



CLASE II

MOTORES TIPO CARNOT

ENDORREVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Alejandro Medina

Septiembre 2024

<http://diarium.usal.es/termodinamica>



ESQUEMA

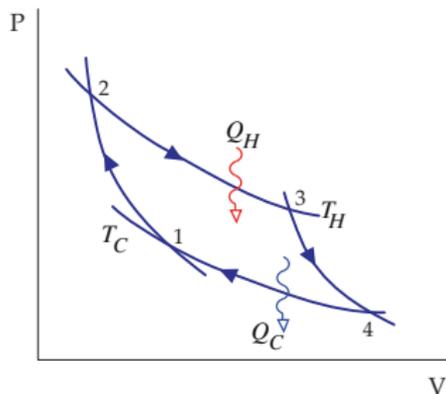
- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN
- 5 FRIGORÍFICOS TIPO CARNOT



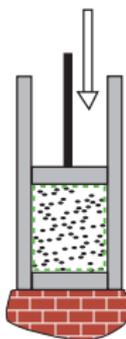
ESQUEMA

- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN
- 5 FRIGORÍFICOS TIPO CARNOT

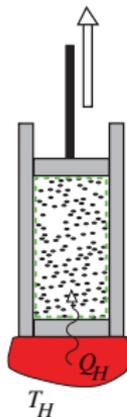
CICLO DE CARNOT



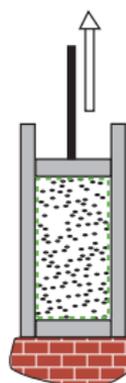
compresión
adiabática



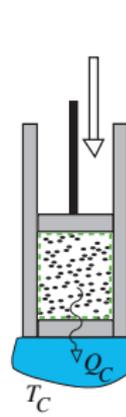
expansión
isoterma



expansión
adiabática



compresión
isoterma



Si todos los procesos son reversibles:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

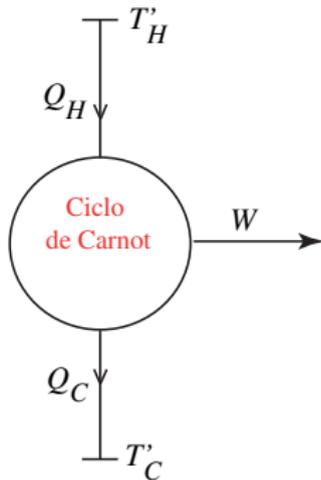


ESQUEMA

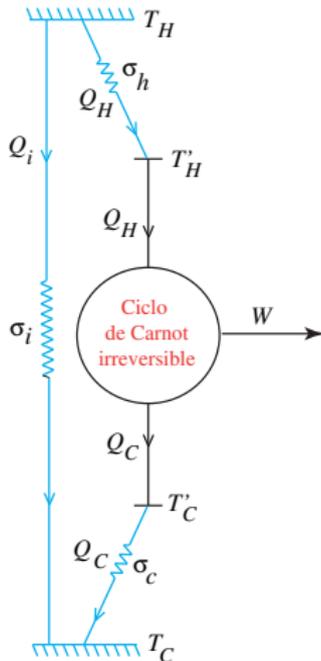
- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN
- 5 FRIGORÍFICOS TIPO CARNOT



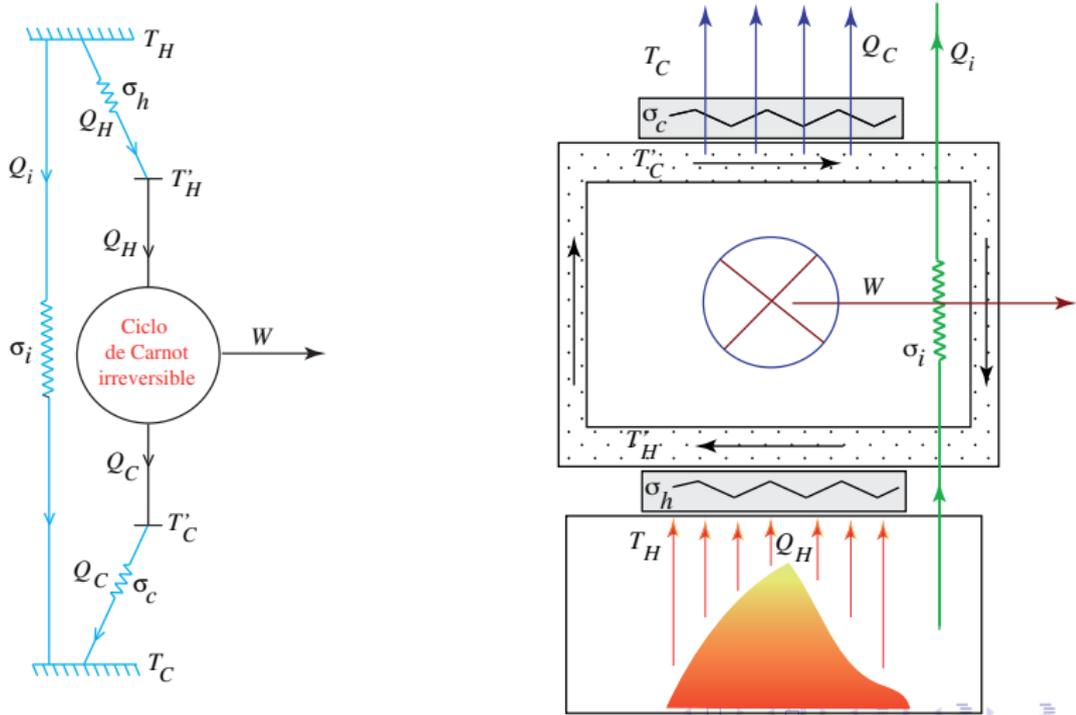
MODELIZACIÓN DE UN CICLO TIPO CARNOT IRREVERSIBLE



MODELIZACIÓN DE UN CICLO TIPO CARNOT IRREVERSIBLE



MODELIZACIÓN DE UN CICLO TIPO CARNOT IRREVERSIBLE





ESQUEMA

- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
 - Irreversibilidades externas
 - Irreversibilidades internas
 - Pérdidas de calor a través de la instalación
 - Potencia y rendimiento
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN



TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES:

- ◇ Irreversibilidades **externas**
- ◇ Irreversibilidades **internas**
- ◇ Pérdidas de calor a través de la instalación (*heat-leak*)



IRREVERSIBILIDADES EXTERNAS

Transferencias de calor (de tipo lineal) durante un tiempo t ,

$$|Q_h| = \sigma_h (T_h - T'_h) t \equiv \sigma_h T_h \left(1 - \frac{1}{a_h}\right) t$$

$$|Q_c| = \sigma_c (T'_c - T_c) t \equiv \sigma_c T_c (a_c - 1) t$$

donde:

- ◇ $a_h = T_h/T'_h \geq 1$, $a_c = T'_c/T_c \geq 1$, $\tau = T_c/T_h \leq 1$
- ◇ σ_h y σ_c : conductancias térmicas entre el sistema de trabajo y las fuentes externas.



IRREVERSIBILIDADES INTERNAS

Asociadas al fluido de trabajo: rozamientos, turbulencias, viscosidades...

Estimación mediante la desigualdad de Clausius,

$$\frac{|Q_h|}{T'_h} - \frac{|Q_c|}{T'_c} \leq 0 \quad \text{escrita como igualdad:}$$

$$I \rightarrow \frac{|Q_h|}{T'_h} = I \frac{|Q_c|}{T'_c} \quad (0 < I \leq 1)$$

$I = 1 \rightarrow$ motor internamente reversible



PÉRDIDAS DE CALOR A TRAVÉS DE LA INSTALACIÓN

Transferencia de calor $|Q_i|$ a velocidad finita entre las dos fuentes externas.

→ Ley lineal con sus diferencias de temperaturas y con una conductancia térmica σ_i .

$$|Q_i| = \sigma_i(T_h - T_c)t \equiv \sigma_i T_h(1 - \tau)t$$

Aislamiento térmico de la instalación

Tecnología + Economía



LÍMITE ENDORREVERSIBLE:

El sistema funciona de forma internamente reversible, pero su acoplamiento con el exterior sí es irreversible.

$$I = 1; \quad \sigma_i = 0$$

Permite obtener ecuaciones matemáticas sencillas y genéricas (dependientes de pocas variables) que se pueden tomar como límites con los que comparar.

POTENCIA Y RENDIMIENTO

Potencia, P :

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{(|Q_h| + |Q_i|) - (|Q_c| + |Q_i|)}{t} =$$
$$= \sigma_h T_h \frac{l(a_h - 1) - \sigma_{hc}(a_h - 1)^2 - \tau(a_h^2 - a_h)}{a_h(l + \sigma_{hc}) - \sigma_{hc}a_h^2}$$

Rendimiento, η :

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_h| + |Q_i|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h| + |Q_i|} =$$
$$= \left[1 - \frac{a_h \tau}{l - \sigma_{hc}(a_h - 1)} \right] \left[\frac{(1 - a_h^{-1})}{(1 - a_h^{-1}) + \sigma_{ih}(1 - \tau)} \right]$$

donde $\sigma_{hc} \equiv \sigma_h/\sigma_c$ y $\sigma_{ih} \equiv \sigma_i/\sigma_h$.



ESQUEMA

- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN
 - Optimización de la potencia
 - Optimización del rendimiento
 - Optimización de la función ahorro
 - Comparación con rendimientos reales
 - Optimización de la función Ω
 - Otros criterios de optimización



PARÁMETROS Y VARIABLES

Parámetros del problema:

- ▶ Conductancias $\rightarrow (\sigma_h, \sigma_c, \sigma_i)$
- ▶ Temperatura de las fuentes externas $\rightarrow (T_h, T_c)$
- ▶ Irreversibilidades internas, l

Variable:

- ▶ a_h (P y η dependen de T_h' a través de a_h)

$$P = P(a_h; \tau, \sigma_{hc}, \sigma_{ih}, l)$$

$$\eta = \eta(a_h; \tau, \sigma_{hc}, \sigma_{ih}, l)$$

$$\left(a_h \text{ y } a_c \text{ están ligados a través de: } a_c = \frac{l}{l - \sigma_{hc}(a_h - 1)} \right)$$



PROCESO DE OPTIMIZACIÓN: OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA

El valor máximo de la potencia se obtiene con la condición:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial a_h} \right)_{a_h = \bar{a}_h} = 0$$

$$\bar{a}_h = \bar{a}_h(\tau, \sigma_{hc}, l)$$



VALORES ÓPTIMOS DE a_h Y a_c :

$$\bar{a}_h = \frac{l + \sigma_{hc}}{\sigma_{hc} + \sqrt{\tau}l}, \quad \bar{a}_c = \frac{l(\sigma_{hc} + \sqrt{\tau}l)}{\sqrt{\tau}l(l + \sigma_{hc})}$$

Potencia máxima, P_{\max} :

$$P(\bar{a}_h) = P_{\max}(\tau, \sigma_{hc}, l) = \sigma_h T_h \frac{(\sqrt{l} - \sqrt{\tau})^2}{l + \sigma_{hc}}$$

Rendimiento en condiciones de máxima potencia, η_{mp} :

$$\begin{aligned} \eta(\bar{a}_h) &= \eta_{\text{mp}}(\tau, \sigma_{hc}, \sigma_{ih}, l) = \\ &= \left[1 - \sqrt{\frac{\tau}{l}} \right] \left[1 + \sigma_{ih}(1 - \tau) \frac{l + \sigma_{hc}}{(l - \sqrt{\tau}l)} \right]^{-1} \end{aligned}$$



