Práctico 2 (Parte B)

Repaso: Sistemas no-inerciales

¿Cómo aplico lo visto anteriormente a sistemas acelerados?

→ 1ª Ley se rompe } → Puedo pararme en un sistema fijo.
→ 2ª Ley también }

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_c \Longleftrightarrow m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$$

($m\vec{a} = \sum \vec{F}$, $-m\vec{a}_T = \vec{F}_T$, $-m\vec{a}_c = \vec{F}_c$)

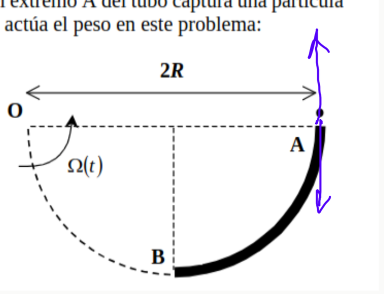
$$\Longleftrightarrow m\vec{a}' = \sum \vec{F}_{Ext} + \vec{F}_T + \vec{F}_c$$

Ejercicio B:

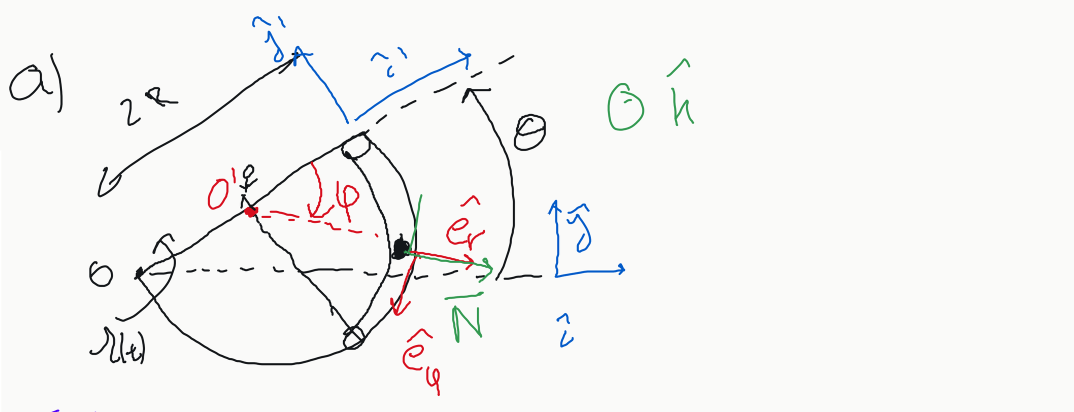
Un tubo liso AB, en forma de cuadrante de circunferencia de diámetro OA = $2R$, gira en un plano con velocidad angular variable $\Omega(t)$ alrededor de un eje perpendicular al plano que pasa por O. En el instante inicial, el extremo A del tubo captura una partícula que se hallaba en reposo. Considerando que no actúa el peso en este problema:

a) Determine $\Omega(t)$ en función de $\Omega(0)$ de modo que la velocidad de la partícula relativa al tubo sea de módulo constante.

b) Halle la normal $\vec{N}(t)$ que actúa sobre la partícula.



a)



$S^{ABS}: \{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, $S'\{O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}\}$

$\vec{\omega}_{s'} = \Omega(t)\hat{k}$

$\vec{v}_{o'}, \vec{a}_{o'}$: $\quad \vec{r}_{o'} = R\hat{i}' \rightarrow \vec{v}_{o'} = R\dot{\hat{i}}' = R\Omega(t)\hat{j}'$

$\rightarrow \vec{a}_{o'} = R\dot{\Omega}\hat{j}' - R\Omega^2\hat{i}'$

$\dot{\hat{i}}' = \Omega\hat{k}\times\hat{i}' = \Omega\hat{j}'$

$\dot{\hat{j}}' = \Omega\hat{k}\times\hat{j}' = -\Omega\hat{i}'$

$\vec{r}' = R\hat{e}_r \rightarrow \vec{v}' = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$

$\rightarrow \vec{a}' = R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\hat{e}_r$

Si impongo q' la vel relativa al tubo de la part sea de módulo cte $\begin{cases}\dot{\varphi} = cte \\ \ddot{\varphi} = 0\end{cases}$

$$\vec{a}' = -R\dot{\varphi}^2\hat{e}_r$$

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}^{Ext} + \vec{F}_T + \vec{F}_c$$

$\sum \vec{F}^{Ext} = N\hat{e}_r$

$\vec{F}_T = -m\vec{a}_T = -m\left(\dot{\vec{\omega}}_s\times\vec{r}' + \vec{\omega}_s\times(\vec{\omega}_s\times\vec{r}') + \vec{a}_{o'}\right)$

$= -m\left(\dot{\Omega}\hat{k}\times R\hat{e}_r + R\Omega^2\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{e}_r) + R\dot{\Omega}\hat{j}' - R\Omega^2\hat{i}'\right)$

$= mR\left(\dot{\Omega}\hat{e}_\varphi + \Omega^2\hat{e}_r - \dot{\Omega}\hat{j}' + \Omega^2\hat{i}'\right)$

