# Cartografía Matemática

1480

TCI13

Roberto Pérez Rodino - rodino@fing.edu.uy

Esteban Striewe - estriewe@fing.edu.uy

Año 2024

# Elipse indicatriz de Tissot

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Quién fue Tissot?

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Quién fue Tissot?

Nicolas Auguste Tissot fue un matemático francés que vivió en el siglo XIX.

Elaboró el concepto de elipse indicatriz para ilustrar las deformaciones lineales, angulares y de área provocadas por las proyecciones cartográficas.

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Quién fue Tissot?

Nicolas Auguste Tissot fue un matemático francés que vivió en el siglo XIX.

Elaboró el concepto de elipse indicatriz para ilustrar las deformaciones lineales, angulares y de área provocadas por las proyecciones cartográficas.

ATENCION: como muchos creen, no es el de los relojes.

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Quién fue Tissot?

Nicolas Auguste Tissot fue un matemático francés que vivió en el siglo XIX.

Elaboró el concepto de elipse indicatriz para ilustrar las deformaciones lineales, angulares y de área provocadas por las proyecciones cartográficas.

<ins>ATENCION:</ins> como muchos creen, no es el de los relojes.

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Cómo se define?

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Cómo se define?

Como el lugar geométrico de los puntos homólogos en el plano, correspondientes a los extremos de una familia de geodésicas del elipsoide, de longitud unitaria y que tienen el otro extremo en un mismo punto.

# Elipse indicatriz de Tissot

¿Cómo se define?

Como el lugar geométrico de los puntos homólogos en el plano, correspondientes a los extremos de una familia de geodésicas del elipsoide, de longitud unitaria y que tienen el otro extremo en un mismo punto.

En general, este lugar geométrico es una elipse.

# Elipse indicatriz de Tissot

Recordemos,

El elemento diferencial de longitud en el plano es:

$$dl_1 = \sqrt{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}$$

donde,

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

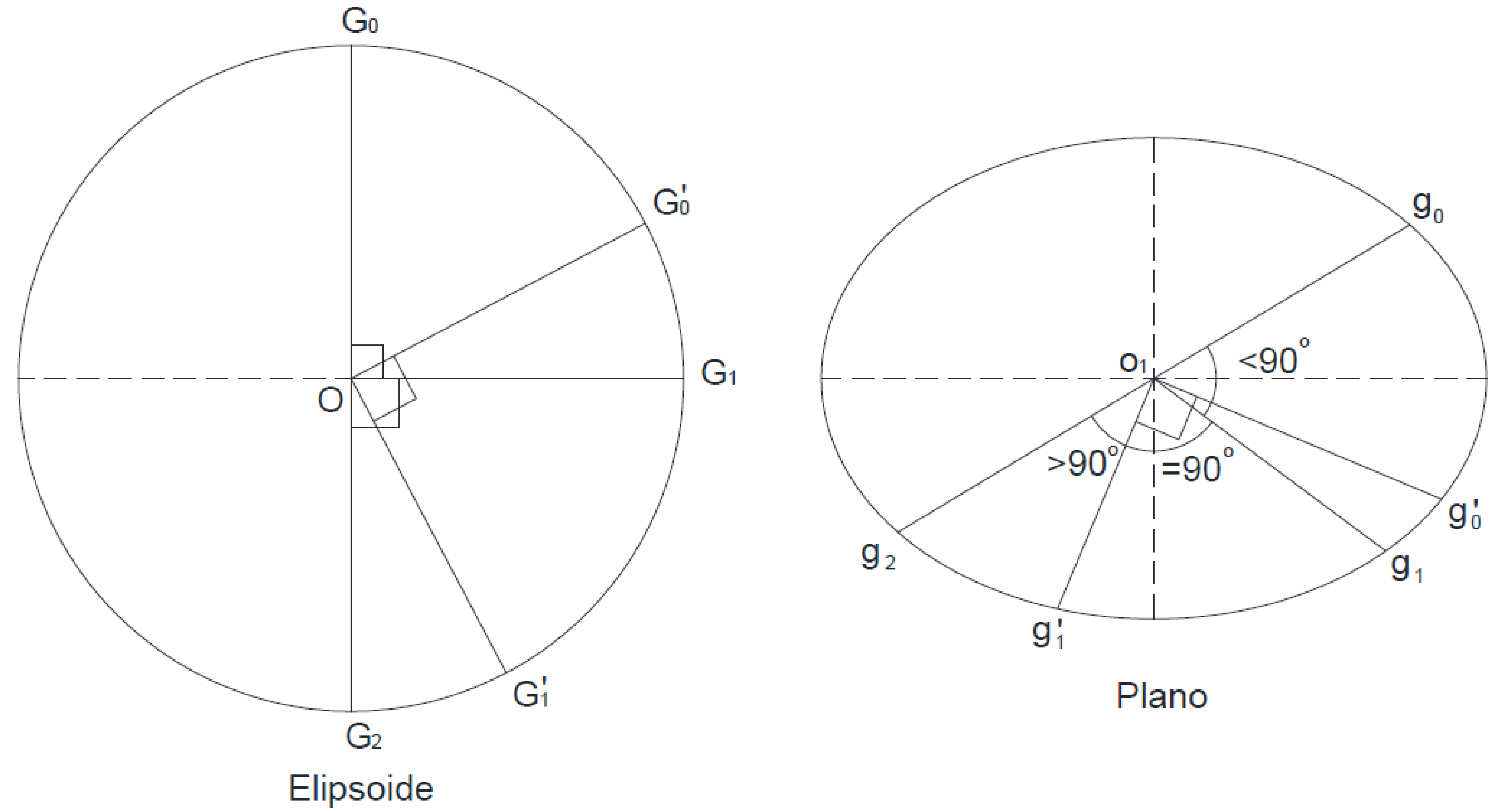
$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

# Elipse indicatriz de Tissot

Sus direcciones principales

# Elipse indicatriz de Tissot

Sus direcciones principales

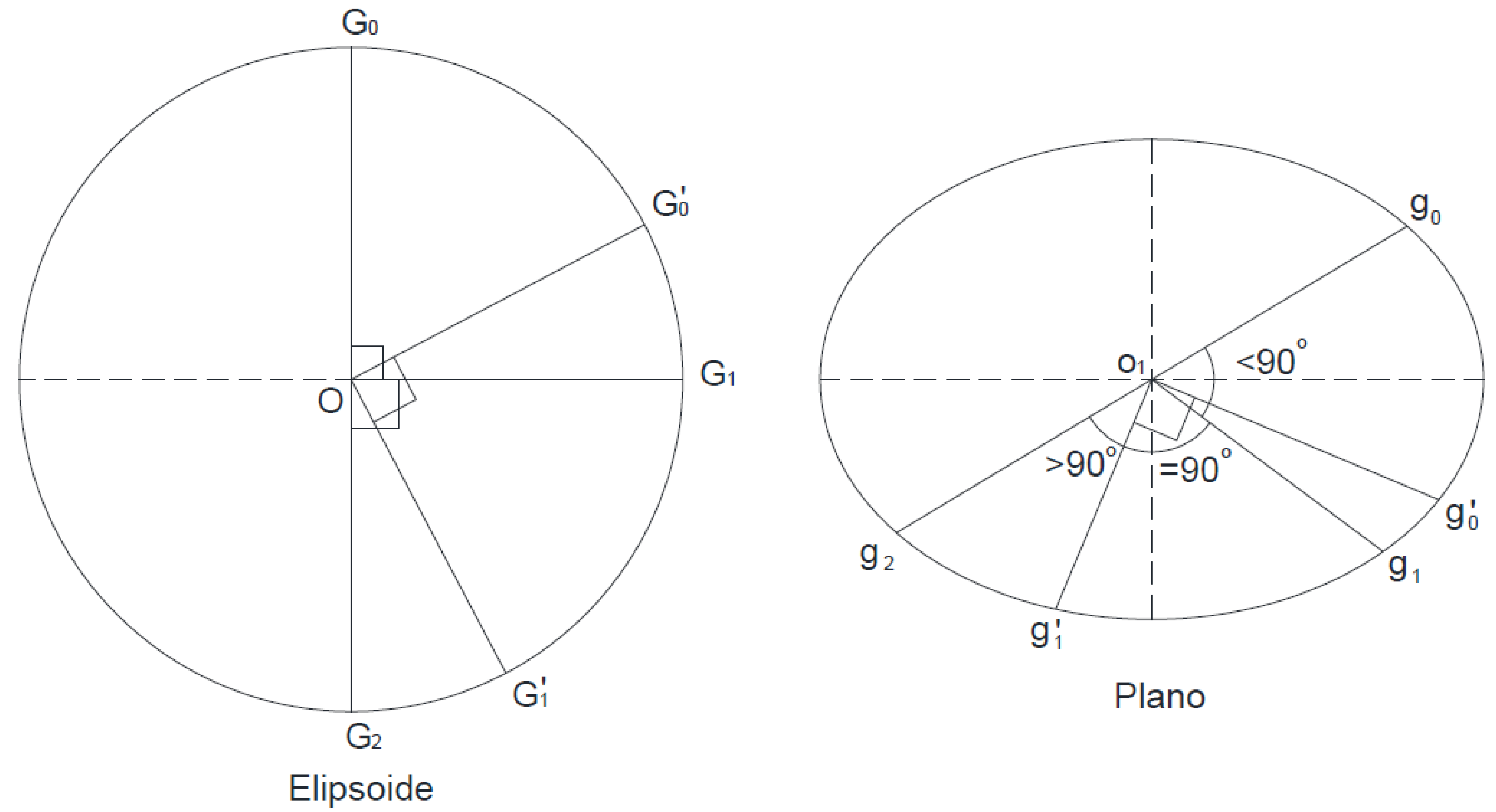


# Elipse indicatriz de Tissot

Sus direcciones principales

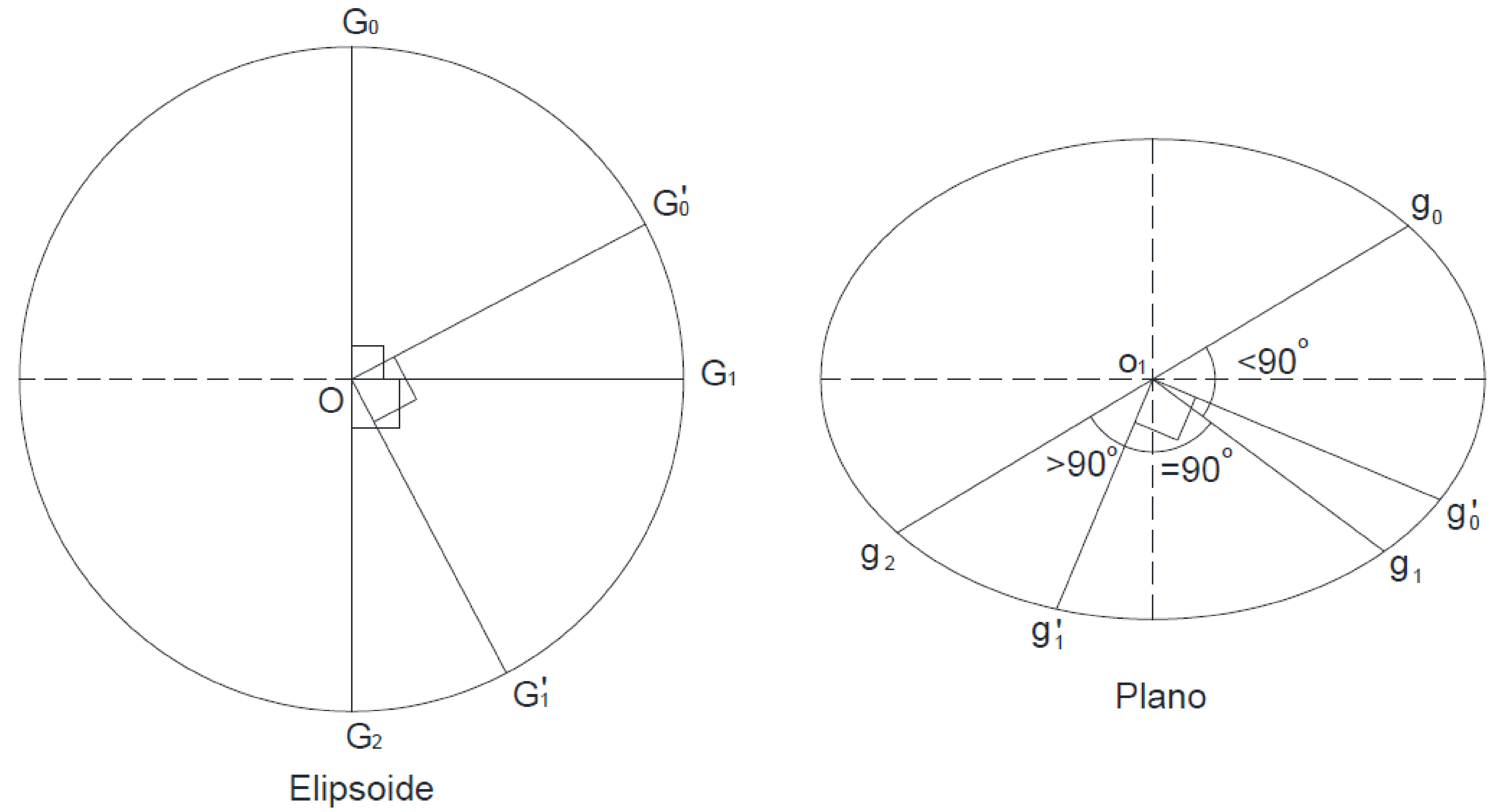
Círculo de radio unitario en el elipsoide.

Sus puntos homólogos en el plano.