LÍMITE ENDORREVERSIBLE, $l = 1$ Y $\sigma_j = 0$

$$P_{\max} = \sigma_h T_h \frac{(1 - \sqrt{\tau})^2}{1 + \sigma_{hc}}$$

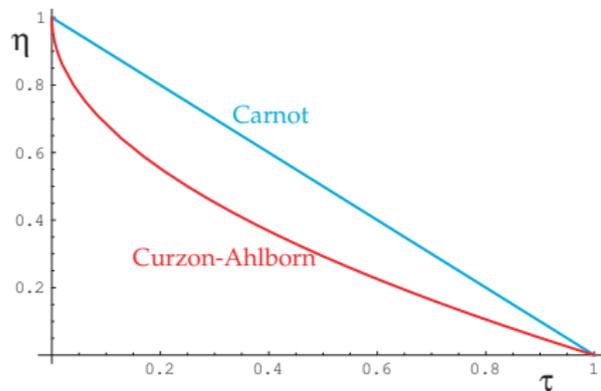
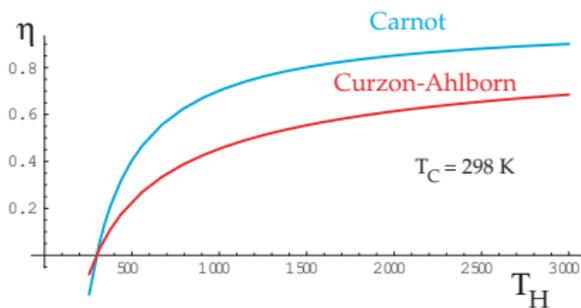
$$\eta_{\text{mp}}(\tau) = 1 - \sqrt{\tau} \equiv \eta_{CA}$$

Rendimiento de **Curzon-Ahlborn** (1975),

$$\eta_{\text{mp}} \equiv \eta_{CA} < \eta_C$$



RENDIMIENTO DEL MOTOR ENDORREVERSIBLE



EJEMPLO DE PLANTAS DE POTENCIA REALES



Central nuclear 'Doel 4' en Doel, Bélgica (1985, 1008 MW):

Fuente caliente: circuito primario, $T_h = 566$ K

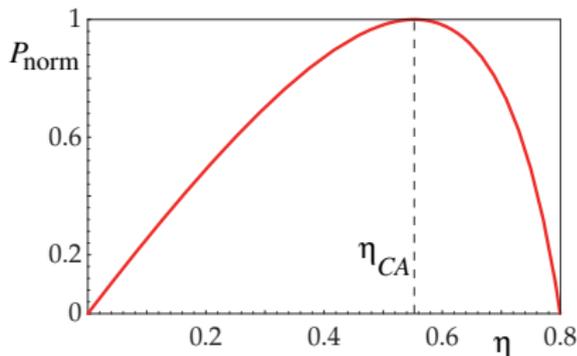
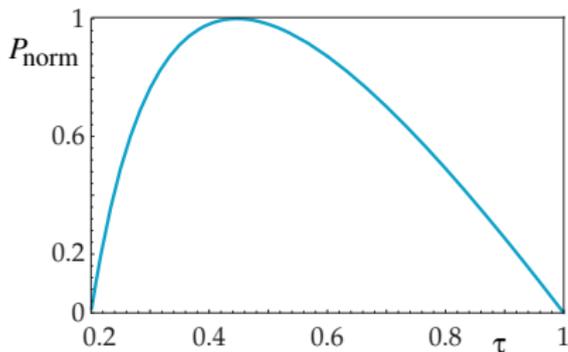
Fuente fría: atmósfera y río Schelde, $T_c = 283$ K

