# Cartografía Matemática

1480

TCI13

Roberto Pérez Rodino - rodino@fing.edu.uy

Esteban Striewe - estriewe@fing.edu.uy

Año 2024

# Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

# Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

Suelen utilizarse para representar grandes porciones de la superficie terrestre, por lo que se trabaja a escalas muy pequeñas, por ejemplo del orden de 1 : 40.000.000.

# Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

Suelen utilizarse para representar grandes porciones de la superficie terrestre, por lo que se trabaja a escalas muy pequeñas, por ejemplo del orden de 1 : 40.000.000.

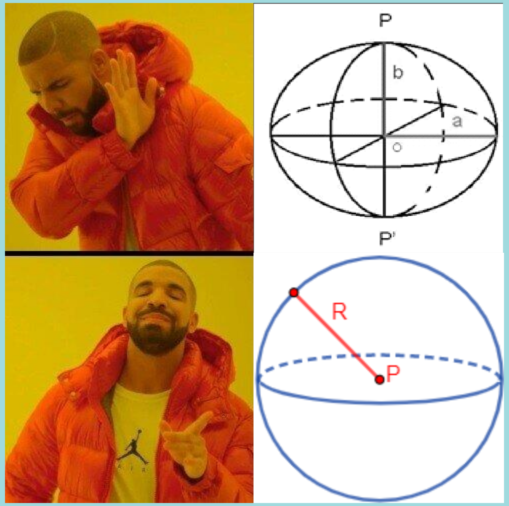
Esto permite que sin perder precisión cartográfica, podamos considerar como superficie objetiva representativa de la Tierra a la esfera, en lugar del elipsoide de revolución.

# Proyecciones planas

Proyecciones cartográficas cuya superficie subjetiva es un plano.

Suelen utilizarse para representar grandes porciones de la superficie terrestre, por lo que se trabaja a escalas muy pequeñas, por ejemplo del orden de 1 : 40.000.000.

Esto permite que sin perder precisión cartográfica, podamos considerar como superficie objetiva representativa de la Tierra a la esfera, en lugar del elipsoide de revolución.



# Proyecciones planas

Apreciación gráfica.

Define la menor separación entre dos puntos que un usuario promedio puede distinguir al leer una carta.

# Proyecciones planas

Apreciación gráfica.

Define la menor separación entre dos puntos que un usuario promedio puede distinguir al leer una carta.

El estándar para esta separación es de ¼ de mm, es decir 0.00025m.

(10km)

Para un mismo punto, las diferencias en las coordenadas resultantes de utilizar la esfera o el elipsoide, están muy por debajo de la apreciación gráfica, por lo que lo veremos como un mismo punto.

# Proyecciones planas

En estas proyecciones, el plano de proyección o “plano de cuadro” es tangente a la esfera en un punto llamado “polo de la proyección”.

# Proyecciones planas

En estas proyecciones, el plano de proyección o “plano de cuadro” es tangente a la esfera en un punto llamado “polo de la proyección”.

Además, estas proyecciones deben cumplir

tres condiciones

# Proyecciones planas

En estas proyecciones, el plano de proyección o “plano de cuadro” es tangente a la esfera en un punto llamado “polo de la proyección”.

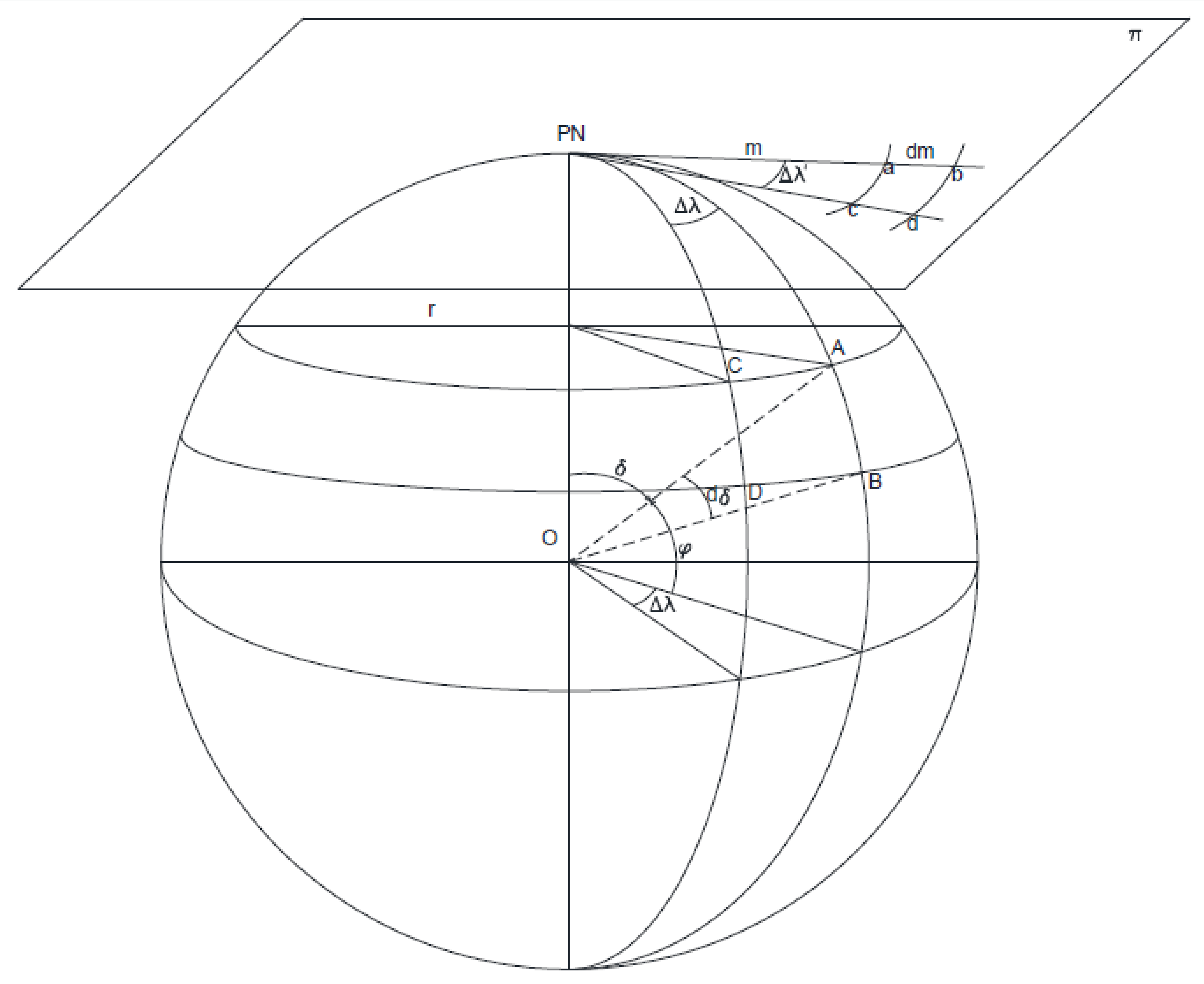
- La superficie objetiva que representa a la Tierra será una esfera
- Los círculos máximos que pasan por el polo de proyección se representan como rectas que conservan los acimut.
- Los puntos de las superficie objetiva que equidistan del polo de proyección, se representarán en el plano por circunferencias con centro en la representación del polo de proyección.