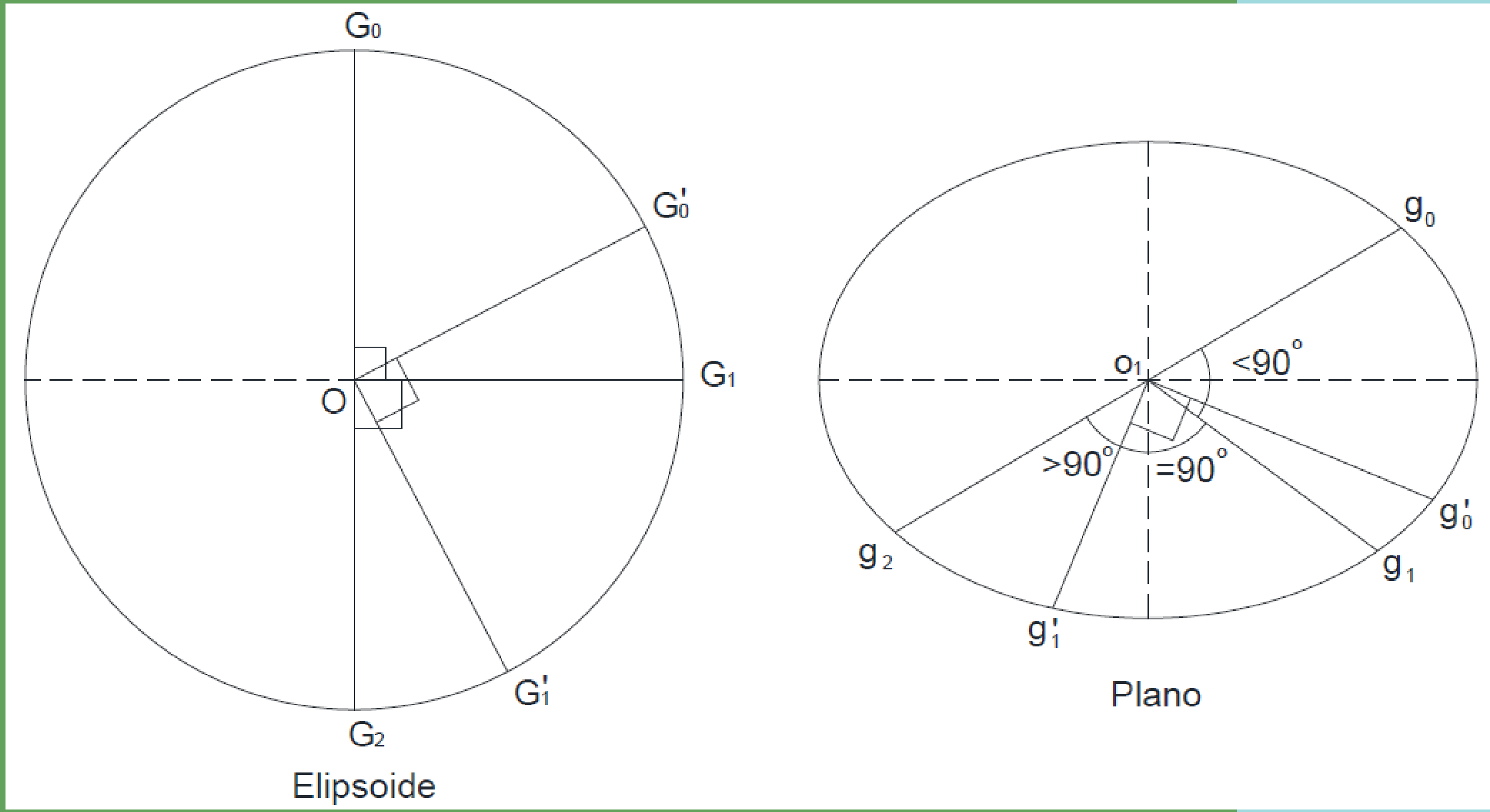
# Elipse indicatriz de Tissot

Sus direcciones principales



# Elipse indicatriz de Tissot

Sus direcciones principales




Siempre existen dos direcciones perpendiculares en el elipsoide a las que les corresponde dos direcciones perpendiculares en el plano.

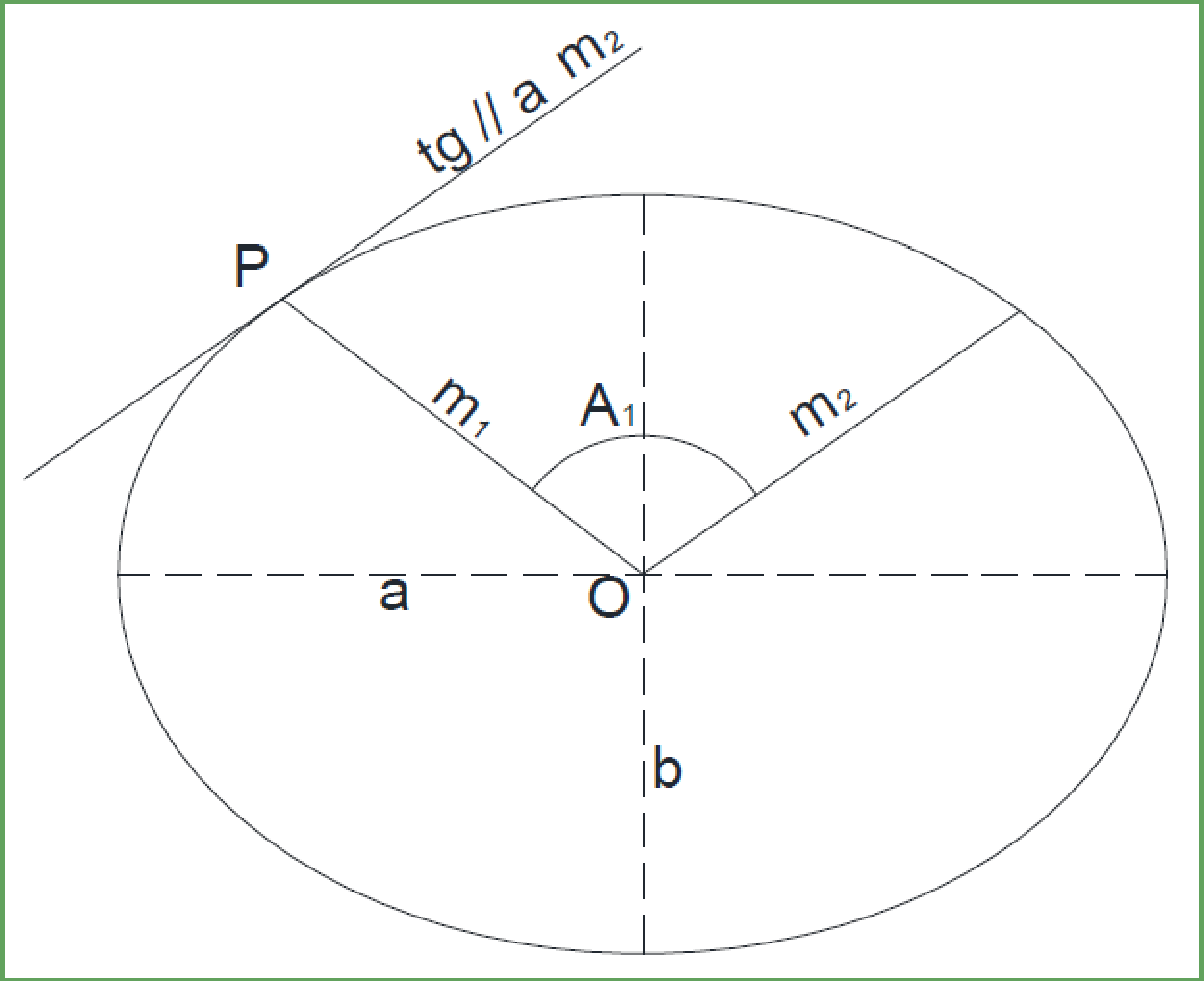
Estas direcciones se llaman <u>direcciones principales</u>.

Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

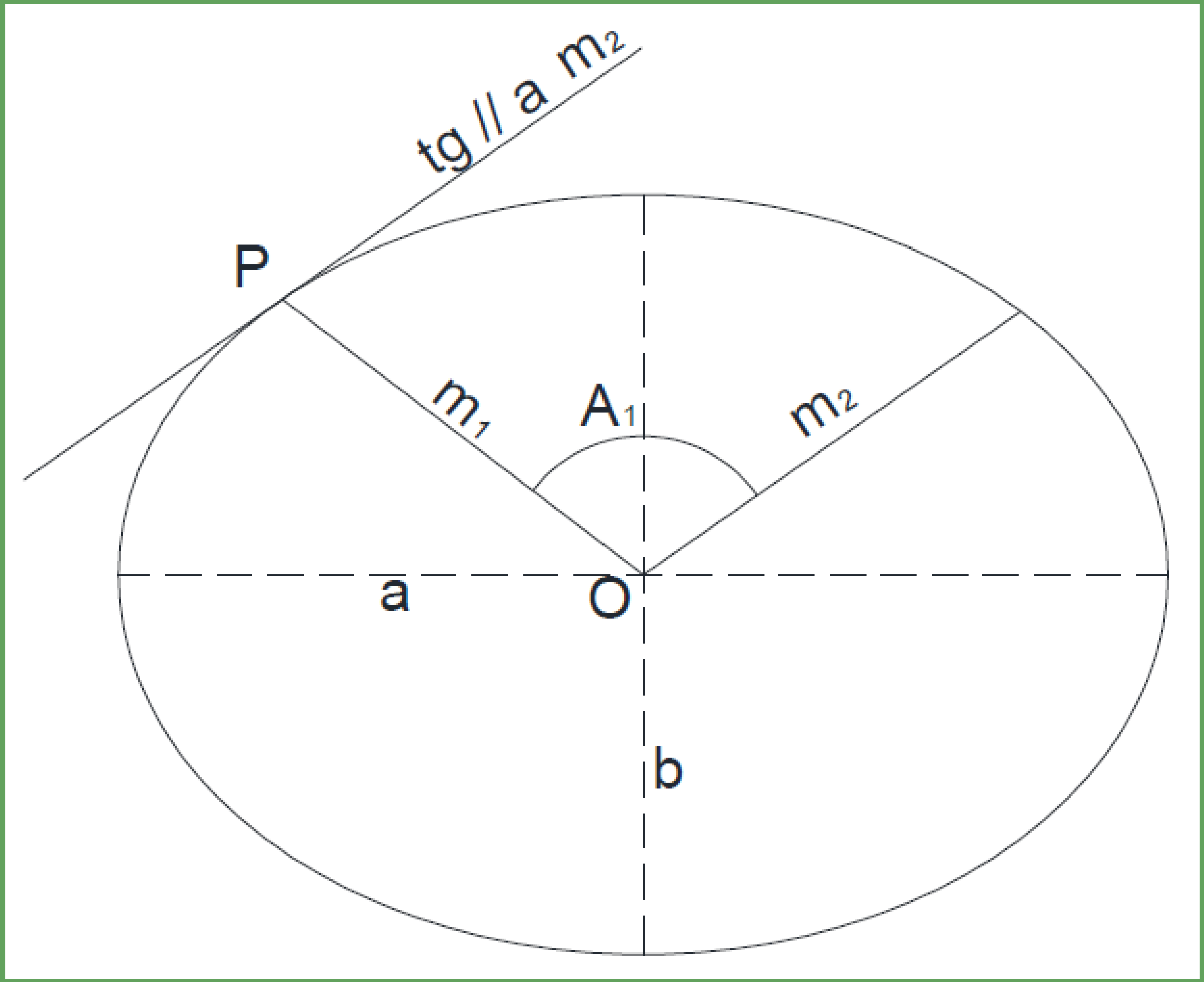
Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**



Elipse indicatriz de
**Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

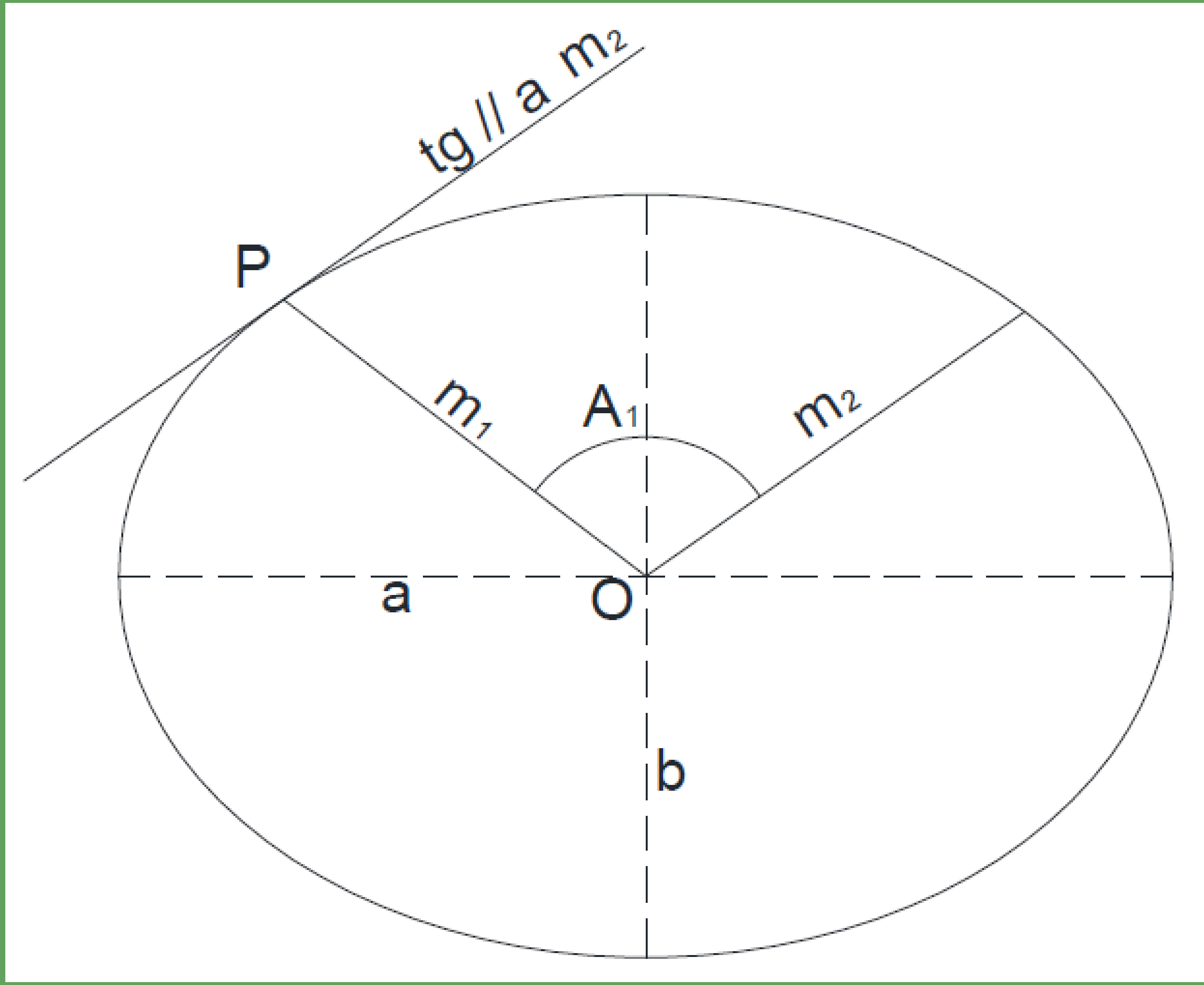



$m_1$ y $m_2$:
semidiámetros conjugados

Apolonio dice que:

Elipse indicatriz de
**Tissot**

# Teorema de **Apolonio**




$m_1$ y $m_2$:

semidiámetros conjugados

Apolonio dice que:

$$m_1^2 + m_2^2 = a^2 + b^2$$

$$m_1 m_2 \sin A_1 = ab$$

# Teorema de **Apolonio**

$$L = \frac{dl_1}{dl} = \frac{\sqrt{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 + 2Fd\varphi d\lambda}}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}}$$

Módulo de deformación **lineal**

Elipse indicatriz de
**Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

$$L = \frac{dl_1}{dl} = \frac{\sqrt{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 + 2Fd\varphi d\lambda}}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}}$$

Módulo de deformación **lineal**

$$h = \frac{\sqrt{E}d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

Módulo de deformación **lineal** meridiano

$$k = \frac{\sqrt{G}d\lambda}{rd\lambda} = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

Módulo de deformación **lineal** paralelo

Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

$$L = \frac{dl_1}{dl} = \frac{\sqrt{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}}$$

Módulo de deformación **lineal**

$$h = \frac{\sqrt{E}\, d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

o de otra forma: $h = \frac{dl_1^m}{dl^m}$ = $dl_1^m$

$$k = \frac{\sqrt{G}\, d\lambda}{r d\lambda} = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

o de otra forma: $k = \frac{dl_1^p}{dl^p}$ = $dl_1^p$

# Teorema de **Apolonio**

Direcciones principales.

Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

Direcciones principales.

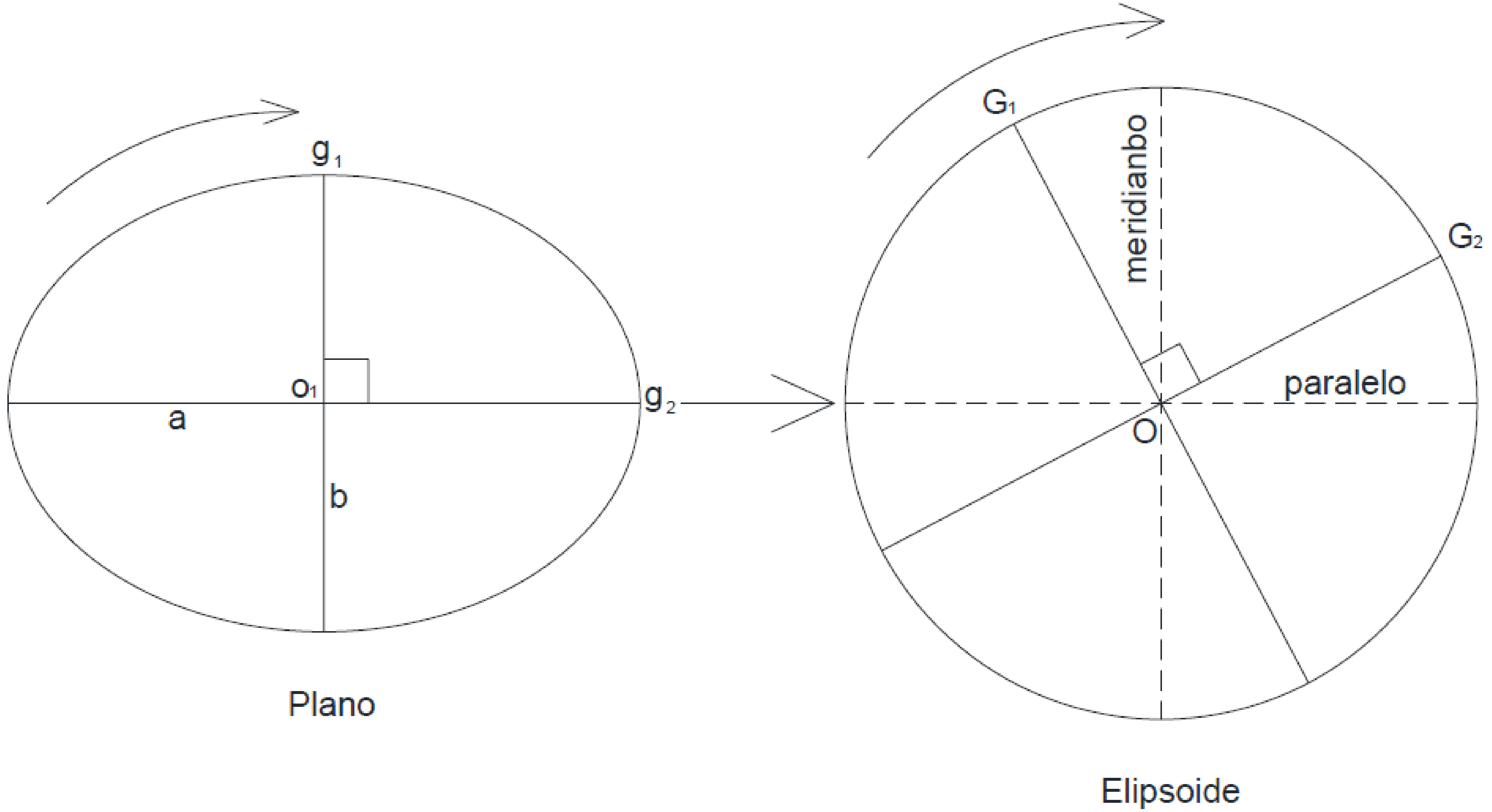
Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

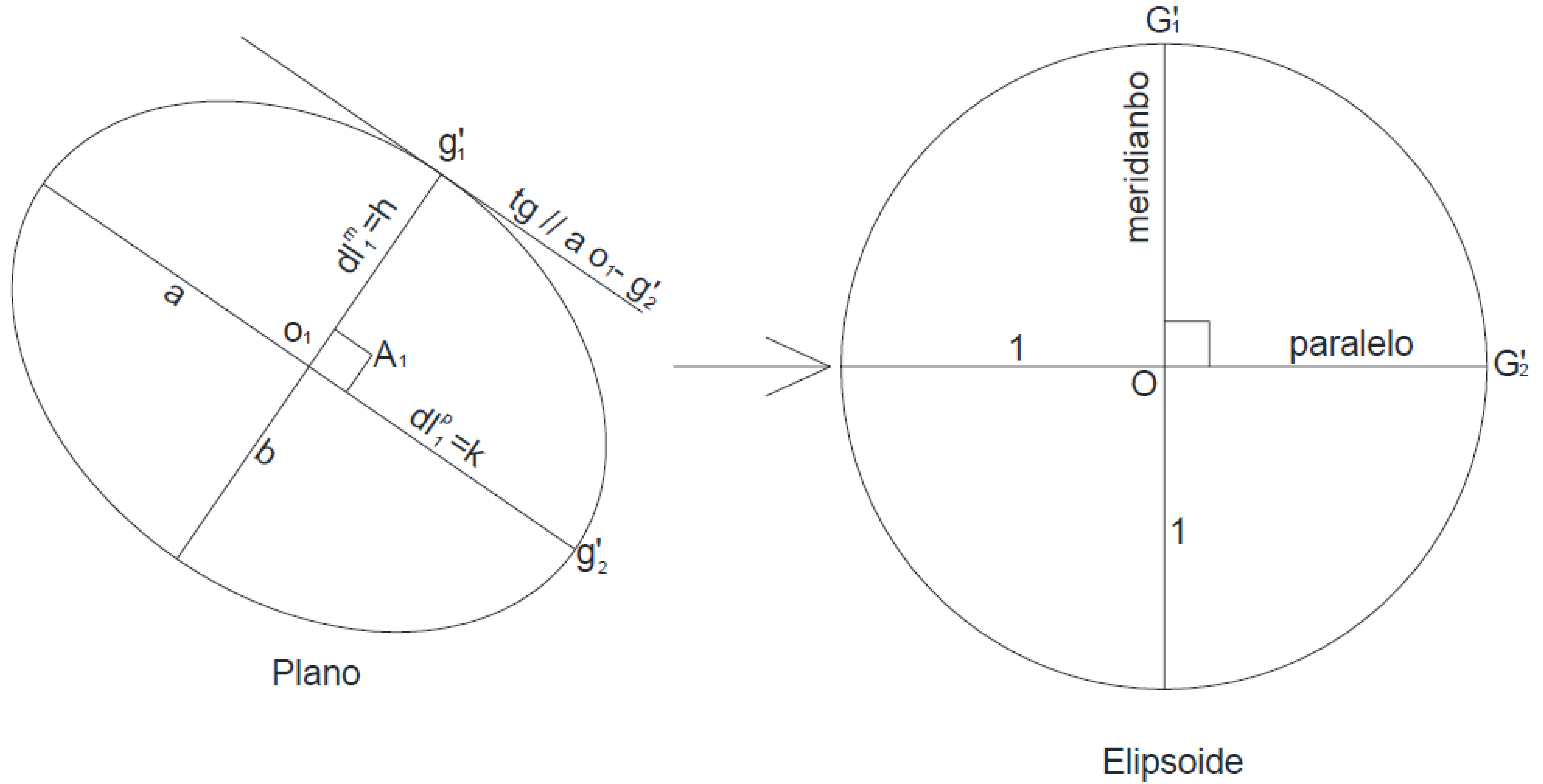
Direcciones principales.

( Siempre existen dos direcciones perpendiculares en el elipsoide a las que les corresponde dos direcciones perpendiculares en el plano. )

# Teorema de **Apolonio**

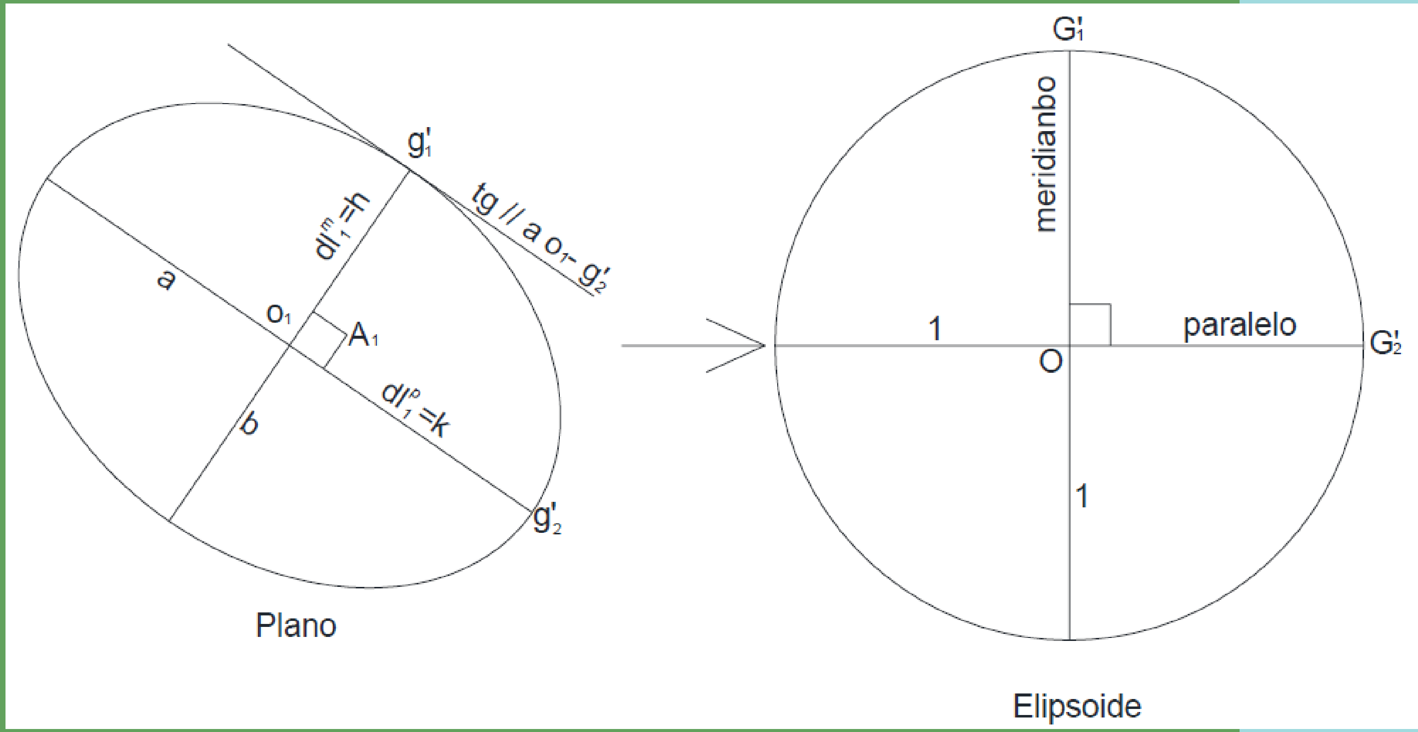


# Teorema de **Apolonio**



Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**




Aplicando Apolonio a la elipse rotada:

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2$$

$$hk \underbrace{\sin A_1}_{90^\circ} = ab = hk$$

# Teorema de **Apolonio**

Recordemos el módulo de deformación superficial *S*:

$$S = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\acute{a}rea\ elipse}{\acute{a}rea\ c\acute{\imath}rculo}$$

$$S = \frac{\pi ab}{\pi dl^2} = \frac{\pi ab}{\pi.1} = ab$$

Incorporando el módulo S en las ecuaciones de Apolonio:

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab = 2S$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = h^2 + k^2 + 2S \Rightarrow (a + b)^2 = h^2 + k^2 + 2s$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = h^2 + k^2 - 2S \Rightarrow (a - b)^2 = h^2 + k^2 - 2s$$

# Teorema de **Apolonio**

Sabemos de la clase pasada que *S*:

$$S = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}}{\rho r}$$

Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

Sabemos de la clase pasada que *S*:

$$S = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}}{\rho r}$$

Y de hace un rato que:

$$h = \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$k = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

# Teorema de **Apolonio**

Sabemos de la clase pasada que *S*:

$$S = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}}{\rho r}$$

Y de hace un rato que:

$$h = \frac{1}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$k = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

Entonces, sustituyendo y reagrupando:

$$(a+b)^2 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2$$

$$(a-b)^2 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2$$

# Teorema de **Apolonio**

Escribiendo las últimas expresiones de esta manera

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = m$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = n$$

podemos determinar $a$ y $b$.

Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

Escribiendo las últimas expresiones de esta manera

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = m$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = n$$

podemos determinar *a* y *b*.

