Práctico 3: Razonamiento lógico

Ejercicio 1 (Conectivas "y" ($\wedge$), "o" ($\vee$))
Mostrar que cada una de las propiedades siguientes se puede expresar en lenguaje matemático por un enunciado "P y Q" o "P o Q" (x e y son números reales):

a) $(x-2)(x+3)=0$.
Solución: $(x-2)(x+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \ \ o \ \ x=-3$

b) $x^2-1=0$.
Solución: $x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \ \ o \ \ x=1$

c) $xy>0$.
Solución: $xy>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x>0 \ \ e \ \ y>0) \ \ o \ \ (x<0 \ \ e \ \ y<0)$

d) $(x-2)(x-3)\neq 0$.
Solución: $(x-2)(x-3)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq 2 \ \ y \ \ x\neq -3$

e) $x^2-1\neq 0$.
Solución: $x^2-1\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1 \ \ y \ \ x\neq 1$

f) $xy\leq 0$.
Solución: $xy\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x\leq 0 \ \ e \ \ y\geq 0) \ \ o \ \ (x\geq 0 \ \ e \ \ y\leq 0)$

Ejercicio 2 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))

1. *Dado un número real x cualquiera, nos interesamos en la afirmación "$x^2>4$".*
Determinar si cada una de las condiciones siguientes es suficiente para dicha afirmación:

a) $x>100$	d) $x<-2$	g) $x<-2,1$
b) $x>10^6$	e) $x<-2 \ \ o \ \ x>2$	h) $x<-3 \ \ o \ \ x>3$
c) $x>1,9$	f) $x<-10$	i) $x<0$

Entre las que son suficientes, indicar cuáles son necesarias.

Solución:

a) $x>100$ *es suficiente.*
b) $x>10^6$ *es suficiente.*
c) $x>1{,}9$ *no es suficiente.*
d) $x<-2$ *es suficiente.*
e) $x<-2$ *o* $x>2$ *es suficiente.*
f) $x<-10$ *es suficiente.*
g) $x<-2{,}1$ *es suficiente.*
h) $x<-3$ *o* $x>3$ *es suficiente.*
i) $x<0$ *no es suficiente.*

De las anteriores, sólo la condición $x<-2$ *o* $x>2$ *es necesaria.*

2. *Nos interesamos ahora en la afirmación "$x^2>10^3$".*
Dar seis condiciones suficientes para dicha afirmación, y una necesaria.

y una necesaria.
Solución:

- $x > 1000$.
- $x > 100$.
- $x < -200$.
- $x \in (50, 100)$.
- $x \in [-160, -150]$.
- $x > 10\sqrt{10}$ *o* $x < -10\sqrt{10}$. *Esta condición es, además, necesaria.*

Una condición necesaria pero no suficiente es, por ejemplo, $|x| > 5$.

Ejercicio 3 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))
En cada uno de los casos siguientes, reducir la condición suficiente dada para que sea necesaria:

1. *Sea x un real positivo. Si $x > 4$ entonces $x^2 > 10$.* **Solución:**
   Sea x un real positivo. Se tiene que $x > \sqrt{10}$ si y solo si $x^2 > 10$.
   (Obsérvese que ser mayor que $\sqrt{10}$ es menos "exigente" que ser mayor que 4).

2. *Sean x e y reales no negativos. Si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x + y > 0$.* **Solución:**
   Sean x e y reales no negativos. Tenemos que $x > 0$ **o** *$y > 0$ si y solo si $x + y > 0$.*

Ejercicio 4 (Condición necesaria y suficiente ($\Leftrightarrow$))
En cada uno de los casos siguientes, completar la condición necesaria dada para que sea suficiente:

1. *Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario que sus diagonales sean perpendiculares.*

   Solución:
   Para que un cuadrilátero $ABCD$ sea un rombo, es necesario y suficiente que sus diagonales sean perpendiculares y se corten en el punto medio de ambas.

2. *Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario que su intersección sea vacía.*

   Solución:
   Para que dos rectas del espacio sean paralelas, es necesario y suficiente que su intersección sea vacía y que pertenezcan a un mismo plano.

3. *Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario que $ab > 0$ y que $bc > 0$.*

   Solución:
   Para que los tres números reales a, b, c sean positivos, es necesario y suficente que $ab > 0$, que $bc > 0$ y que a sea positivo.

Ejercicio 5 (Cuantificadores ($\forall, \exists$))
Para cada una de las proposiciones siguientes, indicar (en los puntos "...") el cuantificador que permite que dicha proposición sea verdadera:

1. $\ldots x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$.

   Solución:
   $\exists!\ x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$.

2. $\ldots x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$

   Solución:
   $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$
   (observar que si el cuantificador $\forall$ sirve, entonces también servirá el cuantificador $\exists$, por ejemplo, en este caso: $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$).

3. $\ldots a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0.$

   Solución:
   $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0.$

4. $\ldots x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$

   Solución:
   $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$

5. $\ldots x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$

   Solución:
   $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$

6. $\ldots x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \cos(x).$

   Solución:
   $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \cos(x)$

Ejercicio 6 (Negación)
Completar el cuadro siguiente:

P	*no* P
$x \in \mathbb{N}$	$x \notin \mathbb{N}$
$x \neq 1$	$x = 1$
$13{=}12$	$13 \neq 12$
$x > 0$	$x \leq 0$
$x \leq 1$	$x > 1$

Ejercicio 7 (Negación) *Completar el cuadro siguiente:*

P	P (v o f)	no P (v o f)	no P
Todos los triángulos son rectángulos.	F	V	*Existe un triángulo que no es rectángulo*
Existe un real x tal que $x^2 < 0$.	F	V	*Todos los números reales x cumplen $x^2 \geq 0$*
Todos los cuadriláteros no se pueden inscribir en una cfa.	F	V	*Existe algún cuadrilátero que se puede inscribir en una cfa.*
Existen triángulos que tienen ángulos obtusos.	V	F	*Todos los triángulos no tienen ángulos obtusos*
Todos los números reales verifican $x^2 \geq 1$.	F	V	*Existe un número real x que verifica $x^2 < 1$*
Existe al menos un divisor de 12 que no es divisor de 18	V	F	*Todos los divisores de 12 son divisores de 18*

Entonces:

- *la negación de una frase que empieza por "existe..." es para todo.*
- *la negación de una frase que empieza por "todos los..." es existe.*

Ejercicio 8 (Negación)
Decir si cada afirmación es verdadera o falsa y negarla

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$ F $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 > x$ V $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq x$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 = x$ V $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \neq x$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = x$ V $\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 \neq x$

Ejercicio 9 (Contrarrecíproco)
Escribir el contrarrecíproco de cada una de los enunciados siguientes:

1. *Si es el 1$^{\text{ero}}$ de enero entonces el museo está cerrado.*

   Solución: *Si el museo está abierto entonces no es el 1$^{\text{ero}}$ de enero.*

2. *Un número entero que es múltiplo de 6 es también múltiplo de 3.*

   Solución: *Un número entero que no es múltiplo de 3 tampoco es múltiplo de 6.*

3. *Si un número es mayor que 7 entonces es mayor que 4.*

   Solución: *Si un número es menor o igual a 4, entonces es menor o igual a 7.*

4. *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ entonces $x + 4 > 0$.*

   Solución: *Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x + 4 \leq 0$ entonces $x \leq 0$.*

5. *Si un triángulo ABC es rectángulo en A entonces $BC^2 = AC^2 + AB^2$.*

   Solución: *Si $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$ entonces el triángulo ABC no es rectángulo en A.*