η medido	Carnot	endorreversible
0.35	0.50	0.30



POTENCIA EN UN MOTOR DE CARNOT ENDORREVERSIBLE

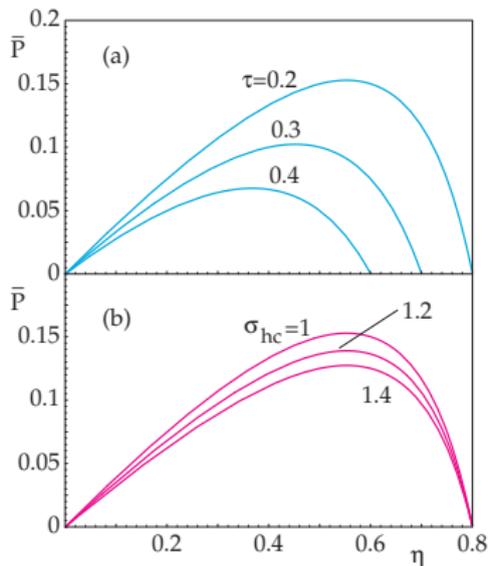
$$\sigma_{hc} = 1$$



$$T_h = 1500 \text{ K}; T_c = 300 \text{ K}$$



POTENCIA EN UN MOTOR DE CARNOT ENDORREVERSIBLE

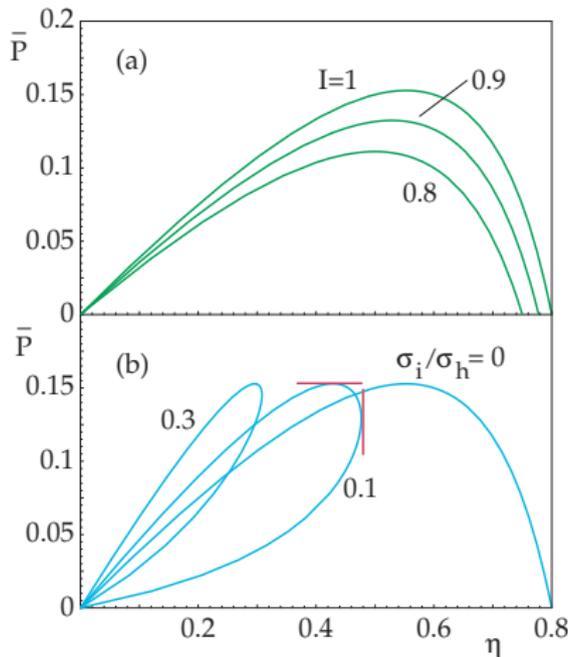


$$\bar{P} \equiv \frac{P}{\sigma_h T_h}$$

- (a) $l = 1, \sigma_{hc} = 1$
 (b) $l = 1, \tau = 0,2$



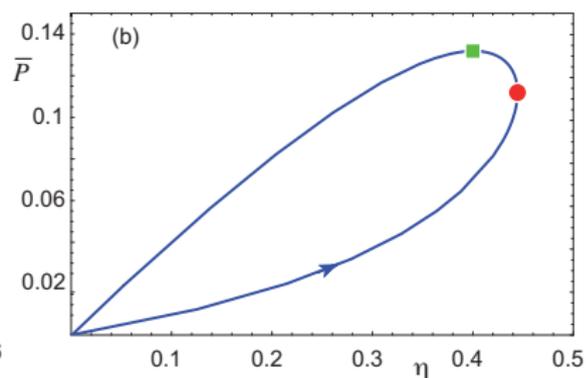
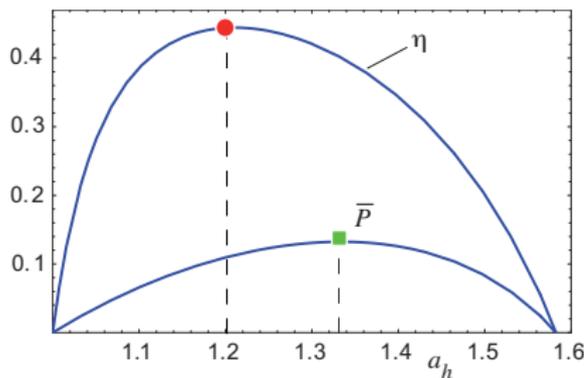
MOTOR DE CARNOT IRREVERSIBLE



- (a) $\sigma_{hc} = 1, \tau = 0,2, \sigma_i = 0$
(b) $\sigma_{hc} = 1, I = 1, \tau = 0,2$



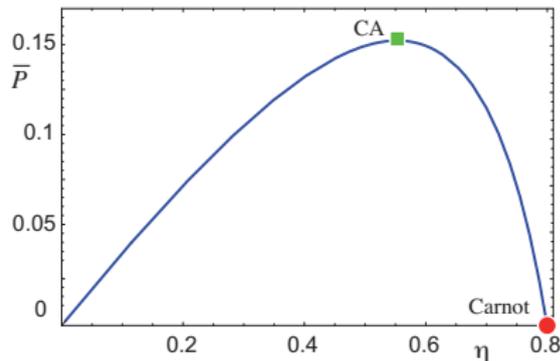
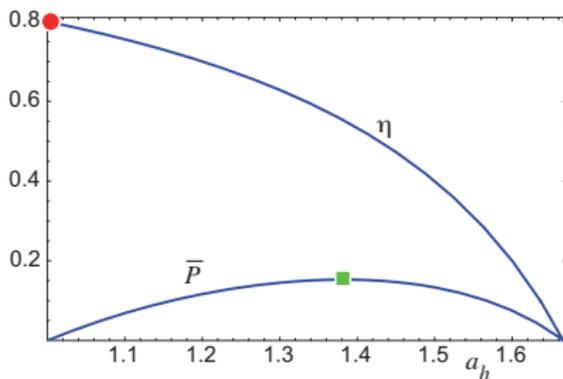
OPTIMIZACIÓN DEL RENDIMIENTO



$$\tau = 0,2, l = 0,9, \sigma_{hc} = 1, \sigma_{ih} = 0,1$$



LÍMITE ENDORREVERSIBLE



$$\tau = 0,2, \quad l = 1, \quad \sigma_{hc} = 1, \quad \sigma_{ih} = 0$$



OPTIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN AHORRO

Flujos de energía básicos en cualquier ciclo de potencia:

- ◇ Calor cedido por la fuente de temperatura alta
↳ combustible consumido
- ◇ Calor cedido a la fuente fría (atmósfera)
↳ **polución térmica**
- ◇ Potencia producida
↳ energía (eléctrica, mecánica) producida



DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN AHORRO, ϕ

$$\phi \equiv \bar{P} q_H q_C$$

donde:

$$\bar{P} = \frac{P}{P_m}$$

$$q_H = 1 - \frac{|Q_H|}{|Q_H|_m}$$

$$q_C = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_C|_m}$$

El subíndice m denota valores máximos



FUNCIÓN AHORRO

Calores máximos: cuando la potencia es nula \implies todo el calor extraído de la fuente caliente se transfiere a la fría.

$$|Q_H|_m = |Q_C|_m$$

$q_H \hookrightarrow$ función ahorro asociada al combustible consumido

$q_C \hookrightarrow$ función ahorro asociada a la polución térmica

$\implies \phi$, mejor compromiso entre maximización de potencia y minimización de consumo de combustible y polución térmica



FUNCIÓN AHORRO

Potencia máxima en el límite endorreversible:

$$P_m = \sigma_h T_h \frac{(\sqrt{I} - \sqrt{\tau})^2}{I + \sigma_{hc}}$$

La potencia se anula cuando:

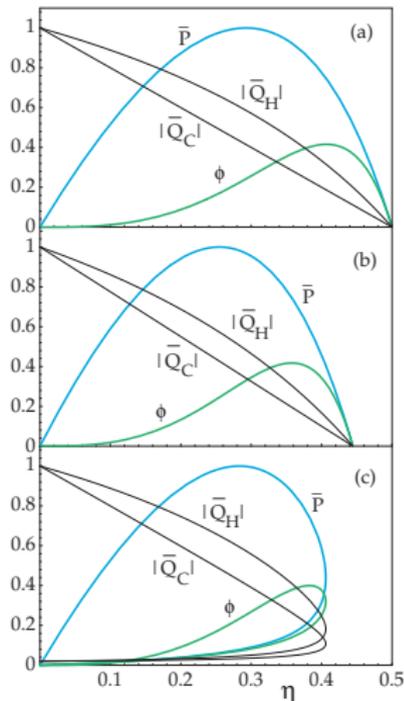
$$\begin{cases} a_h = a_c = 1 & \text{(caso trivial)} \\ a_h = \frac{I + \sigma_{hc}}{\tau + \sigma_{hc}} \end{cases}$$

que es cuando los calores toman el valor máximo:

$$|Q_H|_m = |Q_C|_m = \sigma_h T_h \left[\frac{I - \tau}{I + \sigma_{hc}} + \sigma_{ih}(1 - \tau) \right]$$



FUNCIÓN AHORRO



$$\tau = 0,5, \sigma_{hc} = 1$$

$$(a) \quad l = 1, \sigma_{ih} = 0$$

$$(b) \quad l = 0,9, \sigma_{ih} = 0$$

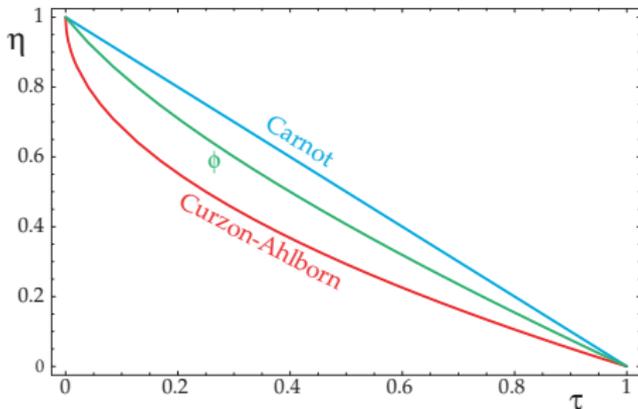
$$(c) \quad l = 1, \sigma_{ih} = 0,01$$



FUNCIÓN AHORRO

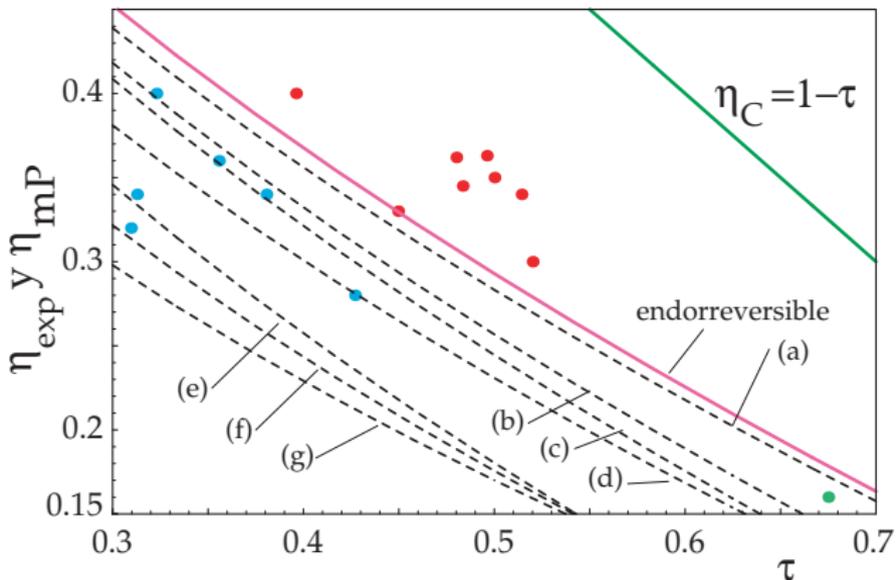
Límite endorreversible, $l = 1, \sigma_{ih} = 0$

$$\eta_{m\phi} = \frac{1}{4} \left[5 - \tau - \sqrt{(1 + \tau)^2 + 12\tau} \right]$$



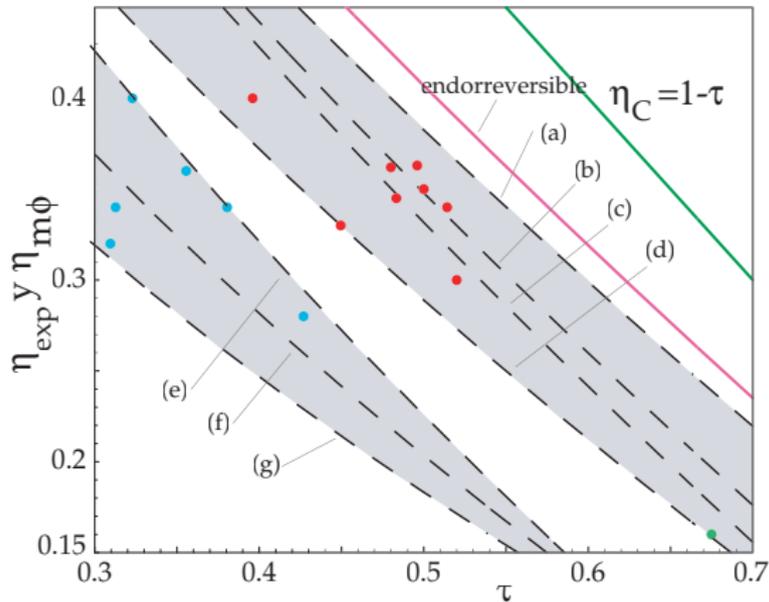


COMPARACIÓN CON RENDIMIENTOS REALES: OPTIMIZACIÓN DE P



● plantas nucleares; ● convencionales; ● geotérmicas

COMPARACIÓN CON RENDIMIENTOS REALES: OPTIMIZACIÓN DE ϕ



● plantas nucleares; ● convencionales; ● geotérmicas



FUNCIÓN Ω

Ingredientes:

un convertidor energético cualquiera que produce una energía útil $E_u(x; \{\alpha\})$ a partir de una energía de entrada $E_i(x; \{\alpha\})$ donde:

$$\begin{cases} x \longrightarrow \text{variable independiente} \\ \{\alpha\} \longrightarrow \text{conjunto de parámetros de control} \end{cases}$$

El **rendimiento** suele definirse como:

$$z(x; \{\alpha\}) = \frac{E_u(x; \{\alpha\})}{E_i(x; \{\alpha\})}$$

$$z_{\min}(\{\alpha\}) < z(x; \{\alpha\}) < z_{\max}(\{\alpha\})$$



DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN Ω

Dada una energía de entrada, $E_i(x; \{\alpha\})$:

$$z_{\min}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\}) < E_u(x; \{\alpha\}) < z_{\max}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\})$$

Se puede definir la **energía útil efectiva**:

$$E_{u,ef}(x; \{\alpha\}) \equiv E_u(x; \{\alpha\}) - z_{\min}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\})$$

y la **energía útil perdida**:

$$E_{u,per}(x; \{\alpha\}) \equiv z_{\max}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\}) - E_u(x; \{\alpha\})$$

Compromiso entre energía útil y energía útil perdida:

$$\Omega(x; \{\alpha\}) \equiv E_{u,ef}(x; \{\alpha\}) - E_{u,per}(x; \{\alpha\})$$

$$\rightarrow \Omega(x; \{\alpha\}) = \frac{2z(x; \{\alpha\}) - z_{\min}(\{\alpha\}) - z_{\max}(\{\alpha\})}{z(x; \{\alpha\})} E_u(x; \{\alpha\})$$



CASO PARTICULAR

MÁQUINAS DE POTENCIA

$$z(x; \{\alpha\}) = \eta = \frac{|W|}{|Q_h|}$$

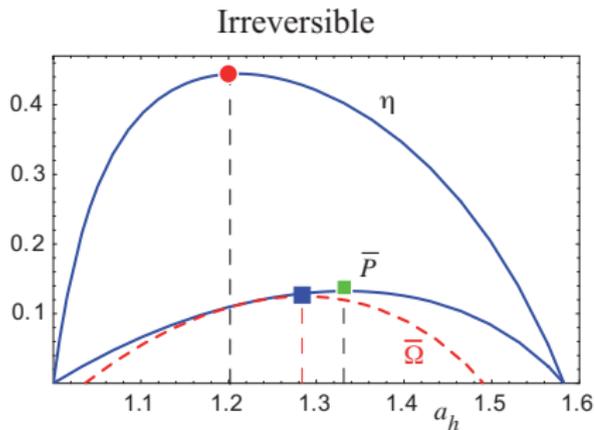
$$\implies \Omega = (2\eta - \eta_{\max})|Q_h| = (2\eta - \eta_{\max})\frac{|W|}{\eta}$$



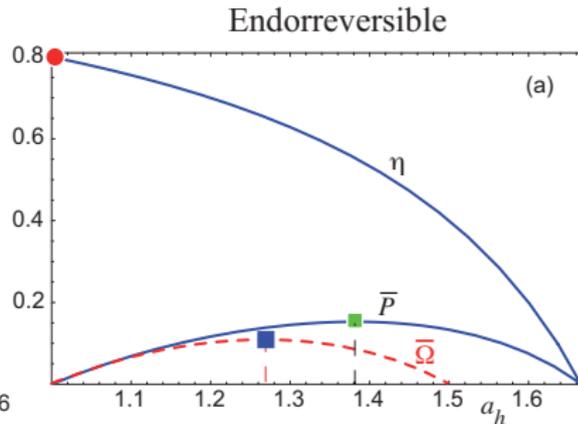
PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN Ω

- Fácil de implementar en cualquier tipo de convertidor. No sólo de potencia, si no también *frigoríficos y bombas*. Incluso en sistemas *microscópicos y mesoscópicos*.
Es un criterio universal, válido para cualquier tipo de convertidor.
- Su cálculo no necesita cálculos de generación de *entropía*.
- Tampoco requiere la consideración de parámetros del entorno, como en ciertas funciones *ecológicas* o la *exergía*.

OPTIMIZACIÓN CON Ω



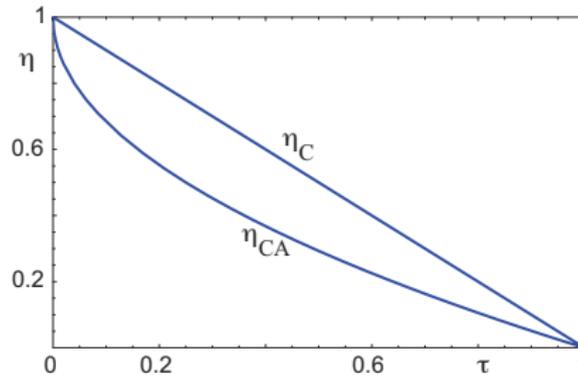
$$\tau = 0,2, \sigma_{hc} = 1, l = 0,9, \sigma_{ih} = 0,1$$