Además, estas proyecciones deben cumplir

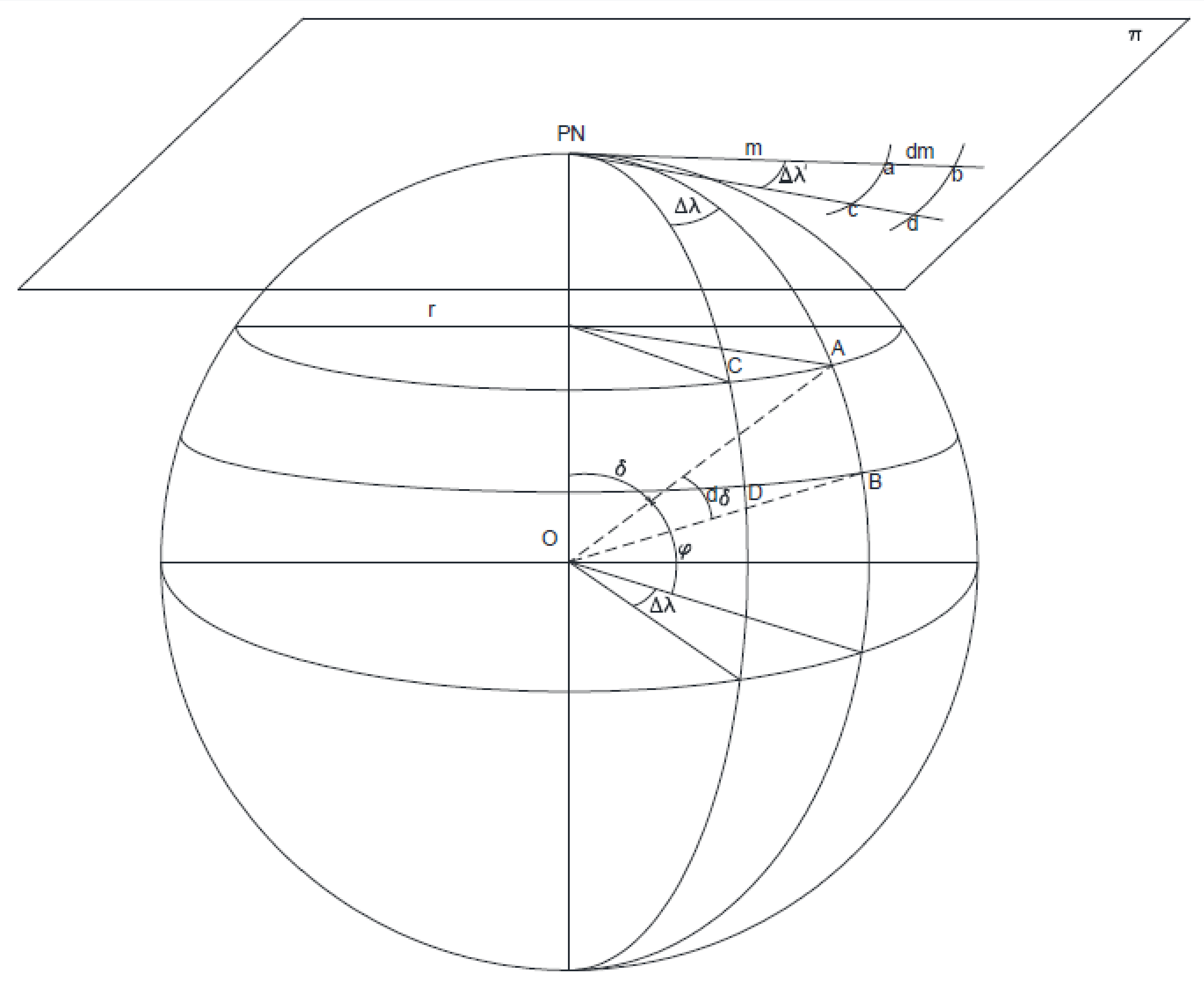
tres condiciones

# Proyección plana modo polar

# Proyección plana modo polar

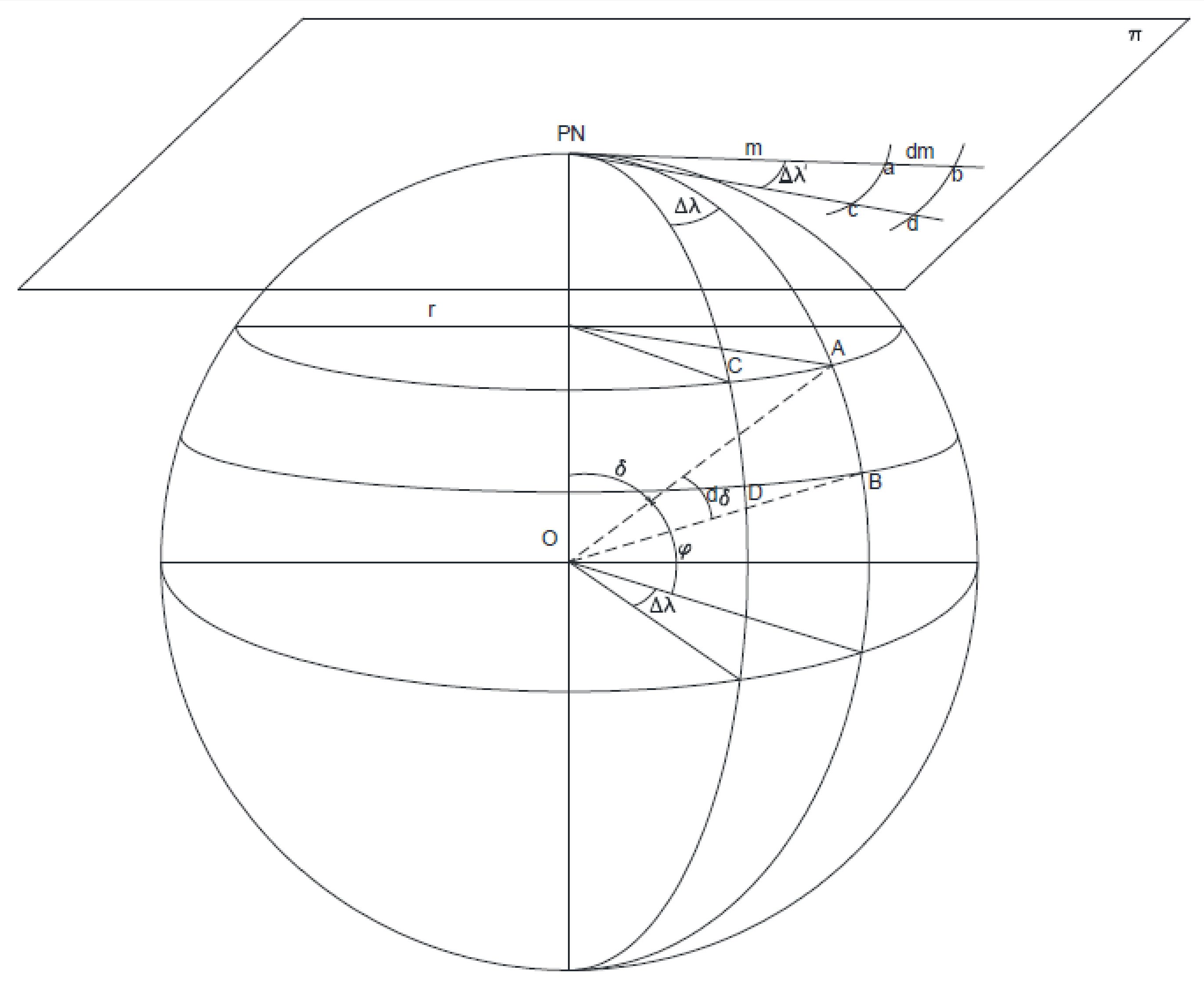


# Proyección plana modo polar




Inicialmente consideramos un cuadrilátero infinitesimal ABCD sobre la superficie objetiva y un plano π tangente en el polo terrestre norte.