- $\vec{\omega}_{s'} = \Omega\hat{k}$
- $\dot{\vec{\omega}}_{s'} = \dot{\Omega}\hat{k}$
- $\vec{r}' = R\hat{e}_r$
- $\vec{a}_{o'} = R\dot{\Omega}\hat{j}' - R\Omega^2\hat{i}'$
- $\vec{v}' = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$

$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -m2\vec{\omega}_s\times\vec{v}'$

$= -2m\Omega\hat{k}\times R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$

$= -2mR\Omega\dot{\varphi}\hat{e}_r$

$$-mR\dot{\varphi}^2\hat{e}_r = N\hat{e}_r + mR\left(\dot{\Omega}\hat{e}_\varphi + \Omega^2\hat{e}_r - \dot{\Omega}\hat{j}' + \Omega^2\hat{i}'\right) - 2mR\Omega\dot{\varphi}\hat{e}_r$$

$$\begin{cases} -mR\dot{\varphi}^2 = N + mR\Omega^2 - 2mR\Omega\dot{\varphi} + mR\dot{\Omega}\sin\varphi + mR\Omega^2\cos\varphi \\ \dot{\Omega} + \dot{\Omega}\cos\varphi - \Omega^2\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$\hat{i}' = \cos\varphi\,\hat{e}_r - \sin\varphi\,\hat{e}_\varphi$

$\hat{j}' = -\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi - \sin\varphi\,\hat{e}_r$

$$\dot{\Omega}(1+\cos\varphi) = \Omega^2\sin\varphi$$

$$\Longleftrightarrow \int\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}dt = \int\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}dt$$

$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}$

$\dot{\Omega}\,dt = d\Omega$

$$\int\frac{d\Omega}{\Omega^2} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\int\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}d\varphi$$

$\dot{\varphi} = cte \Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

$\Leftrightarrow dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$

$$-\frac{1}{\Omega}\Bigg|_{\Omega(0)}^{\Omega(t)} = -\frac{1}{\dot{\varphi}}\ln(1+\cos\varphi)\Bigg|_{\varphi(0)}^{\varphi(t)}$$

$\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$$-\frac{1}{\Omega(t)} + \frac{1}{\Omega(0)} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\ln\left(\frac{1+\cos\varphi_0}{1+\cos\varphi(t)}\right)$$

$\varphi_0 = 0$

$$-\frac{1}{\Omega(t)} + \frac{1}{\Omega(0)} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\ln\left(\frac{2}{1+\cos\varphi}\right)$$

$\vec{v}(0) = 0 \qquad \dot{\hat{e}}_r = (\Omega - \dot{\varphi})\hat{k}\times\hat{e}_r$

$\vec{r} = R\hat{i}' + R\hat{e}_r$

$\vec{v} = R\dot{\hat{i}}' + R\dot{\hat{e}}_r$

$= R\Omega\hat{j}' - R(\Omega - \dot{\varphi})\hat{e}_\varphi$

$$\Omega(t) = \frac{1}{\frac{1}{\Omega(0)} - \frac{1}{\dot{\varphi}}\ln\left(\frac{2}{1+\cos\varphi}\right)}$$

$\vec{v}(0) = R\Omega(0)\hat{j}'_0 - R(\Omega(0) - \dot{\varphi}(0))\hat{e}_{\varphi_0} = 0$

$$\Omega(t) = \frac{1}{\frac{1}{\Omega(0)} - \frac{1}{2\Omega(0)}\ln\left(\frac{2}{1+\cos\varphi}\right)}$$

$\Rightarrow R\Omega(0) + R\Omega(0) - R\dot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = 2\Omega(0)$$

$$\Omega(t) = \frac{2\Omega(0)}{2 + \ln\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)}$$

$\varphi = \dot{\varphi}t = 2\Omega(0)t$

b) $-mR\dot{\varphi}^2 = N + mR\Omega^2 - 2mR\Omega\dot{\varphi} + mR\dot{\Omega}\sin\varphi + mR\Omega^2\cos\varphi$

$N = 2mR\Omega\dot{\varphi} - mR\Omega^2 - mR\dot{\varphi}^2 - mR\dot{\Omega}\sin\varphi - mR\Omega^2\cos\varphi$

$= 2mR\left[\Omega 2\Omega(0) - \frac{\Omega^2}{2} - 2\Omega^2(0) - \frac{\dot{\Omega}}{2}\sin\varphi - \frac{\Omega^2}{2}\cos\varphi\right]$

$= 2mR\left[2\Omega\Omega(0) - \frac{\Omega^2}{2}(1+\cos\varphi) - \frac{\dot{\Omega}}{2}\sin\varphi - 2\Omega^2(0)\right]$

$\Omega(t) = \frac{2\Omega(0)}{2 + \ln\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)}$

$N = 2mR\left[2\Omega\Omega(0) - \frac{\Omega^2}{2}\left[1 + \cos\varphi + \frac{2\sin^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right] 2\Omega^2(0)\right]$

$$\dot{\Omega} = \frac{(2\Omega(0))\left(-\frac{2\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)}{\left[2 + \ln\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right)\right]^2} = \Omega^2\left(\frac{2\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)$$

$$N = 2mR\left[2\Omega\Omega(0) - 2\Omega^2 - 2\Omega^2(0)\right]$$

$$\frac{(1+\cos\varphi)^2 + 2\sin^2\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2(1+\cos\varphi)}{1+\cos\varphi} = 2$$