*m* y *n* dependen de las derivadas parciales y del elipsoide de referencia.

$$m - n = 4ab \Rightarrow \frac{m-n}{4} = ab \Rightarrow \frac{(m-n)^2}{16} = a^2b^2 = p$$

$$m + n = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow \frac{m+n}{2} = a^2 + b^2 = s$$

# Teorema de **Apolonio**

TODOS sabemos que con la suma y el producto de las raíces, podemos calcularlas mediante una ecuación de 2° grado:

Teníamos:

$$m - n = 4ab \Rightarrow \frac{m-n}{4} = ab \Rightarrow \frac{(m-n)^2}{16} = a^2b^2 = p$$

$$m + n = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow \frac{m+n}{2} = a^2 + b^2 = s$$

Elipse indicatriz de **Tissot**

# Teorema de **Apolonio**

TODOS sabemos que con la suma y el producto de las raíces, podemos calcularlas mediante una ecuación de 2° grado:

Teníamos:

$$m - n = 4ab \Rightarrow \frac{m-n}{4} = ab \Rightarrow \frac{(m-n)^2}{16} = a^2b^2 = p$$

$$m + n = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow \frac{m+n}{2} = a^2 + b^2 = s$$

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$a^2 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$b^2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

# Teorema de **Apolonio**

TODOS sabemos que con la suma y el producto de las raíces, podemos calcularlas mediante una ecuación de 2° grado:

Teníamos:

$$m-n=4ab \Rightarrow \frac{m-n}{4}=ab \Rightarrow \frac{(m-n)^2}{16}=a^2b^2=p$$

$$m+n=2a^2+2b^2 \Rightarrow \frac{m+n}{2}=a^2+b^2=s$$

$$x^2-sx+p=0$$

$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

$$a^2=\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

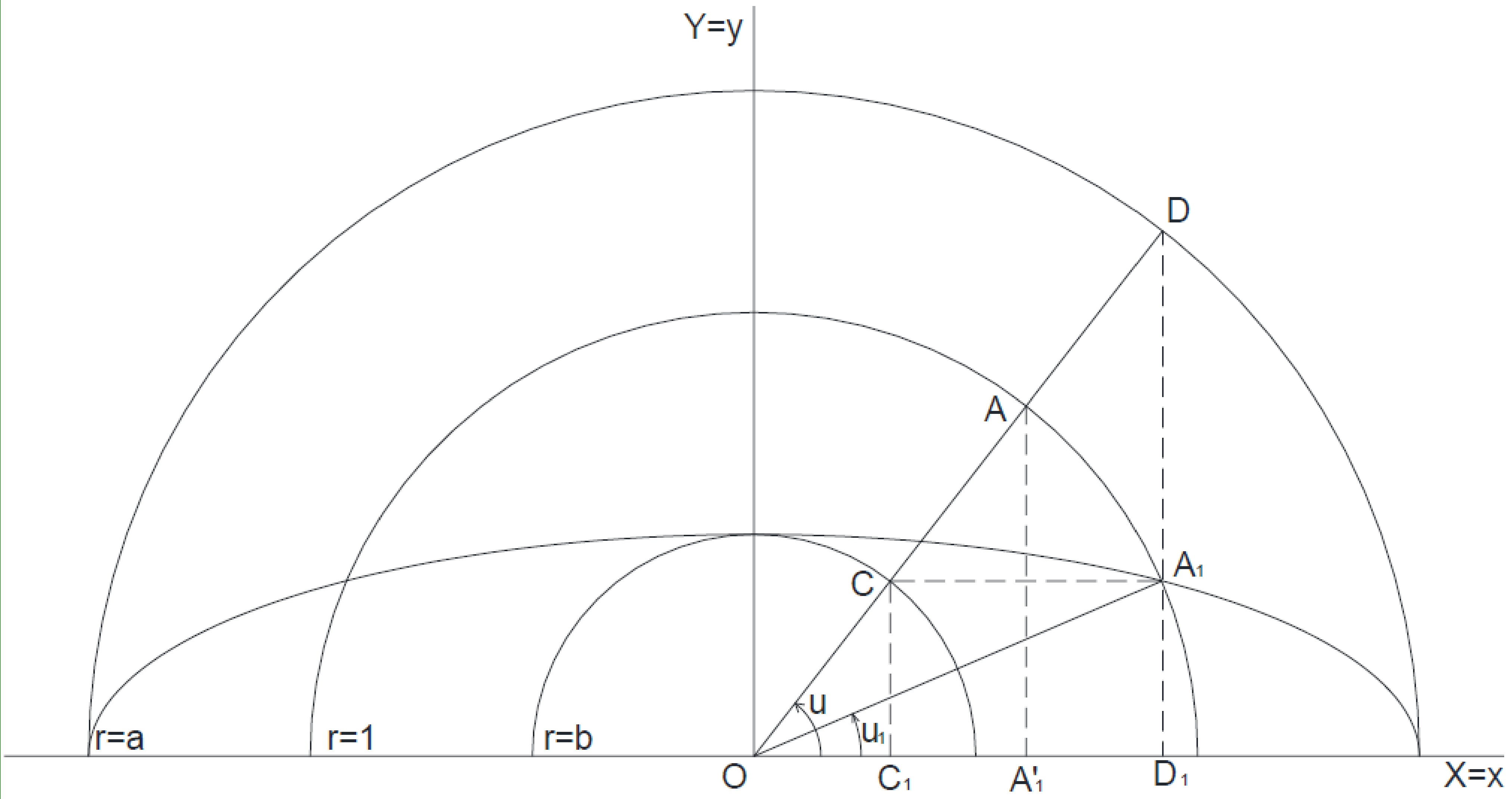
$$b^2=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

Entonces:

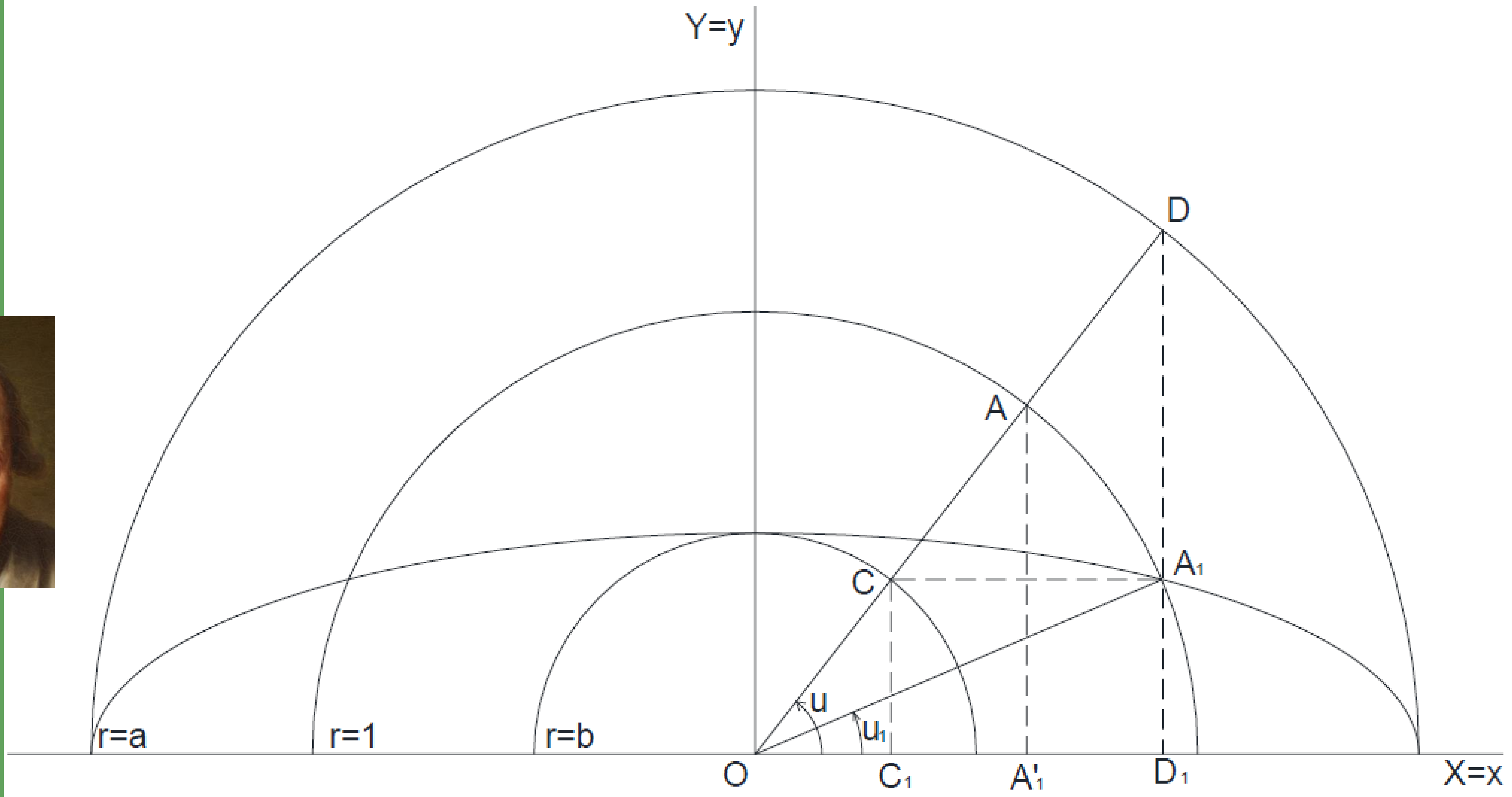
$$a=\frac{\sqrt{s+\sqrt{s^2-4p}}}{\sqrt{2}} \qquad b=\frac{\sqrt{s-\sqrt{s^2-4p}}}{\sqrt{2}}$$

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones



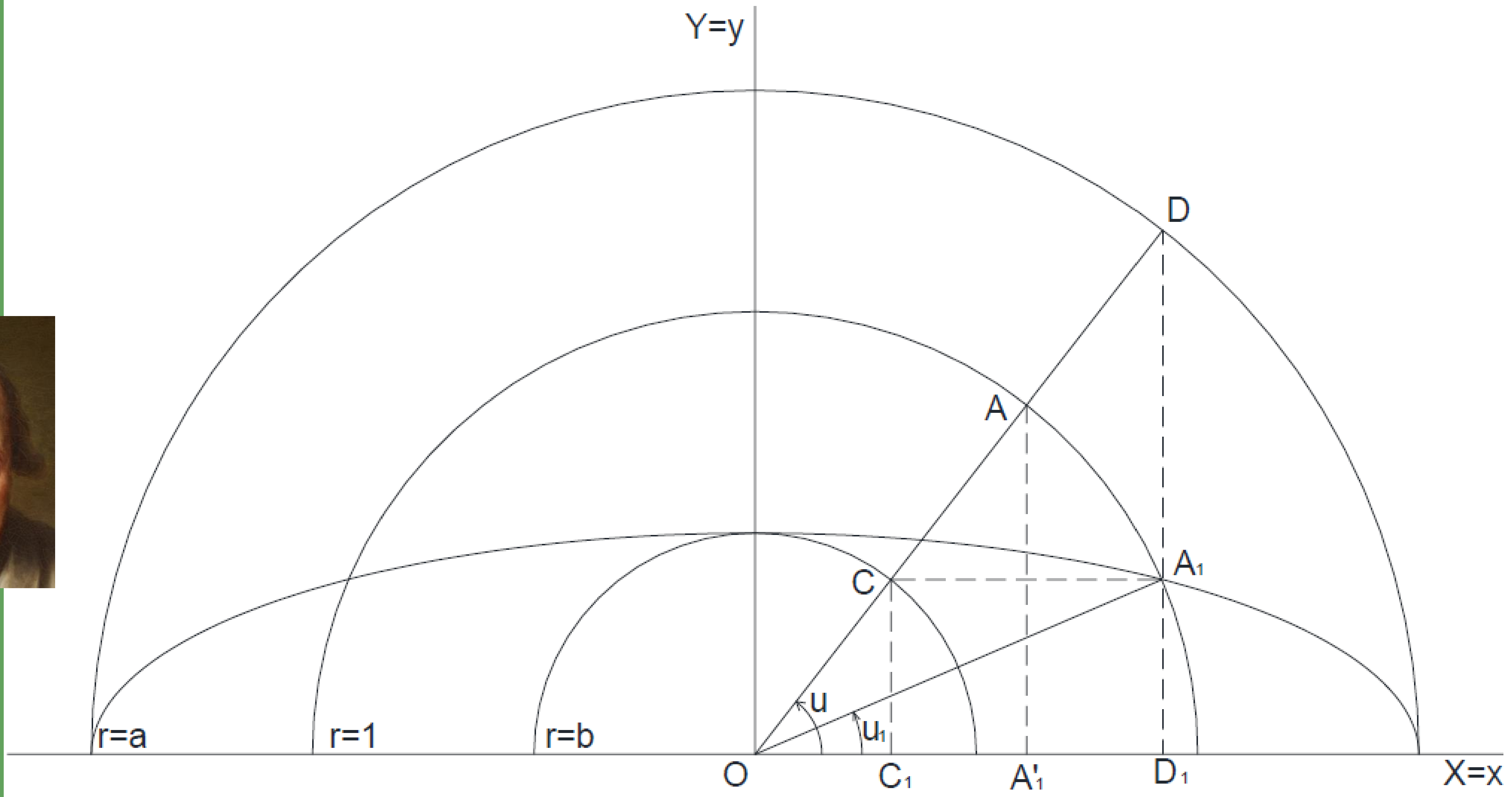
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones



# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

A (X,Y)

$A_1$ ($x$,$y$)