# Proyección plana modo polar

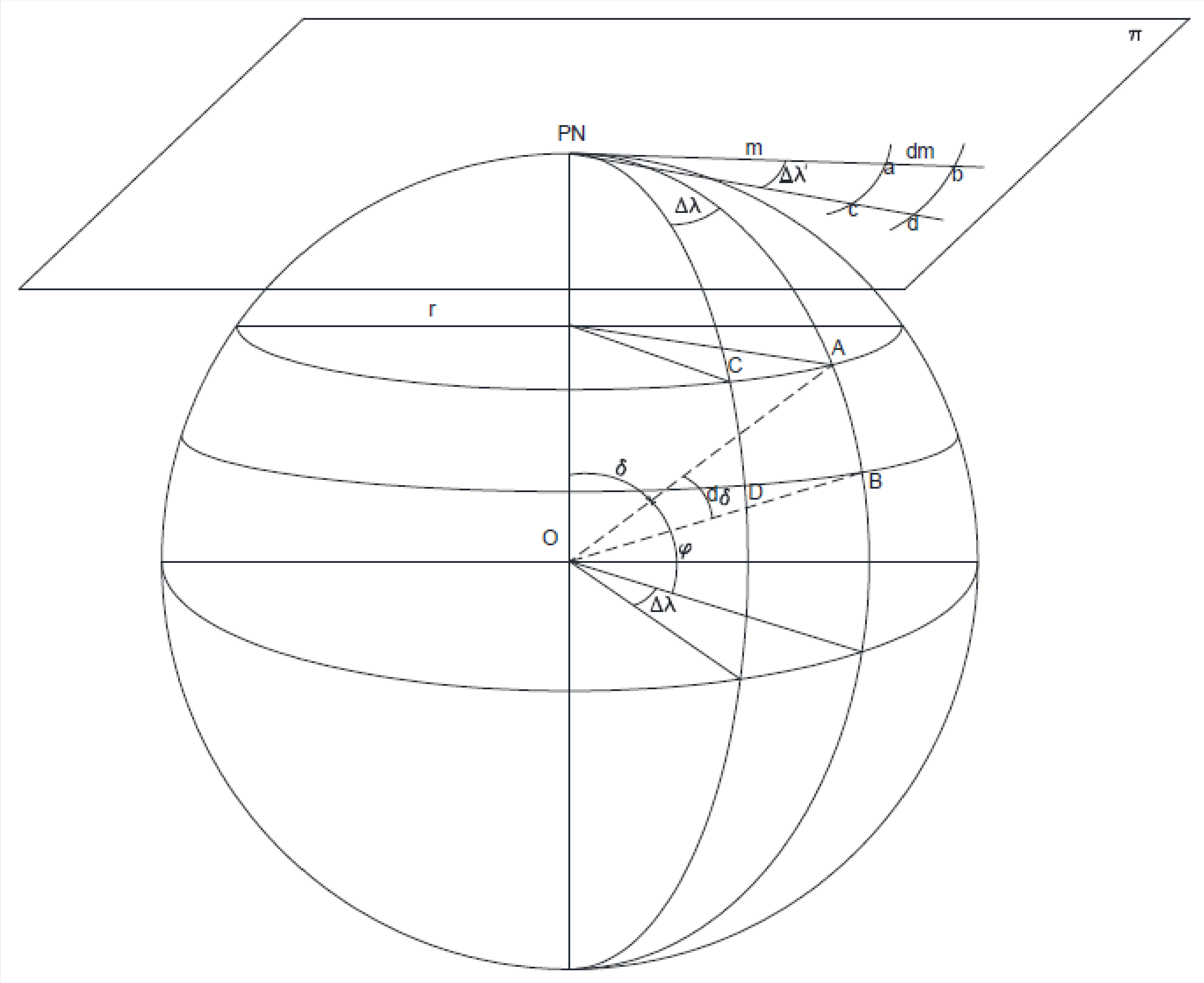



Inicialmente consideramos un cuadrilátero infinitesimal ABCD sobre la superficie objetiva y un plano π tangente en el polo terrestre norte.

Meridianos -> rectas por el polo de la proyección.

Paralelos -> circunferencias concéntricas en el polo de la proyección.

# Proyección plana modo polar




Inicialmente consideramos un cuadrilátero infinitesimal ABCD sobre la superficie objetiva y un plano π tangente en el polo terrestre norte.

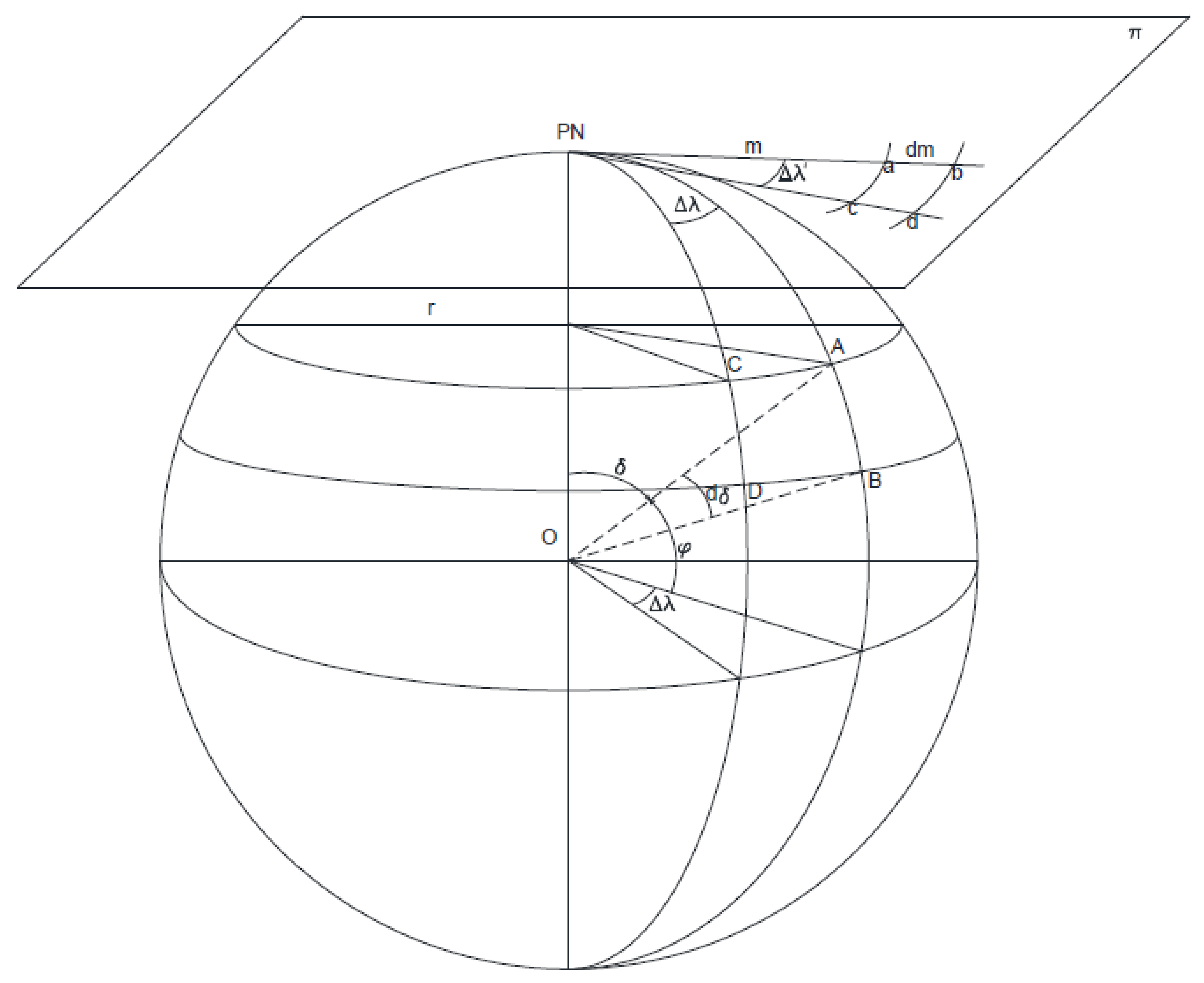
Meridianos -> rectas por el polo de la proyección.

Paralelos -> circunferencias concéntricas en el polo de la proyección.

