQ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.67 & & & & & \\ & 1.00 & & & & \\ & & 1.25 & & & \\ & & & 2.33 & & \\ & & & & 1.67 & \\ & & & & & 2.17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.67 & 1.00 & -1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 2.33 & -1.67 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & 0 & -1.67 & 2.17 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{AQA}^t = \begin{bmatrix} 1.67 & 1.00 & -1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 2.33 & -1.67 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & 0 & -1.67 & 2.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.92 & 1.00 & -1.25 \\ 1.00 & 5.00 & 1.67 \\ -1.25 & 1.67 & 5.09 \end{bmatrix},$$

and so

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{Q}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3158 & -0.1000 & 0.1104 \\ -0.1000 & 0.2563 & -0.1087 \\ 0.1104 & -0.1087 & 0.2592 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{W}_c\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.3158 & -0.1000 & 0.1104 \\ -0.1000 & 0.2563 & -0.1087 \\ 0.1104 & -0.1087 & 0.2592 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.019 \\ -0.089 \\ -0.024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01225 \\ -0.02210 \\ 0.00555 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^t\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1.67 & 0 & 0 \\ 1.00 & 1.00 & 0 \\ -1.25 & 0 & 1.25 \\ 0 & 2.33 & 0 \\ 0 & -1.67 & -1.67 \\ 0 & 0 & 2.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01225 \\ -0.02210 \\ 0.00555 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0205 \\ -0.0099 \\ -0.0084 \\ -0.0515 \\ 0.0276 \\ 0.0120 \end{bmatrix}.$$

The least squares adjusted observations are

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_1 &= \ell_1 + v_1 = 11.994 \text{ m} \\ \hat{\ell}_2 &= \ell_2 + v_2 = 10.930 \text{ m} \\ \hat{\ell}_3 &= \ell_3 + v_3 = 22.924 \text{ m} \\ \hat{\ell}_4 &= \ell_4 + v_4 = 20.988 \text{ m} \\ \hat{\ell}_5 &= \ell_5 + v_5 = 31.919 \text{ m} \\ \hat{\ell}_6 &= \ell_6 + v_6 = \ \ 8.995 \text{ m.} \end{aligned}$$

The elevations of the three points are

$$\begin{aligned} B &= A - \hat{\ell}_1 = 281.130 - 11.994 = 269.136 \text{ m} \\ C &= A + \hat{\ell}_6 = 281.130 + \ \ 8.995 = 290.125 \text{ m} \\ D &= A - \hat{\ell}_3 = 281.130 - 22.924 = 258.206 \text{ m.} \end{aligned}$$

Comparando las resoluciones del mismo problema AMCM/AMCC:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0.337902 & 0.171085 & 0.183543 \\ 0.171085 & 0.406418 & 0.172880 \\ 0.183543 & 0.172880 & 0.298256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 381.3028 \\ 378.1391 \\ 411.8852 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 269.135 \\ 290.124 \\ 258.205 \end{bmatrix} \text{m.}$$

Aplicación: **MEDIA PONDERADA**

Veremos que ocurre cuando tenemos que calcular el promedio ponderado, por ejemplo si tenemos tres mediciones de una distancia l_1, l_2 y l_3 y los correspondientes pesos w_1, w_2 y w_3.

Las ecuaciones de condición que tenemos son las siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= l_1 + v_1 \\ \bar{l} &= l_2 + v_2 \\ \bar{l} &= l_3 + v_3 \end{aligned}$$

Si lo expresamos en forma matricial, nos queda:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{l} = \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \end{bmatrix}$$

Aplicamos el algoritmo del AMC-M:

$$N = B'WB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = w_1 + w_2 + w_3$$

$$t = B'Wf = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ -l_3 \end{bmatrix} = w_1 l_1 + w_2 l_2 + w_3 l_3$$

$$\bar{l} = N^{-1} t = \frac{w_1 l_1 + w_2 l_2 + w_3 l_3}{w_1 + w_2 + w_3}$$

Si generalizamos nos queda:

$$\boxed{\bar{\mathbf{l}} = \frac{\sum \mathbf{w_i l_i}}{\sum \mathbf{w_i}}}$$