$$\tau = 0,2, \sigma_{hc} = 1, l = 1, \sigma_{ih} = 0$$



OPTIMIZACIÓN CON Ω : LÍMITE ENDORREVERSIBLE

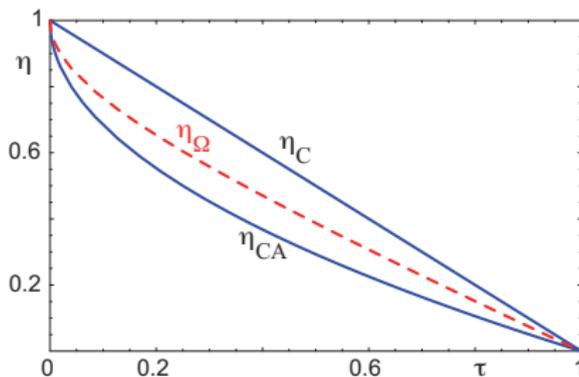


$$\eta_C = 1 - \tau$$

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\tau}$$



OPTIMIZACIÓN CON Ω : LÍMITE ENDORREVERSIBLE



$$\eta_C = 1 - \tau$$

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\tau}$$

$$\eta_{\Omega} = 1 - \sqrt{\tau(\tau + 1)/2}$$

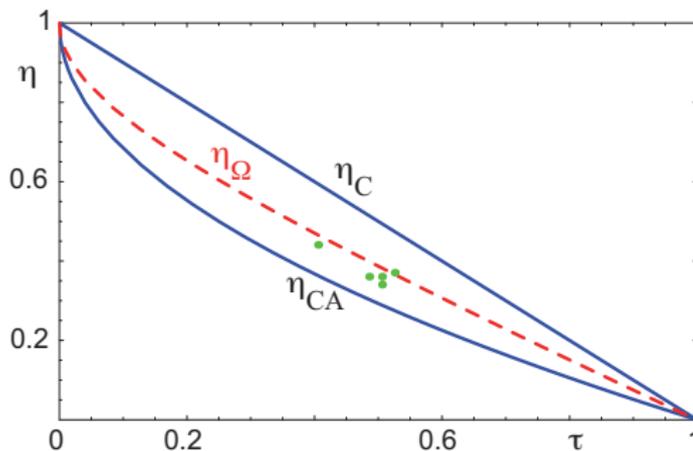


Planta	T_h (K)	T_c (K)	τ	η_{obs}	η_C	η_{CA}	η_Ω
Doel 4 (PWR, Bélgica)	566	283	0.50	0.35	0.50	0.30	0.39
Almaraz II (PWR, España)	600	290	0.48	0.35	0.52	0.30	0.40
Sizewell B (PWR, UK)	581	288	0.50	0.36	0.50	0.31	0.37
Cofrentes (BWR, España)	562	289	0.51	0.34	0.48	0.28	0.39
Heysham (AGR, UK)	727	288	0.40	0.40	0.60	0.37	0.47



COMPARACIÓN CON PLANTAS DE ENERGÍA NUCLEAR

Planta	T_h (K)	T_c (K)	τ	η_{obs}	η_C	η_{CA}	η_Ω
Doel 4 (PWR, Bélgica)	566	283	0.50	0.35	0.50	0.30	0.39
Almaraz II (PWR, España)	600	290	0.48	0.35	0.52	0.30	0.40
Sizewell B (PWR, UK)	581	288	0.50	0.36	0.50	0.31	0.37
Cofrentes (BWR, España)	562	289	0.51	0.34	0.48	0.28	0.39
Heysham (AGR, UK)	727	288	0.40	0.40	0.60	0.37	0.47





CRITERIO ECOLÓGICO

Representa un compromiso entre la **máxima potencia P** y la mínima generación de **entropía σ** :

$$E \equiv P - T_c \sigma$$

Para un ciclo endorreversible, coincide exactamente con el criterio Ω : **es un caso particular de éste.**

$$E = \Omega \quad \longrightarrow \quad \eta_E = \eta_\Omega = 1 - \sqrt{\tau(\tau + 1)/2}$$



OTROS CRITERIOS TERMOECONÓMICOS

DE VOS (1996)

Función objetivo: $F \equiv \frac{W}{C}$

Coste total de explotación: $C = aQ_{\max} + bQ_H$

$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\max} \rightarrow \text{medida del tamaño de la planta} \\ Q_H \rightarrow \text{calor absorbido real} \\ a, b \rightarrow \text{constantes de proporcionalidad en \$/julio} \end{array} \right.$



OTROS CRITERIOS TERMOECONÓMICOS

DE VOS (1996)

$$\text{Optimización: } \left(\frac{dF}{dT'_H} \right) = 0$$

$$\eta_{\text{opt}}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2}\tau - \frac{1}{2} \left[4(1-f)\tau + f^2\tau^2 \right]^{1/2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{T_C}{T_H} \\ f = \frac{bQ_H}{aQ_{\text{max}} + bQ_H} \end{array} \right.$$



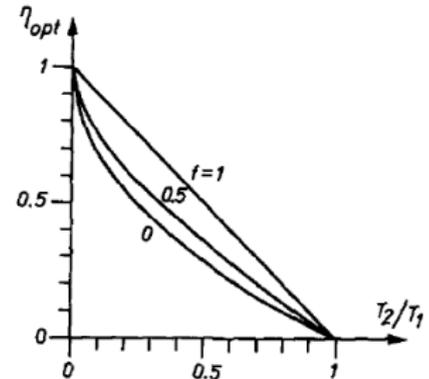
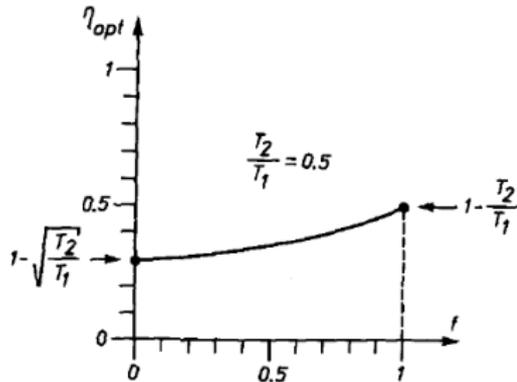
COSTE RELATIVO DE DIVERSOS COMBUSTIBLES