En estas proyecciones se trabaja, generalmente, con la colatitud δ.

$$\delta = 90° - \varphi$$

# Proyección plana modo polar




$r = R \cdot \sin \delta$

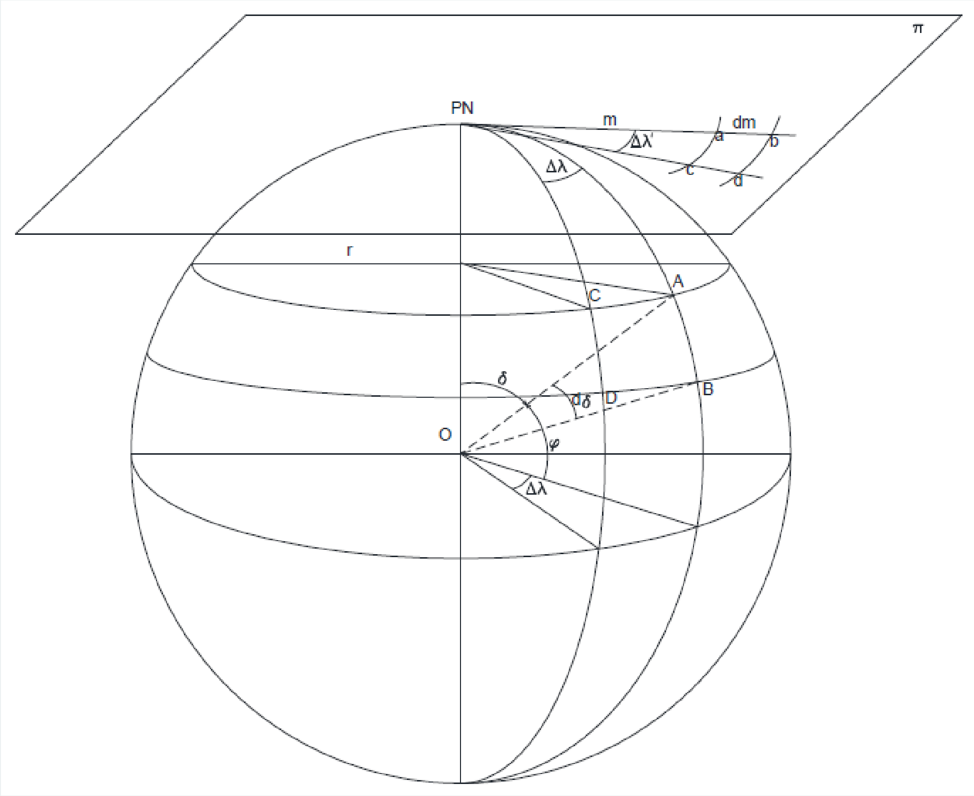
Llamamos m a $\overline{PNa}$. m será función de δ.

Por lo que la Ley de la Proyección Plana Polar será:

$$m = f(\delta)$$

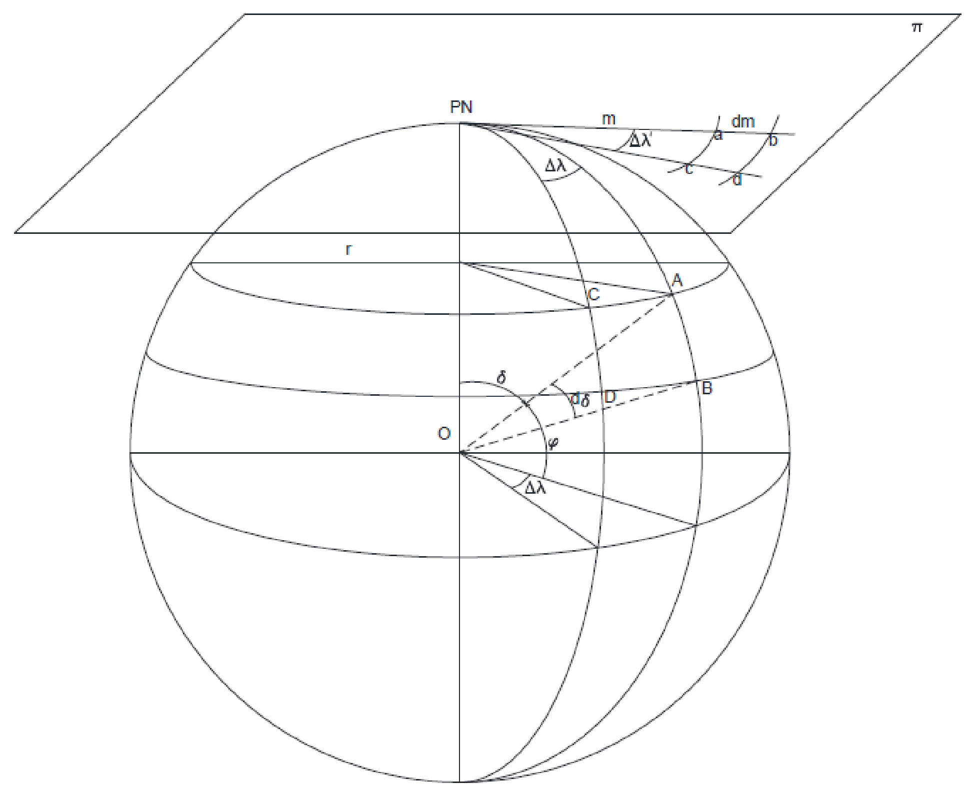
$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$