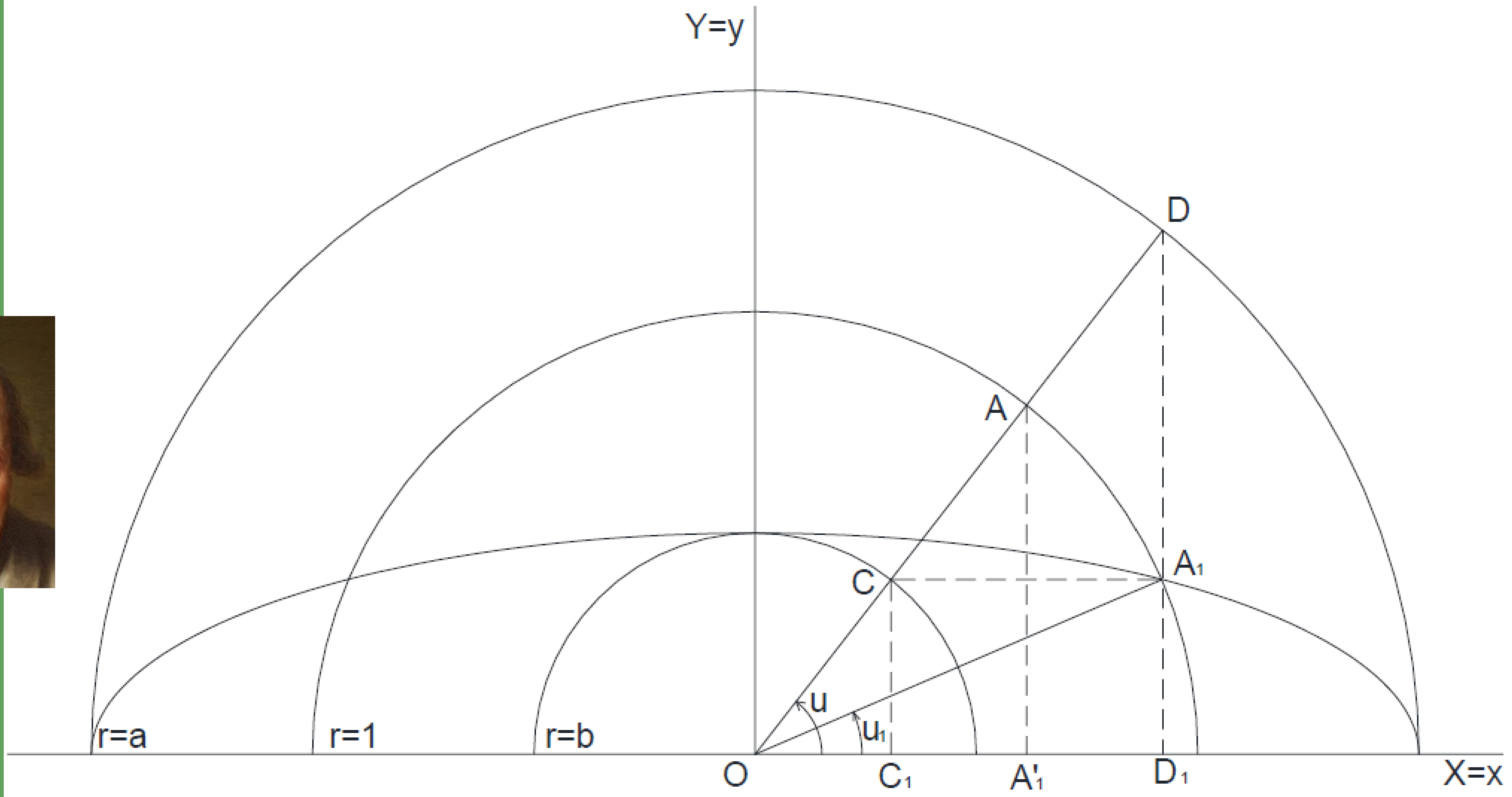
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$



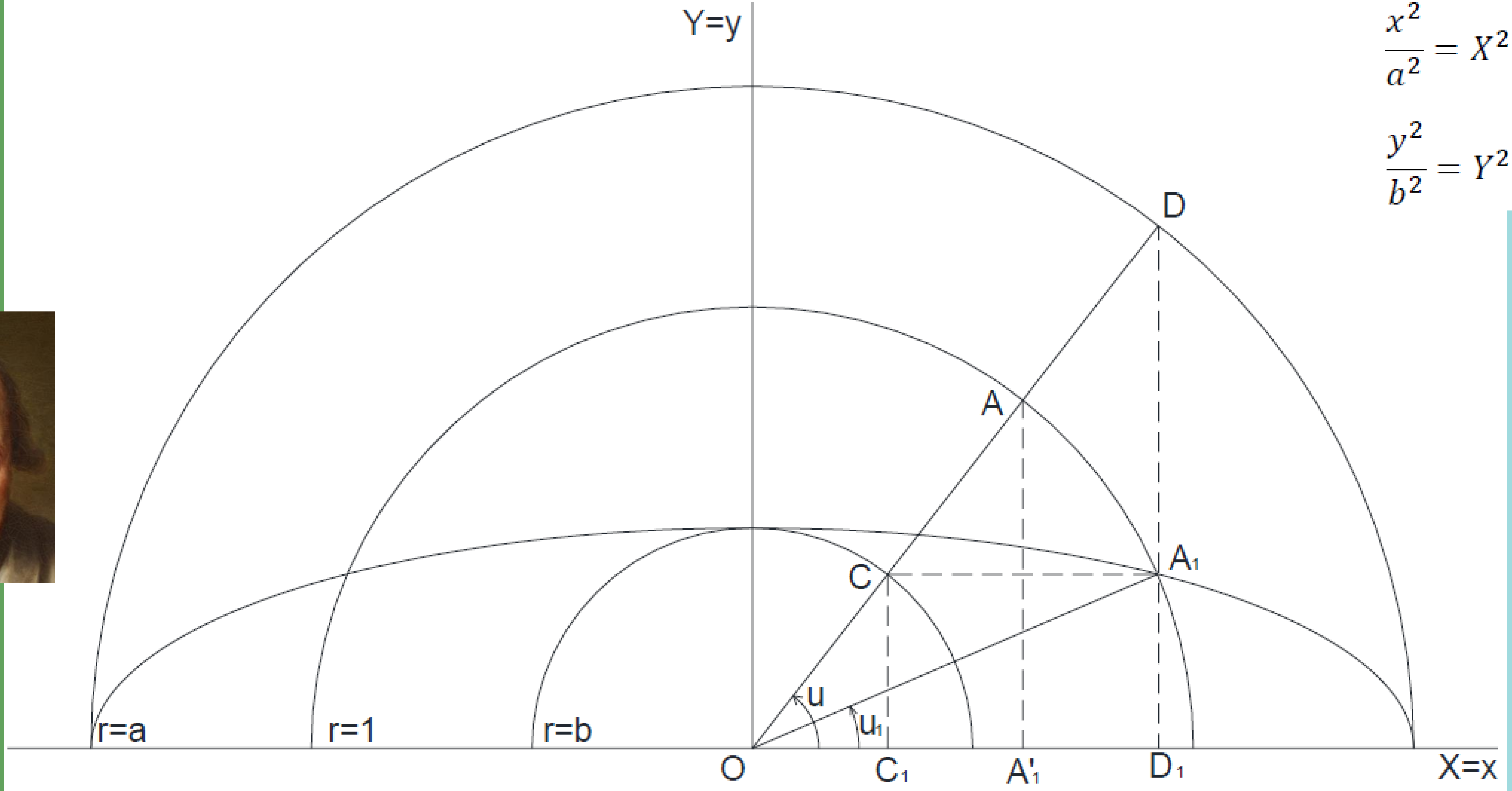
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

A (X,Y)

$A_1$ ($x$,$y$)




$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

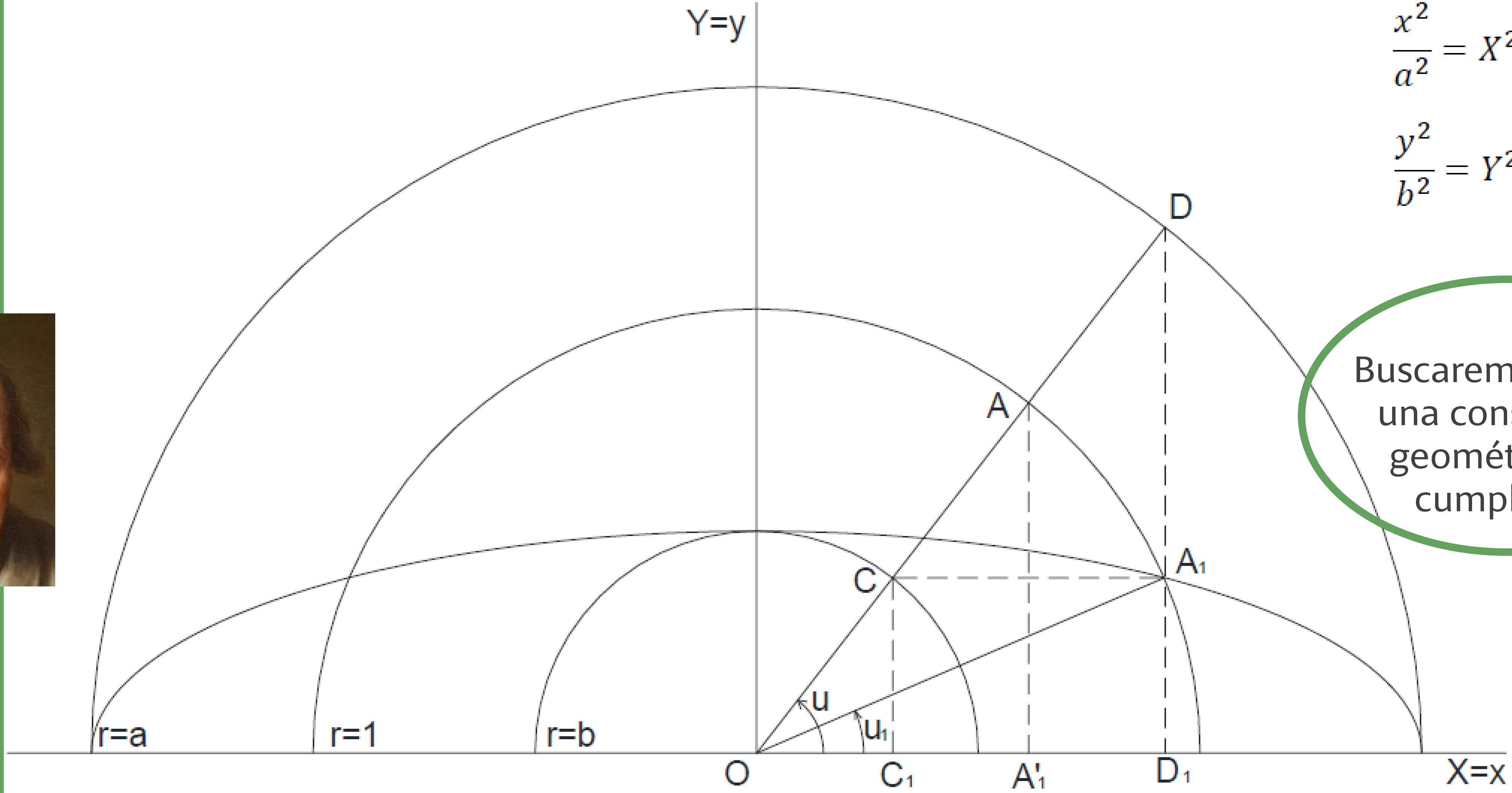
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

A (X,Y)

$A_1$ ($x$,$y$)




$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

Buscaremos realizar una construcción geométrica que cumpla esto.

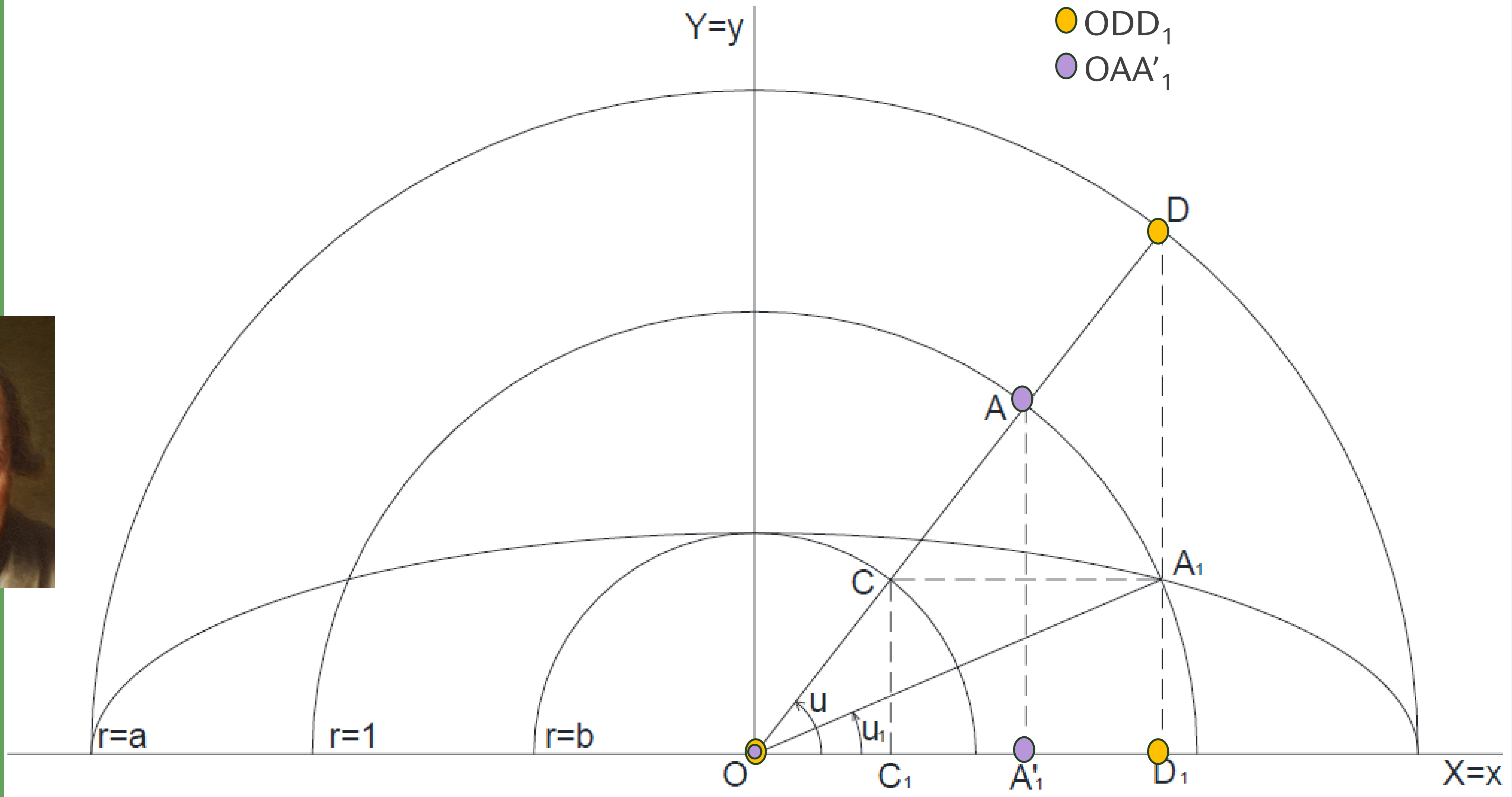
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$



