Tarea 1 de Programación 3
9 de setiembre de 2024

Se debe entregar un archivo con formato `PDF` con las soluciones de los ejercicios propuestos. El nombre del archivo debe ser **Tarea1_<Grupo>.pdf**, donde <Grupo> debe ser sustituido por el número que le corresponde al grupo.

Cada grupo debe realizar la entrega en el receptor correspondiente al horario de monitoreo que le fue asignado. Los receptores se encuentran en la pestaña Evaluaciones del sitio del curso.

El plazo para la entrega es el **lunes 16** de setiembre a las **8:00 AM**.

Para resolver cada parte puede usar los enunciados de las anteriores y resultados estudiados durante el curso, salvo que se indique lo contrario.

Problema vértices obligatorios

Decimos que un vértice v de un grafo G es un vértice *obligatorio* si existen al menos dos vértices, s y t, de G, ambos distintos de v, tales que v pertenece a cada camino s-t de G.

Nos proponemos diseñar un algorimo que encuentre todos los vértices obligatorios de un grafo conexo dado.

Sean G un grafo conexo de al menos tres vértices, y T el árbol resultado de realizar una recorrida `DFS` sobre G comenzando en un vértice r cualquiera. El árbol T se considera orientado y con raíz en r. En general, para cualquier vértice x de G llamamos T_x al subárbol de T que tiene a x como raíz.

(a) Demuestre que si en T la raíz r tiene al menos dos hijos, x_1 y x_2, y s y t son vértices de T_{x_1} y T_{x_2} respectivamente, entonces r pertenece a cualquier camino s-t de G.

(b) Recordemos que la profundidad de un vértice v en un árbol con raíz r es la longitud (cantidad de aristas) del camino que empieza en r y termina en el vértice v.

Sea v un vértice de T que es distinto de r (la raíz de T) y no es una hoja, y sea x un hijo de v. Supongamos que ninguna arista (u, w) de G cumple que u pertenece a T_x y w tiene profundidad menor a v.

Demuestre que si s pertenece a T_x y t es distinto de v y no pertenece a T_x entonces v pertenece a cualquier camino s-t de G.

(c) Diseñe un algoritmo que encuentre todos los vértices obligatorios de un grafo conexo $G = (V, E)$.

El algoritmo debe tener tiempo de ejecución $O(|E|)$, y el espacio auxiliar usado debe ser $O(|V|)$. El grafo se representa mediante listas de adyacencia.

(d) Demuestre que el algoritmo es correcto.

(e) Demuestre que el tiempo de ejecución del algoritmo es $O(|E|)$.