# Proyección plana modo polar




Coeficientes de anamorfosis

# Proyección plana modo polar

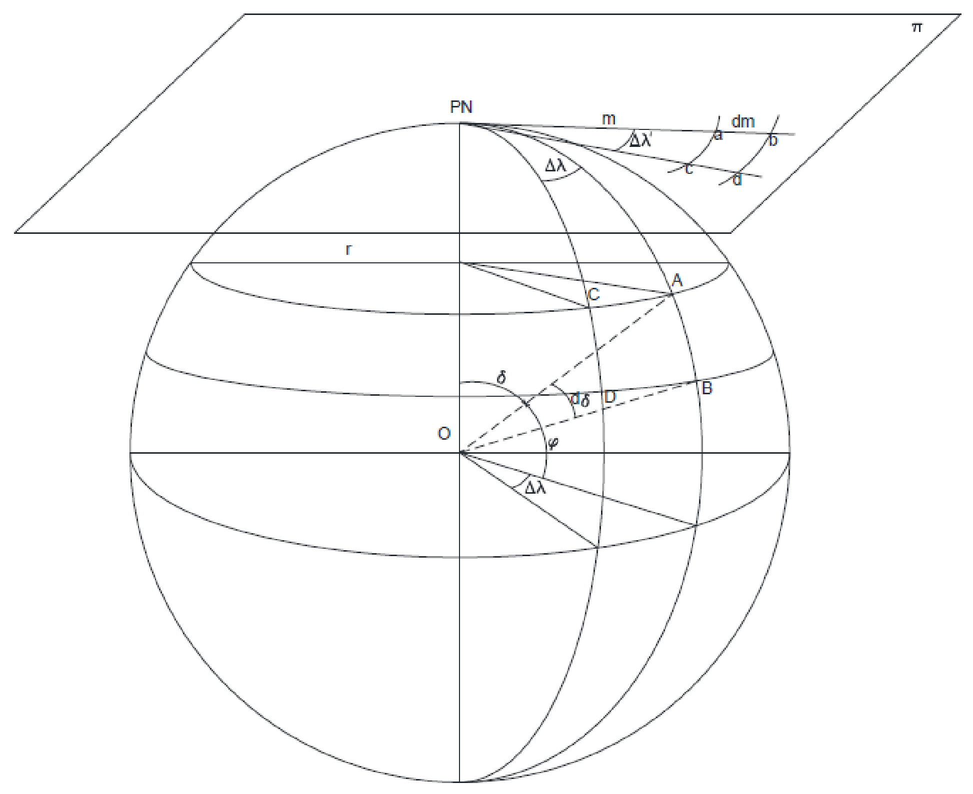



Coeficientes de anamorfosis

Coeficiente de deformación transversal o paralela α

$$\alpha = \frac{ac}{AC} = \frac{md\lambda}{rd\lambda} = \frac{m}{R\sin\delta}$$

# Proyección plana modo polar




## Coeficientes de anamorfosis

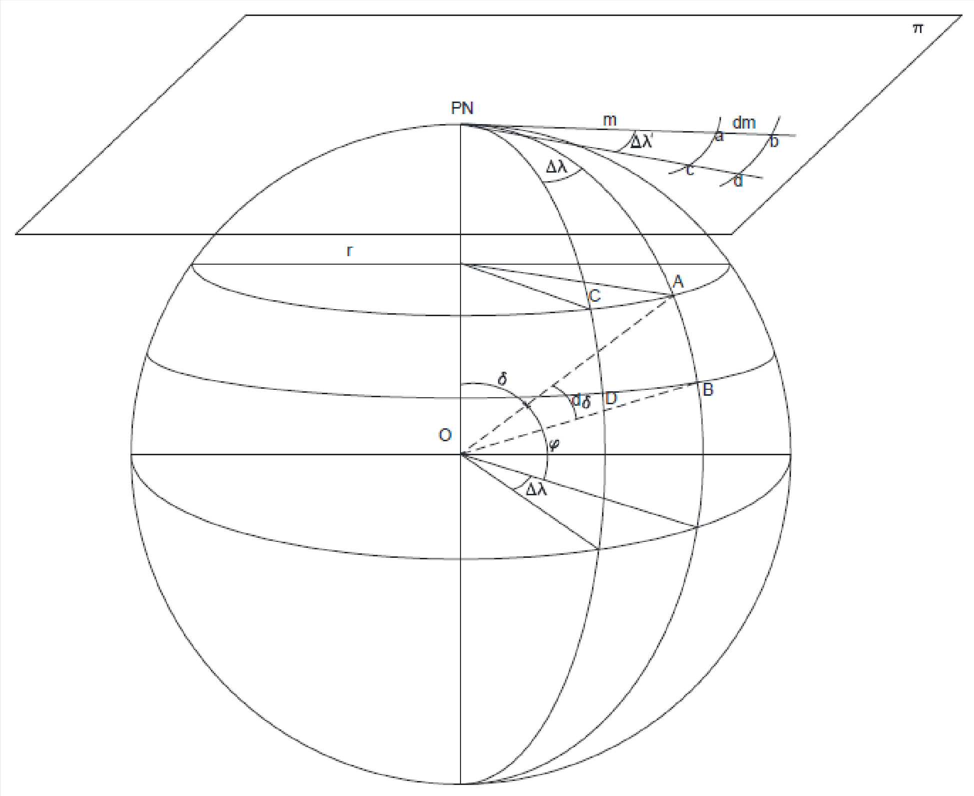
Coeficiente de deformación transversal o paralela α

$$\alpha = \frac{ac}{AC} = \frac{md\lambda}{rd\lambda} = \frac{m}{R\sin\delta}$$

Coeficiente de deformación meridiano β

$$\beta = \frac{ab}{AB} = \frac{dm}{Rd\delta}$$

# Proyección plana modo polar




Coeficientes de anamorfosis

Coeficiente de deformación transversal o paralela α

$$\alpha = \frac{ac}{AC} = \frac{md\lambda}{rd\lambda} = \frac{m}{R\sin\delta}$$

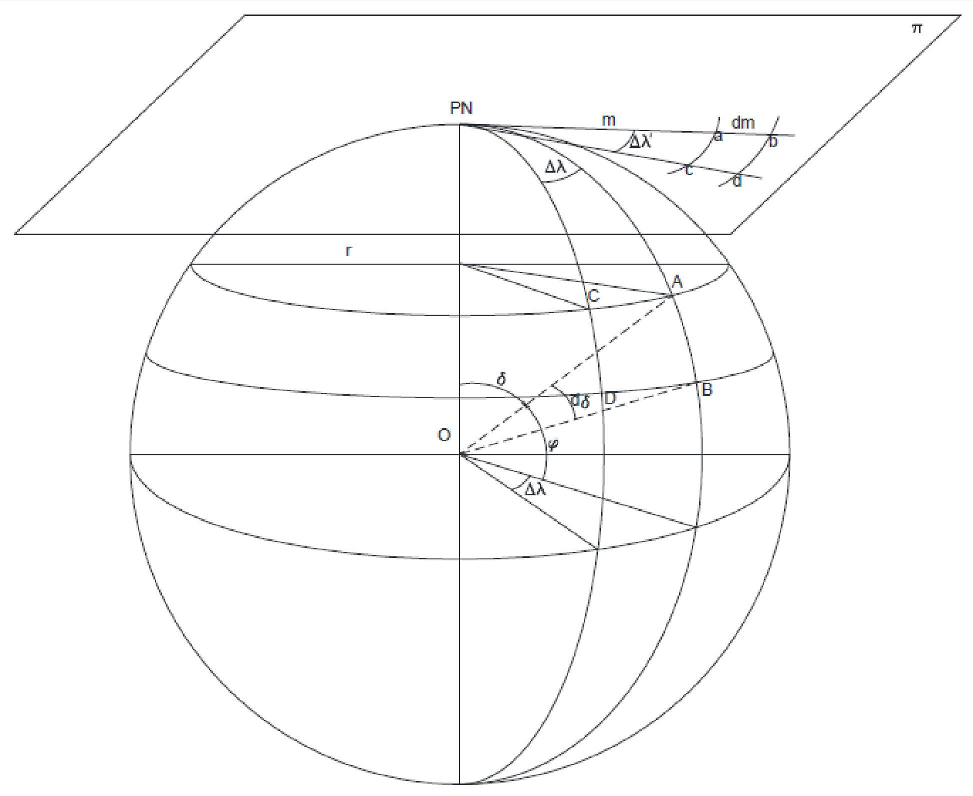
Coeficiente de deformación meridiano β

$$\beta = \frac{ab}{AB} = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Coeficiente de deformación superficial μ

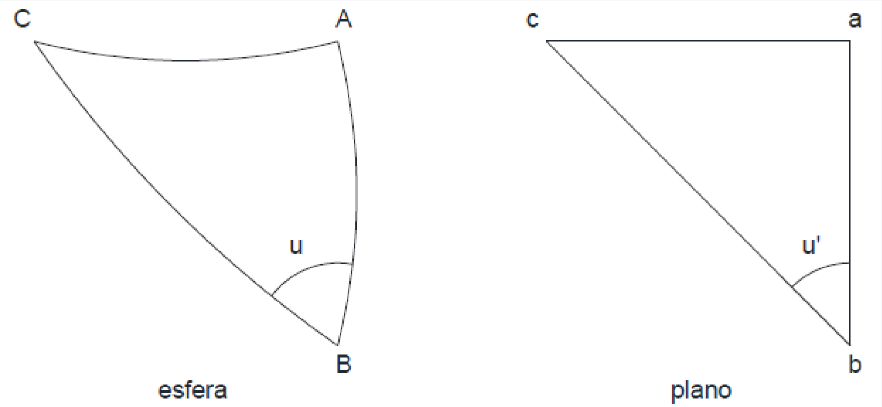
$$\mu = \frac{ab.ac}{AB.AC} = \alpha.\beta = \frac{mdm}{R^2\sin\delta d\delta}$$