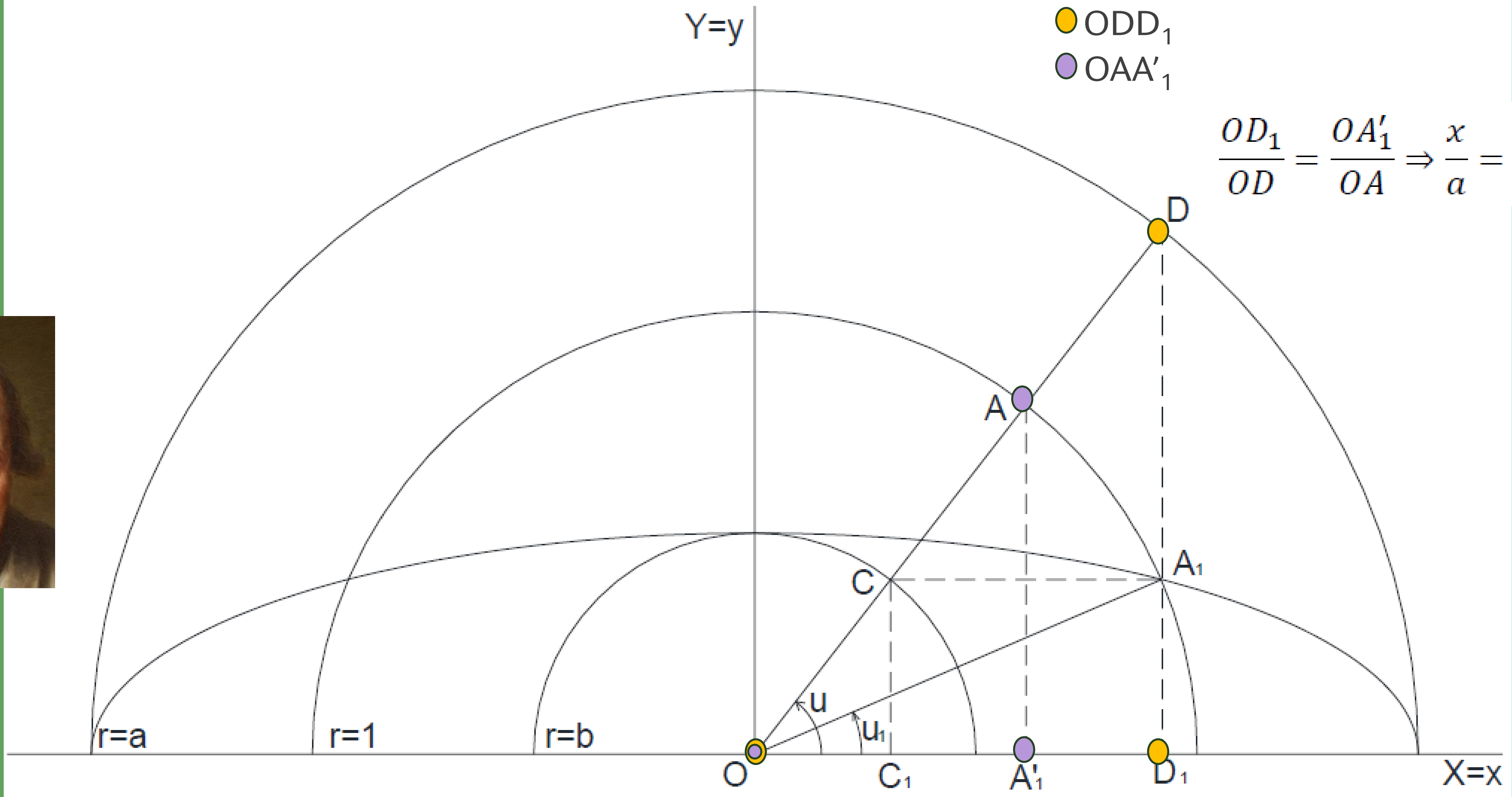
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$




$$\frac{OD_1}{OD} = \frac{OA'_1}{OA} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{X}{1} \Rightarrow x = aX$$

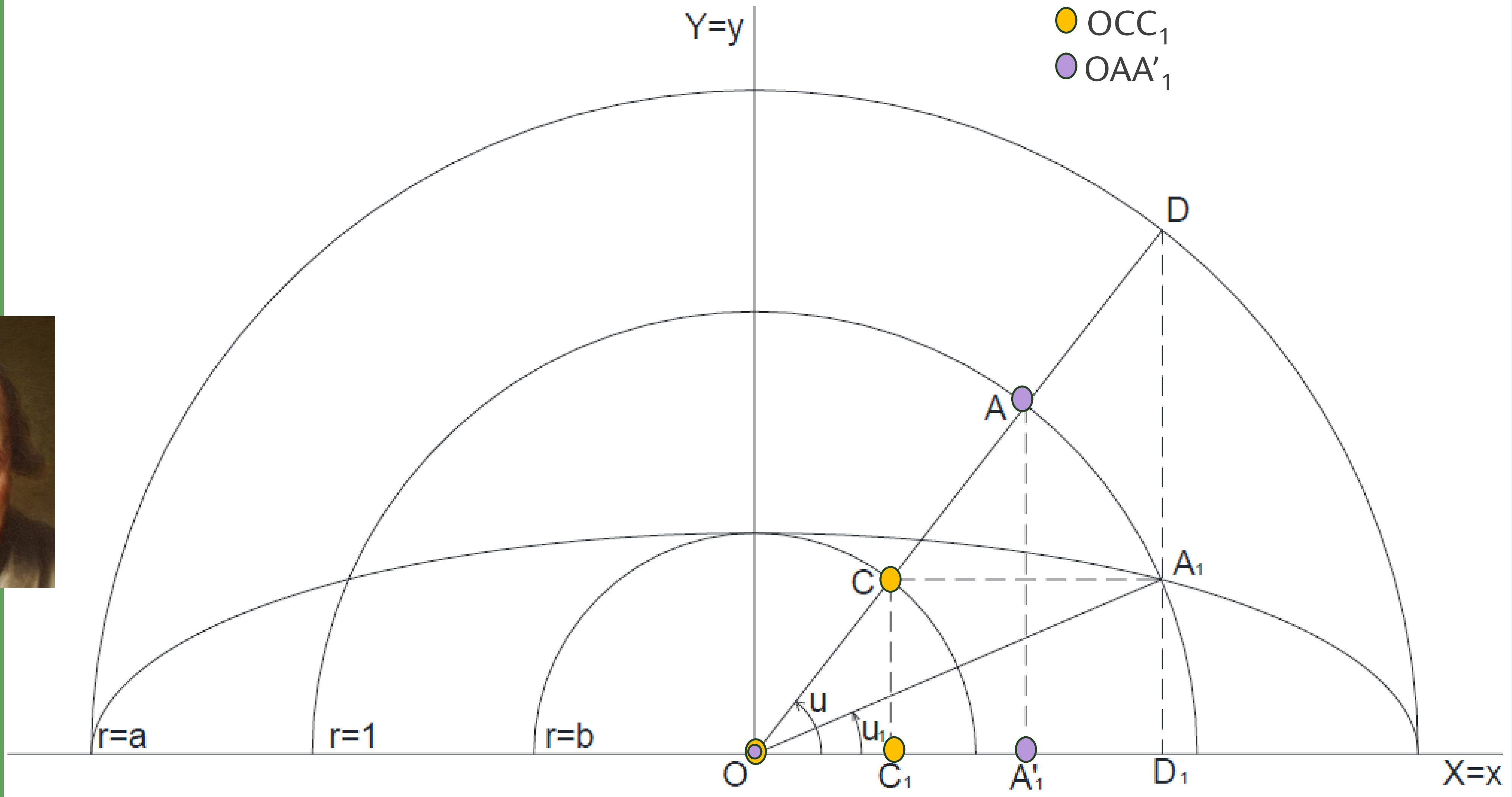
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

A (X,Y)

$A_1$ (*x*,*y*)



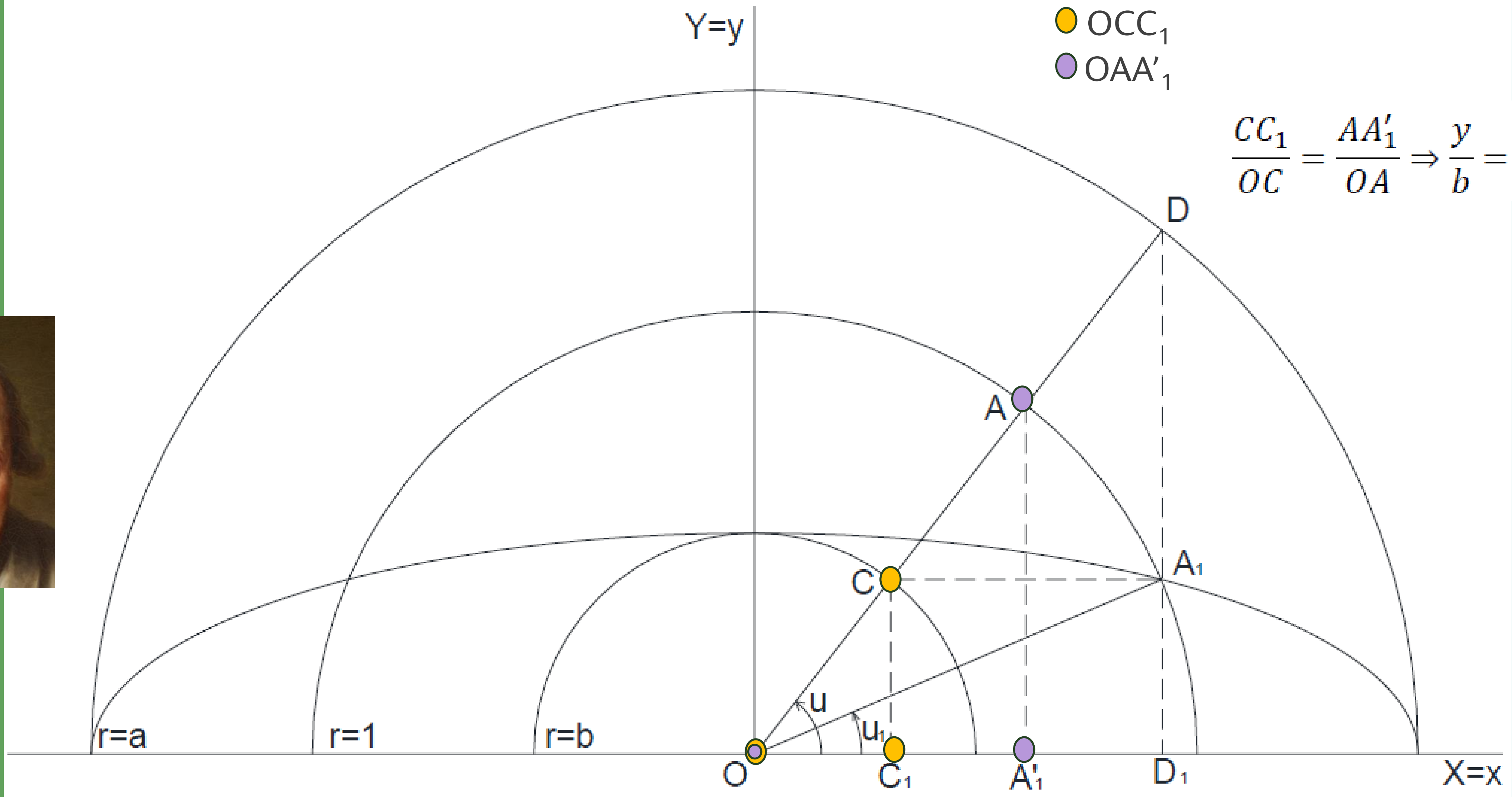
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

A (X,Y)

$A_1$ ($x$,$y$)




$$\frac{CC_1}{OC} = \frac{AA'_1}{OA} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{Y}{1} \Rightarrow y = bY$$

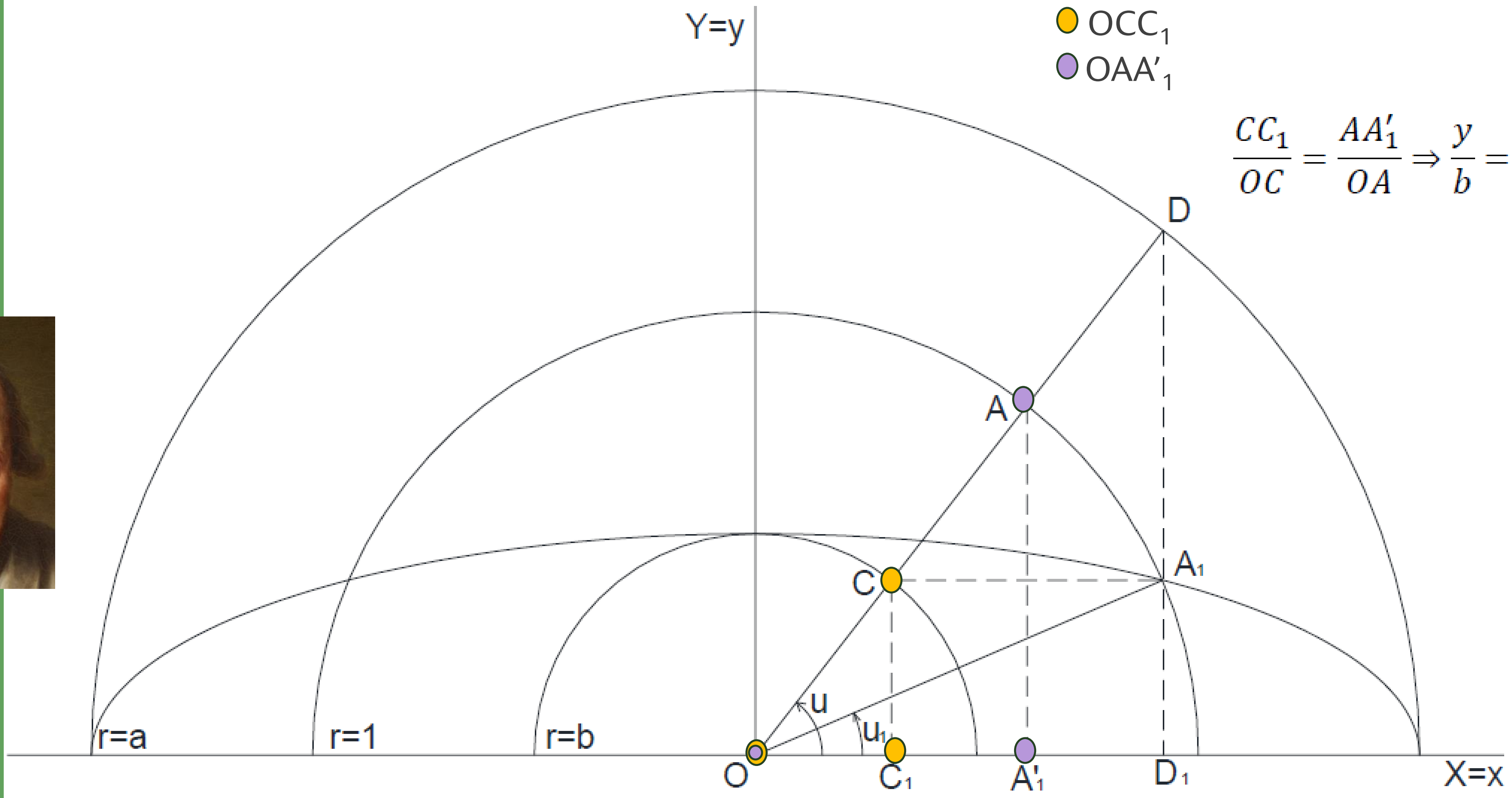
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