$f = 0$ \rightarrow predominan los gastos de la inversión \rightarrow CA
 $f = 1$ \rightarrow predominan los gastos de combustible \rightarrow Carnot

Combustible	f (%)
Renovable	0
Uranio	25
Carbón	35
Gas	50



EVOLUCIÓN DEL RENDIMIENTO TERMOECONÓMICO ÓPTIMO

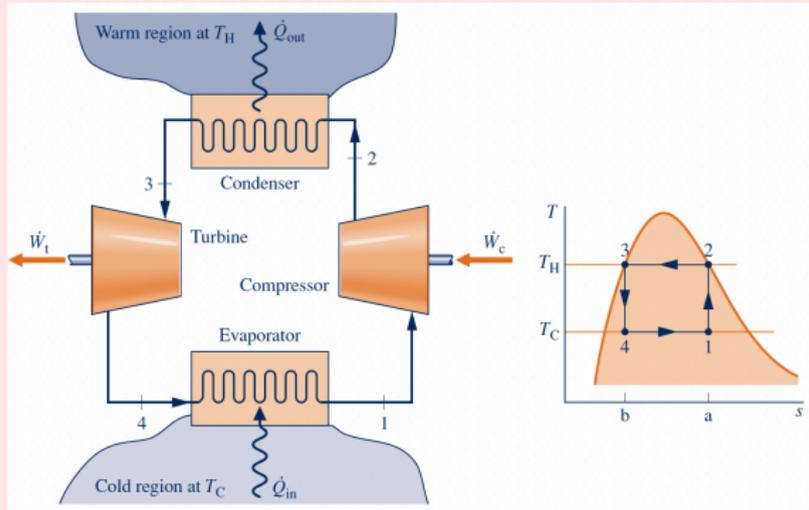




ESQUEMA

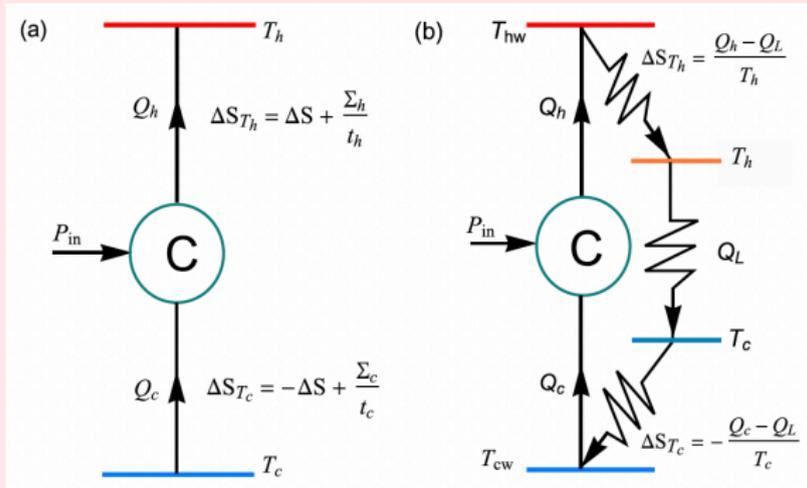
- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN
- 5 FRIGORÍFICOS TIPO CARNOT

CICLO DE CARNOT FRIGORÍFICO



$$\epsilon_C = \frac{T_C}{T_H - T_C}$$

CICLO DE CARNOT FRIGORÍFICO CON IRREVERSIBILIDADES



Igual que en el caso de motores se pueden incluir irreversibilidades internas, externas y *heat leak* para tratar de aproximar más a frigoríficos reales un frigorífico tipo Carnot.

CICLO DE CARNOT FRIGORÍFICO ENDORREVERSIBLE

Si solamente se consideran irreversibilidades en el acoplamiento del fluido con las fuentes externas (frigorífico endorreversible) se puede obtener una expresión análoga a la de Curzon-Ahlborn para motores, pero ahora la función que se optimiza es:

$$\chi = \epsilon \dot{Q}_C$$

Expresando la eficiencia de un frigorífico de Carnot en términos de $\tau = T_C/T_H$ como:

$$\epsilon_C = \frac{\tau}{1 - \tau}$$

resulta:

$$\epsilon_{CA} = \sqrt{1 + \epsilon_C} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau}} - 1$$



BIBLIOGRAFÍA

- F. L. Curzon y B. Ahlborn, *Efficiency of a Carnot engine at maximum power output*, Am. J. Phys., **43**, 22-24 (1975).
- A. De Vos, *Thermodynamics of Solar Energy Conversion*, Wiley (2008).
- S. Velasco, J. M. M. Roco, A. Medina J. A. White and A. Calvo Hernández, *Optimization of heat engines including the saving of natural resources and the reduction of thermal pollution*, J. Phys. D: Appl. Phys., **33**, 355-359 (2000).
- F. Angulo-Brown, *An ecological optimization criterion for finite-time heat engines*, J. Appl. Phys., **69**, 7465-7469 (1991).
- J. Chen, *The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible Carnot heat engine*, J. Phys. D:Appl. Phys., **27**, 1144-1149 (1994).
- M. Esposito, K. Lindenberg, and C. Van der Broeck *Universality of efficiency at maximum power* Phys. Rev. Lett. **102**, 130602 (2009).
- A. de Vos *Endoreversible Thermoconomics* Energy Conversion and Management **36**, 1-5 (1995).



FIN