# Proyección plana modo polar



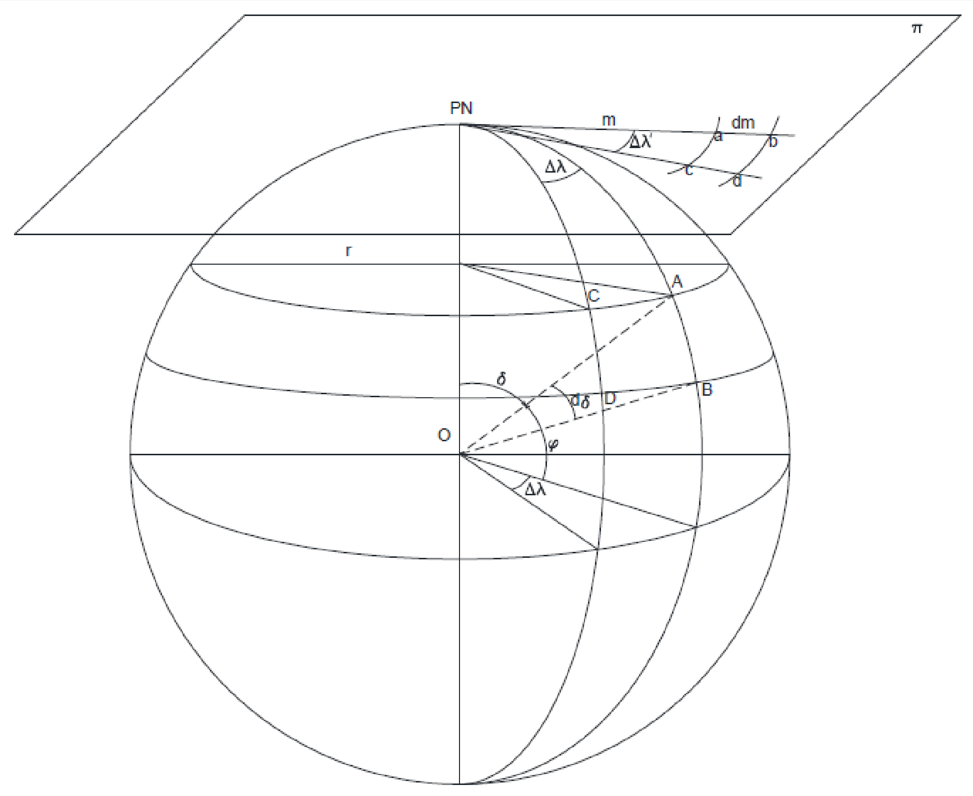

## Coeficientes de anamorfosis

Coeficiente de deformación angular



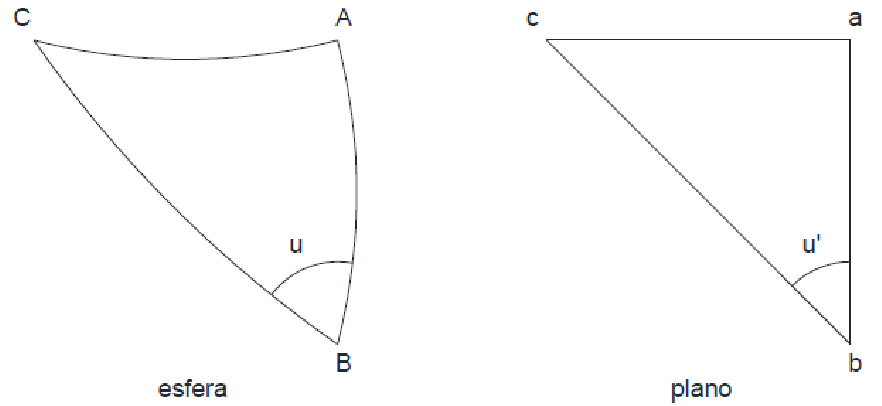

$$\tan u = \frac{AC}{AB} \text{ y } \tan u' = \frac{ac}{ab}$$

# Proyección plana modo polar




## Coeficientes de anamorfosis

Coeficiente de deformación angular




$$\tan u = \frac{AC}{AB} \; y \; \tan u' = \frac{ac}{ab}$$

$$\frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{ac}{ab}\frac{AB}{AC} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Operando, operando, y aplicando artilugios matemáticos...

$$\Delta u = \sin(u' + u)\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

# **Proyección plana polar** equidistante meridiana

# **Proyección plana polar** equidistante meridiana

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

# Proyección plana polar equidistante meridiana

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La condición de equidistancia meridiana implica $\frac{ab}{AB} = \beta = 1$

Sabemos que $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$

Entonces $dm = Rd\delta$

# Proyección plana polar equidistante meridiana

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La condición de equidistancia meridiana implica $\frac{ab}{AB} = \beta = 1$

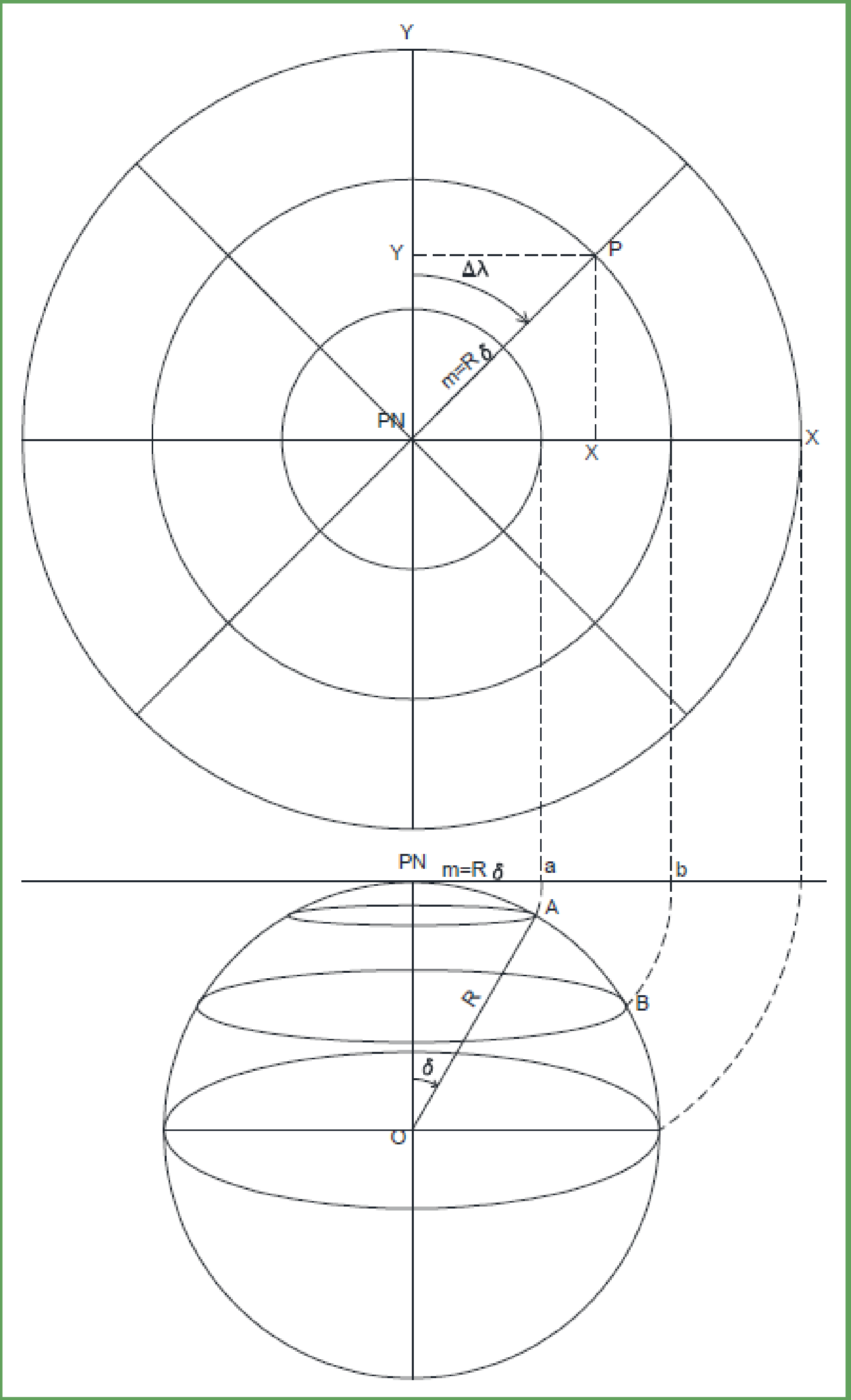
Sabemos que $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$