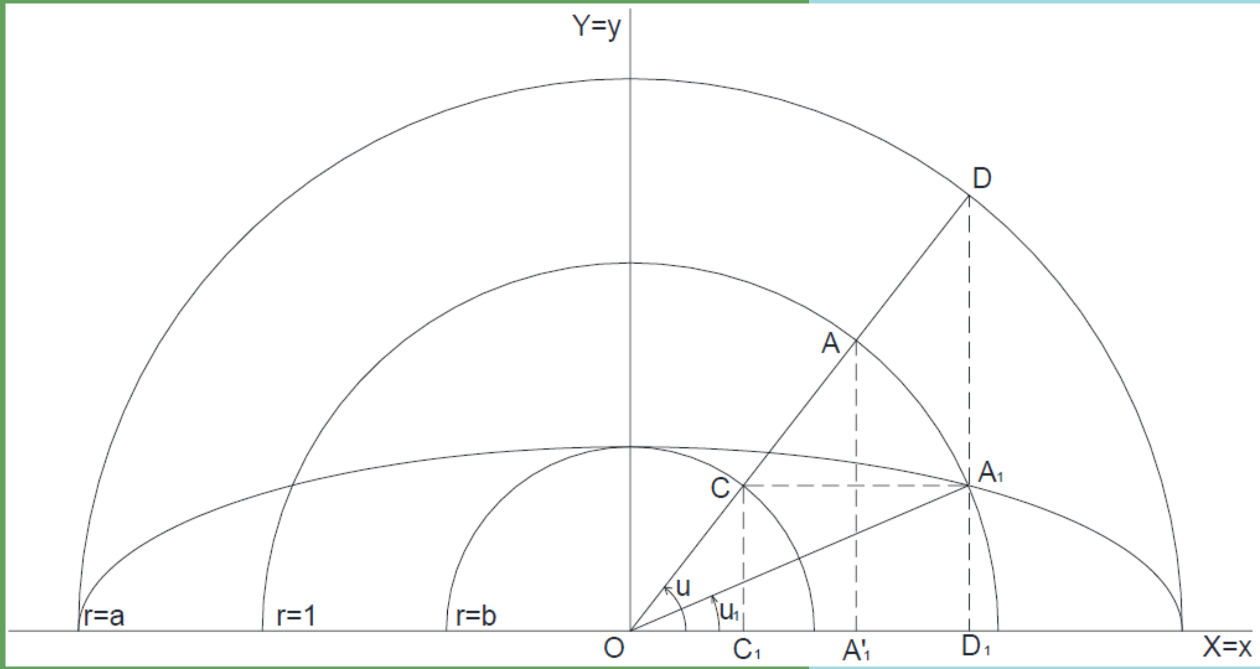
A (X,Y)

$A_1$ (*x*,*y*)




$$\frac{CC_1}{OC} = \frac{AA'_1}{OA} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{Y}{1} \Rightarrow y = bY$$

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

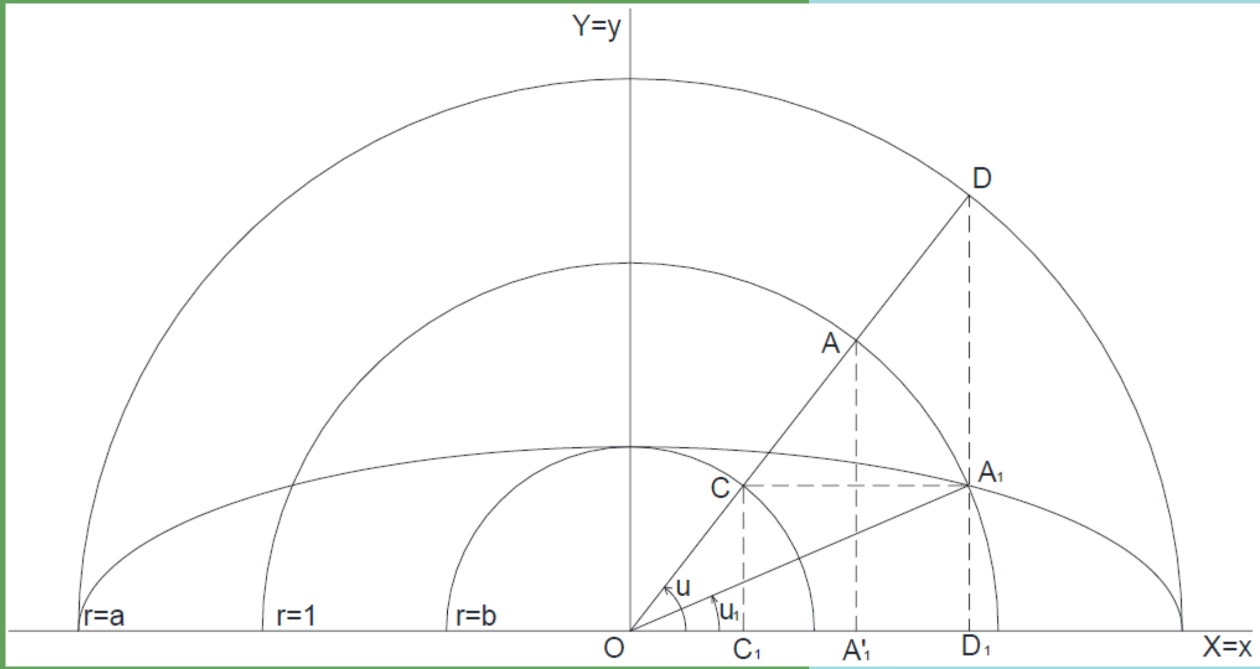



Comprobamos entonces que la construcción de esta figura cumple con:

$$x = aX$$

$$y = bY$$

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones




Comprobamos entonces que la construcción de esta figura cumple con:

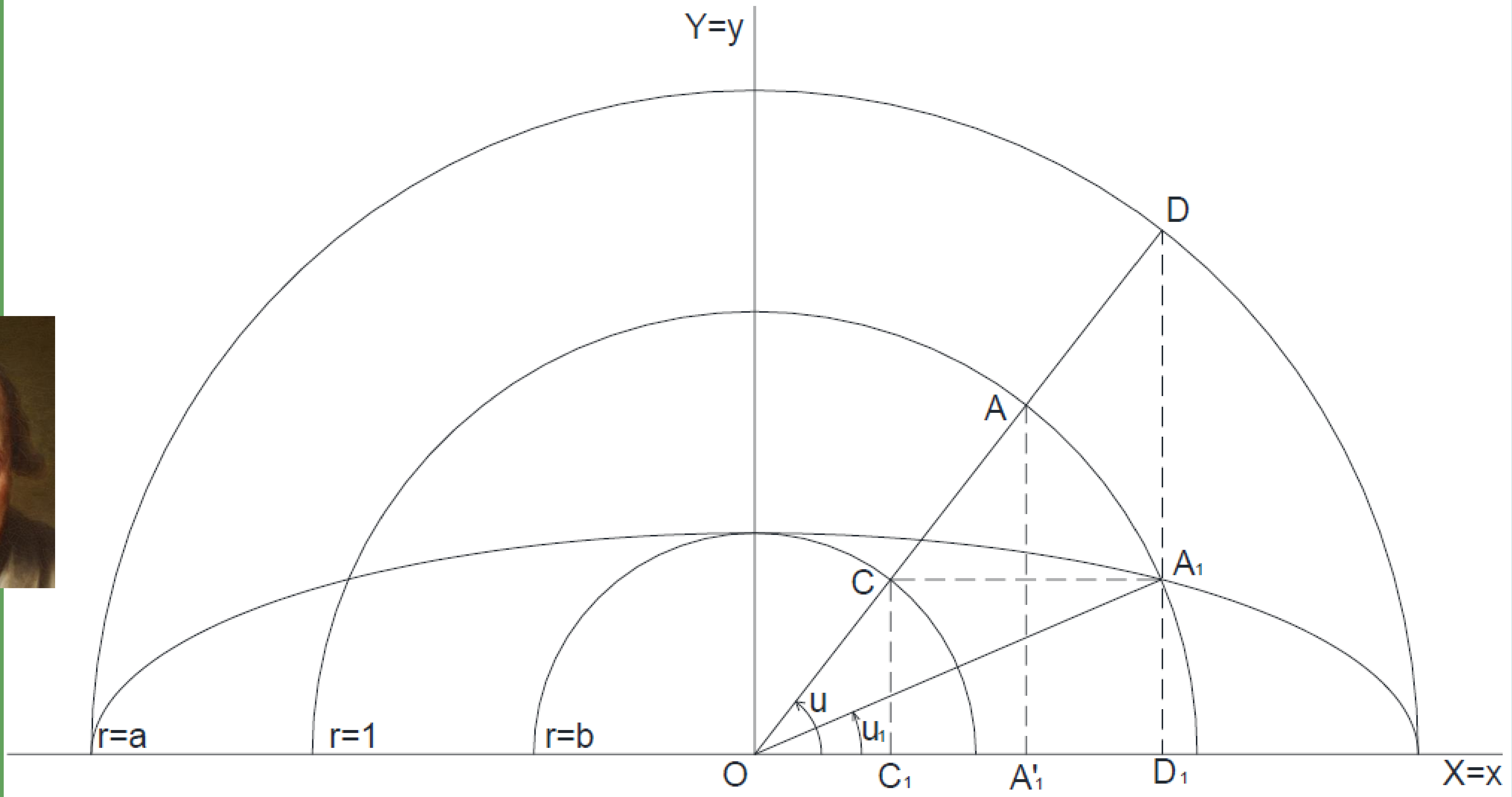
$$x = aX$$

$$y = bY$$

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

A (X,Y)

$A_1$ ($x$,$y$)