Entonces $dm = Rd\delta$

Integrando miembro a miembro y aplicando condiciones de borde para el cálculo de la constante de integración llegamos a la expresión definitiva de la Ley:

$$m = R\delta$$

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$




# Proyección plana polar <u>equidistante meridiana</u>

<u>Condición:</u> longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R\delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R\delta \cos \Delta\lambda$$

# Proyección plana polar equidistante meridiana

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R\delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R\delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación transversal o paralela: $$\alpha = \frac{m}{R \sin \delta} = \frac{R\delta}{R \sin \delta} = \frac{\delta}{\sin \delta}$$

# Proyección plana polar equidistante meridiana

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R\delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R\delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación transversal o paralela: $\alpha = \dfrac{m}{R \sin \delta} = \dfrac{R\delta}{R \sin \delta} = \dfrac{\delta}{\sin \delta}$

Coeficiente de deformación superficial: $\mu = \alpha . \beta = \alpha . 1 = \dfrac{\delta}{\sin \delta}$

# Proyección plana polar equidistante meridiana

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R\delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R\delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación transversal o paralela: $\alpha = \dfrac{m}{R \sin \delta} = \dfrac{R\delta}{R \sin \delta} = \dfrac{\delta}{\sin \delta}$

Coeficiente de deformación superficial: $\mu = \alpha.\beta = \alpha.1 = \dfrac{\delta}{\sin \delta}$

Deformación angular máxima: $\Delta u_{MAX} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \dfrac{\frac{\delta}{\sin \delta} - 1}{\frac{\delta}{\sin \delta} + 1} = \dfrac{\delta - \sin \delta}{\delta + \sin \delta}$

# Proyección plana polar **equidistante meridiana**

Condición: longitudes sobre los meridianos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R\delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R\delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación transversal o paralela: $\alpha = \dfrac{m}{R \sin \delta} = \dfrac{R\delta}{R \sin \delta} = \dfrac{\delta}{\sin \delta}$

Coeficiente de deformación superficial: $\mu = \alpha . \beta = \alpha . 1 = \dfrac{\delta}{\sin \delta}$

Deformación angular máxima: $\Delta u_{MAX} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \dfrac{\dfrac{\delta}{\sin \delta} - 1}{\dfrac{\delta}{\sin \delta} + 1} = \dfrac{\delta - \sin \delta}{\delta + \sin \delta}$

# Proyección plana polar equidistante transversal o paralela

# **Proyección plana polar** equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

# **Proyección plana polar** equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

La condición de equidistancia paralela implica $\alpha = 1$ ,

así que $\alpha = \dfrac{m}{R \sin \delta} = 1$

# Proyección plana polar equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

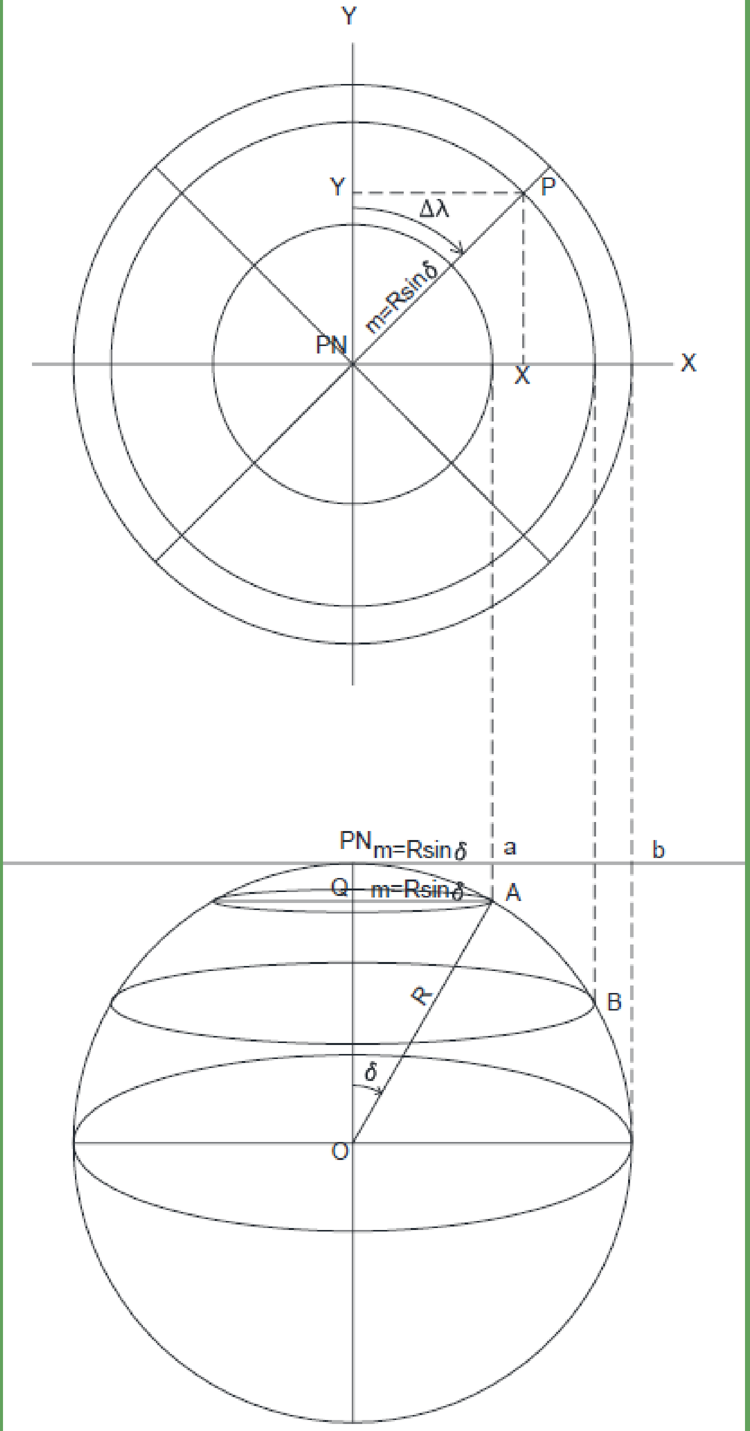
La condición de equidistancia paralela implica α = 1 ,

así que $$\alpha = \frac{m}{R \sin \delta} = 1$$

Entonces la expresión de la Ley es

$$m = R \sin \delta$$

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$




# Proyección plana polar

## equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta;\Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m\sin\Delta\lambda = R\sin\delta\sin\Delta\lambda$$

$$Y_P = m\cos\Delta\lambda = R\sin\delta\cos\Delta\lambda$$

# Proyección plana polar equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R \sin \delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R \sin \delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \dfrac{dm}{Rd\delta}$ como $m = R \sin \delta$ entonces $\beta = \dfrac{R \cos \delta \, d\delta}{Rd\delta} = \cos \delta$

# **Proyección plana polar** equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta;\Delta\lambda)$ será:

$$X_p = m \sin\Delta\lambda = R \sin\delta \sin\Delta\lambda$$

$$Y_p = m \cos\Delta\lambda = R \sin\delta \cos\Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$ como $m = R\sin\delta$ entonces $\beta = \frac{R\cos\delta\, d\delta}{Rd\delta} = \cos\delta$

Coeficiente de deformación superficial: $\mu = \alpha.\beta = 1.\beta = \cos\delta$

# Proyección plana polar equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R \sin \delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R \sin \delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \frac{dm}{R d\delta}$ como $m = R \sin \delta$ entonces $\beta = \frac{R \cos \delta \, d\delta}{R d\delta} = \cos \delta$

Coeficiente de deformación superficial: $\mu = \alpha . \beta = 1 . \beta = \cos \delta$

Deformación angular máxima: $\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} = \frac{2 (\sin \frac{\delta}{2})^2}{2 (\cos \frac{\delta}{2})^2} = (\tan \frac{\delta}{2})^2$

# Proyección plana polar equidistante transversal o paralela

Condición: longitudes sobre los paralelos sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = R \sin \delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = R \sin \delta \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$ como $m = R \sin \delta$ entonces $\beta = \frac{R \cos \delta \, d\delta}{Rd\delta} = \cos \delta$

Coeficiente de deformación superficial: $\mu = \alpha.\beta = 1.\beta = \cos \delta$

Deformación angular máxima: $\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} = \frac{2(\sin \frac{\delta}{2})^2}{2(\cos \frac{\delta}{2})^2} = (\tan \frac{\delta}{2})^2$

# Proyección plana polar equivalente

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La condición de equivalencia implica μ = 1 ,

así que $$\mu = \alpha . \beta = \frac{mdm}{R^2 \sin \delta d\delta} = 1$$

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La condición de equivalencia implica μ = 1 ,

así que $$\mu = \alpha . \beta = \frac{mdm}{R^2 \sin \delta d\delta} = 1$$

Por lo tanto $$mdm = R^2 \sin \delta \, d\delta$$

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La condición de equivalencia implica μ = 1 ,

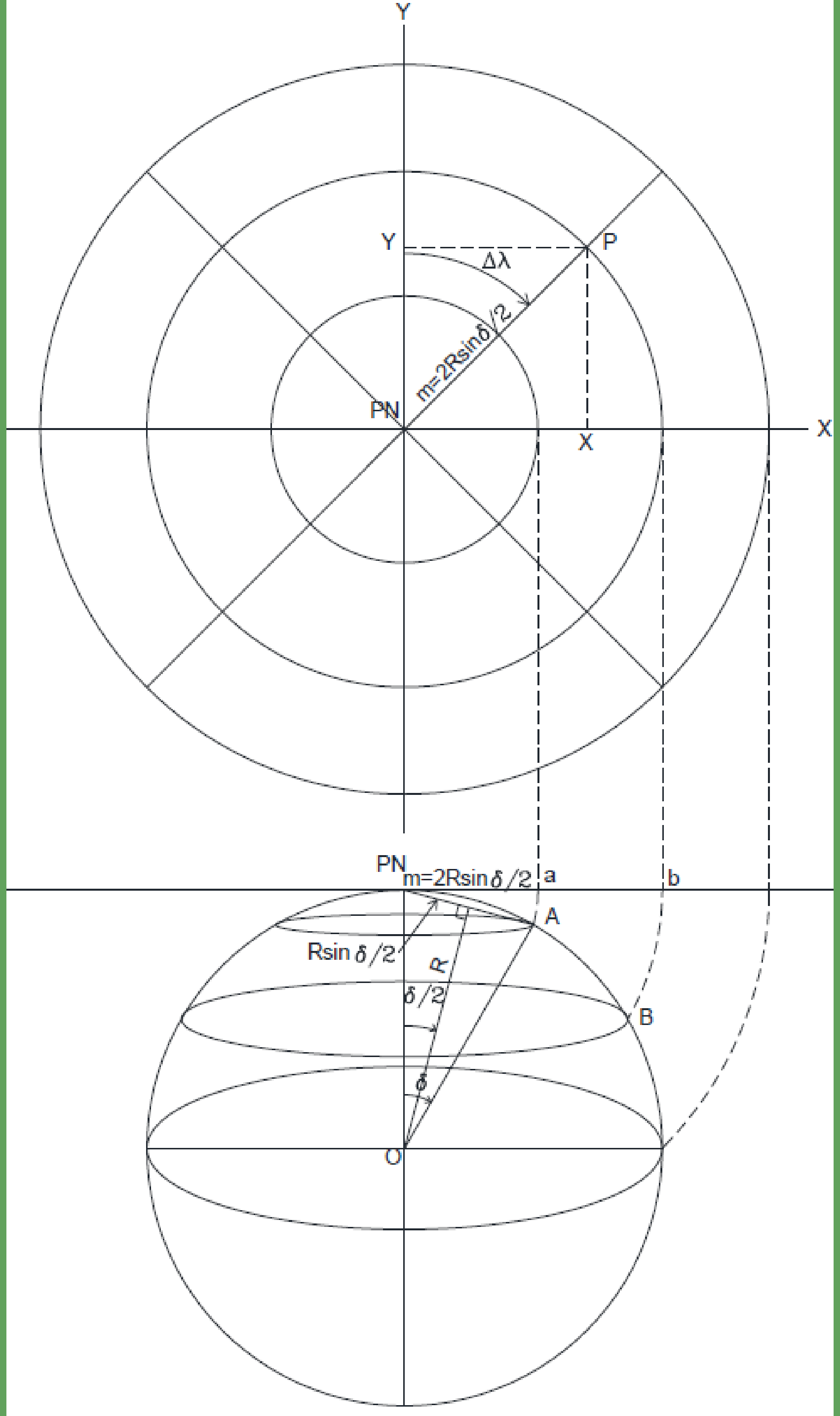
así que $$\mu = \alpha . \beta = \frac{mdm}{R^2 \sin \delta d\delta} = 1$$

Por lo tanto $$mdm = R^2 \sin \delta \, d\delta$$

Integrando, llegamos a la ley de la proyección:

$$m = 2R \sin \frac{\delta}{2}$$

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$




# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta;\Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m\sin\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\sin\Delta\lambda$$

$$Y_P = m\cos\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\cos\Delta\lambda$$

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin \Delta\lambda = 2R \sin\frac{\delta}{2} \sin \Delta\lambda$$

$$Y_P = m \cos \Delta\lambda = 2R \sin\frac{\delta}{2} \cos \Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \dfrac{dm}{Rd\delta}$ como $m = 2R \sin\frac{\delta}{2}$ entonces $\beta = \dfrac{R \cos\frac{\delta}{2} d\delta}{Rd\delta} = \cos\dfrac{\delta}{2}$

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta;\Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m\sin\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\sin\Delta\lambda$$

$$Y_P = m\cos\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\cos\Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$ como $m = 2R\sin\frac{\delta}{2}$ entonces $\beta = \frac{R\cos\frac{\delta}{2}d\delta}{Rd\delta} = \cos\frac{\delta}{2}$

Coeficiente de deformación transversal o paralelo: $\mu = \alpha.\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\cos\frac{\delta}{2}} = \sec\frac{\delta}{2}$

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta;\Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m \sin\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\sin\Delta\lambda$$

$$Y_P = m\cos\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\cos\Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$ como $m = 2R\sin\frac{\delta}{2}$ entonces $\beta = \frac{R\cos\frac{\delta}{2}d\delta}{Rd\delta} = \cos\frac{\delta}{2}$

Coeficiente de deformación transversal o paralelo: $\mu = \alpha.\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\cos\frac{\delta}{2}} = \sec\frac{\delta}{2}$

Deformación angular máxima: $\Delta u_{MAX} = \frac{(\sin\frac{\delta}{2})^2}{1+(\cos\frac{\delta}{2})^2}$

# Proyección plana polar equivalente

Condición: áreas de pequeñas figuras sin deformación.

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta;\Delta\lambda)$ será:

$$X_P = m\sin\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\sin\Delta\lambda$$

$$Y_P = m\cos\Delta\lambda = 2R\sin\frac{\delta}{2}\cos\Delta\lambda$$

Coeficiente de deformación meridiano: $\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$ como $m = 2R\sin\frac{\delta}{2}$ entonces $\beta = \frac{R\cos\frac{\delta}{2}d\delta}{Rd\delta} = \cos\frac{\delta}{2}$

Coeficiente de deformación transversal o paralelo: $\mu = \alpha.\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\cos\frac{\delta}{2}} = \sec\frac{\delta}{2}$

Deformación angular máxima: $\Delta u_{MAX} = \frac{(\sin\frac{\delta}{2})^2}{1+(\cos\frac{\delta}{2})^2}$