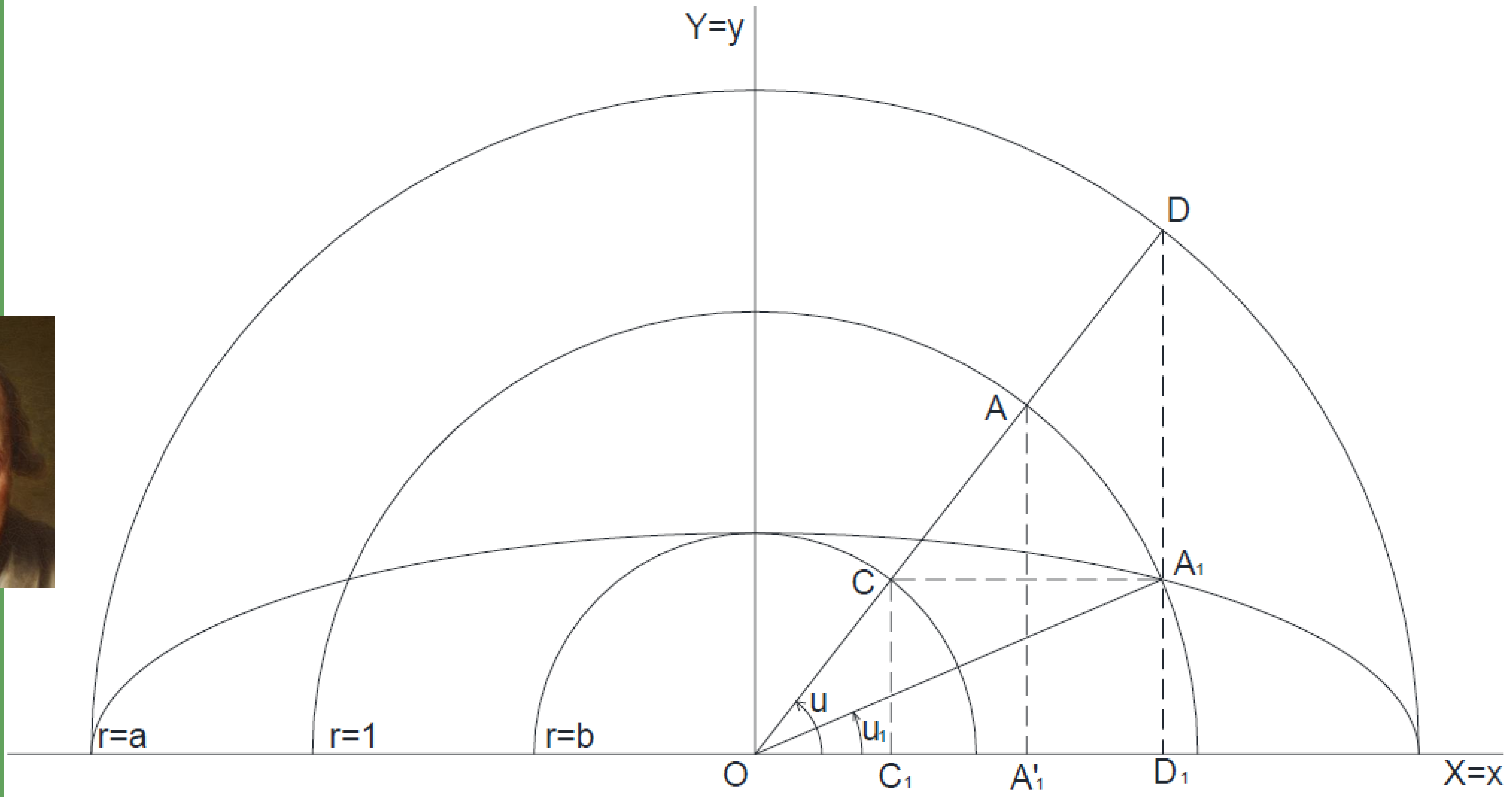


# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$

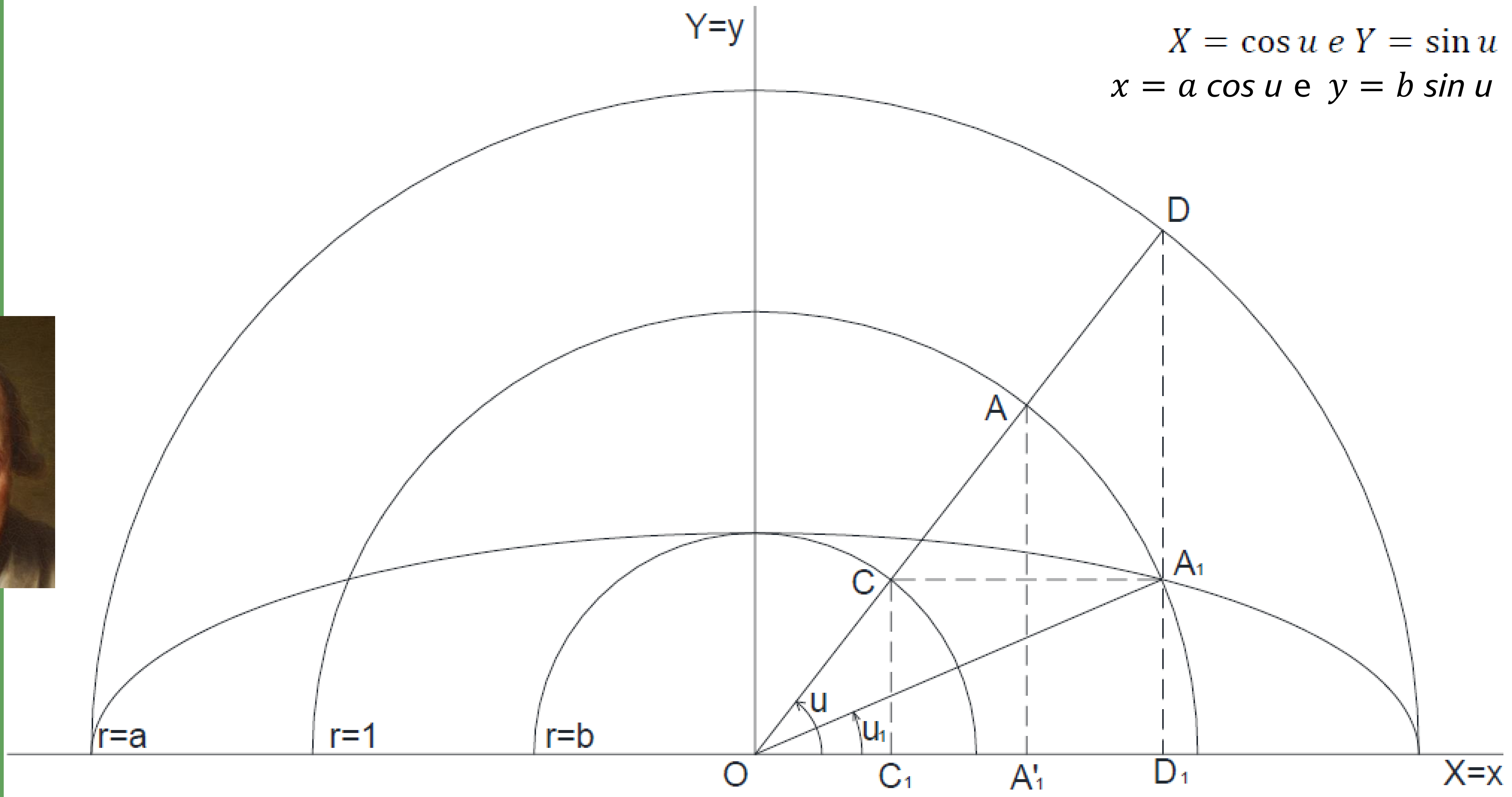


# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$

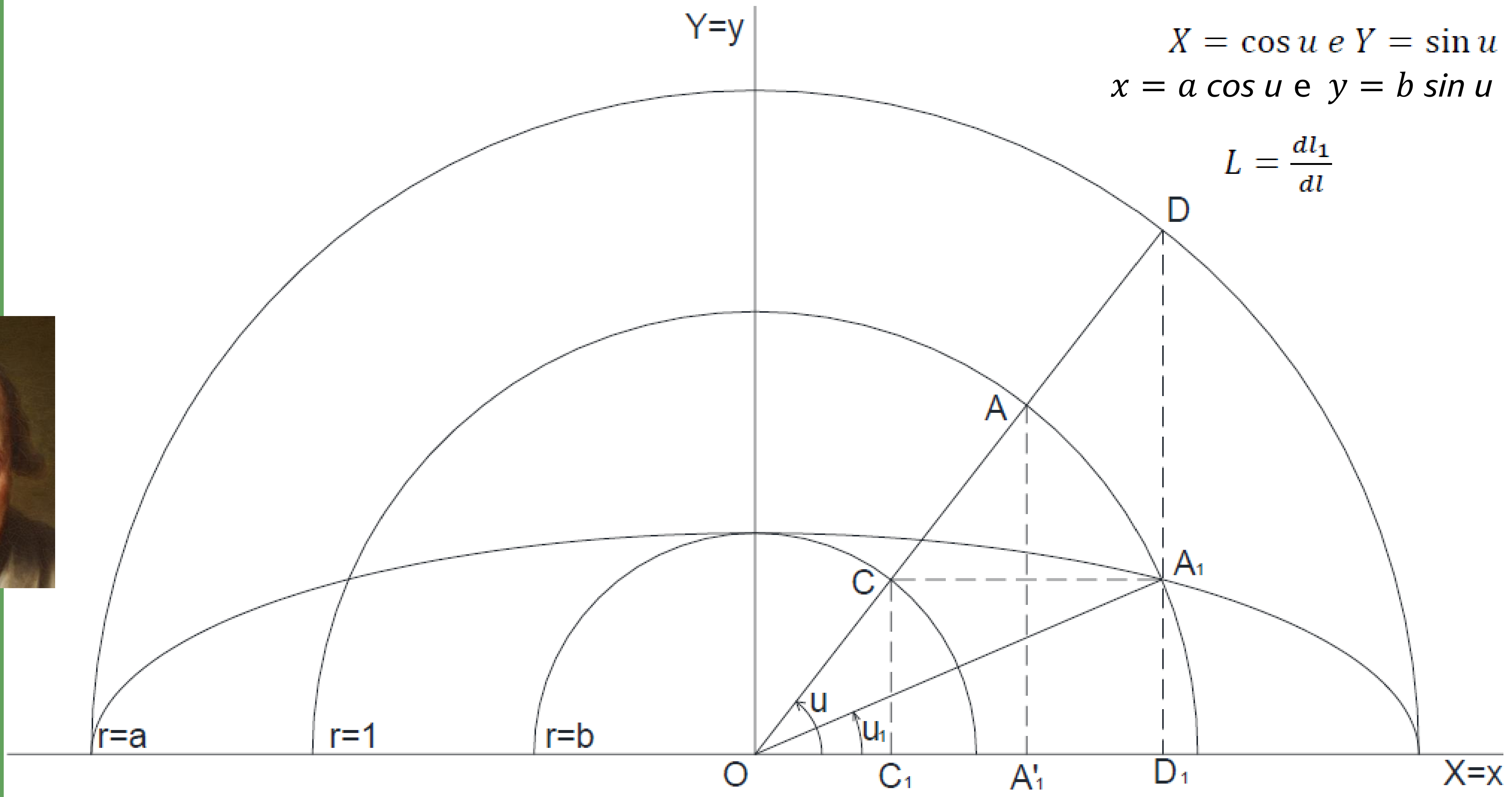


# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$



# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

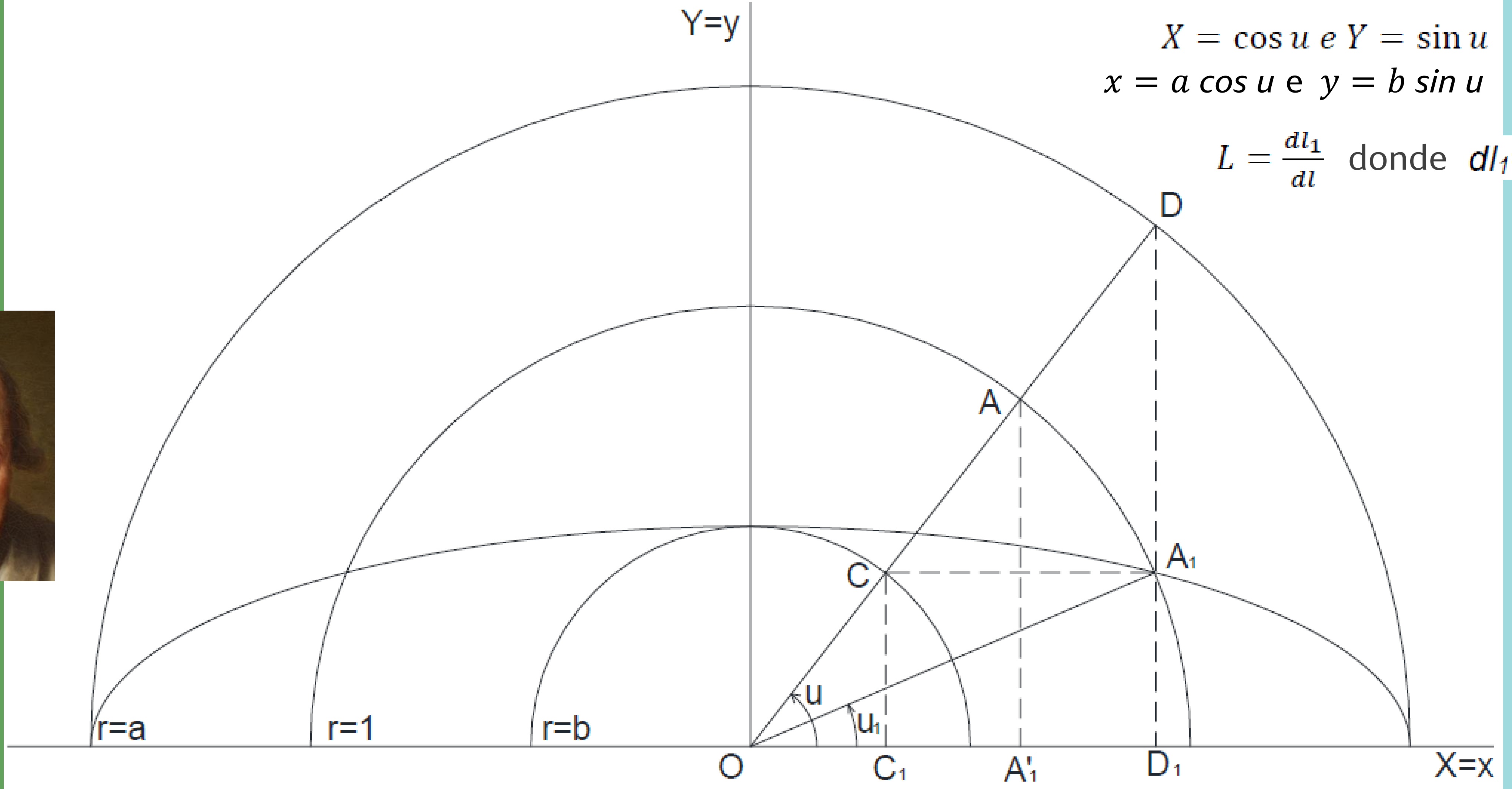
A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$

$X = \cos u$ e $Y = \sin u$

$x = a \cos u$ e $y = b \sin u$

$L = \frac{dl_1}{dl}$ donde $dl_1 = OA_1$

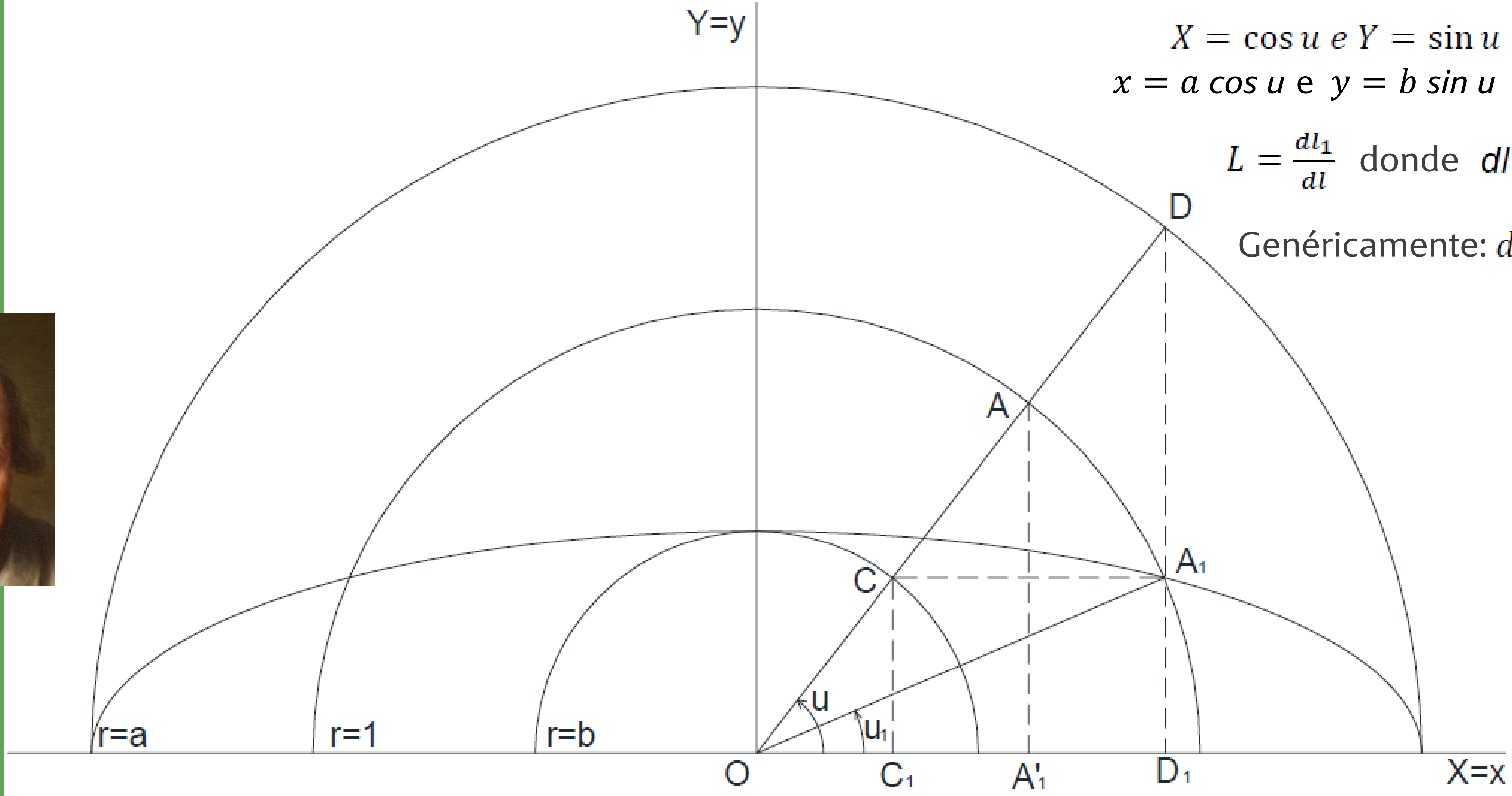


# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$




$X = \cos u \ e \ Y = \sin u$

$x = a \cos u$ e $y = b \sin u$

$L = \frac{dl_1}{dl}$ donde $dl_1 = OA_1$

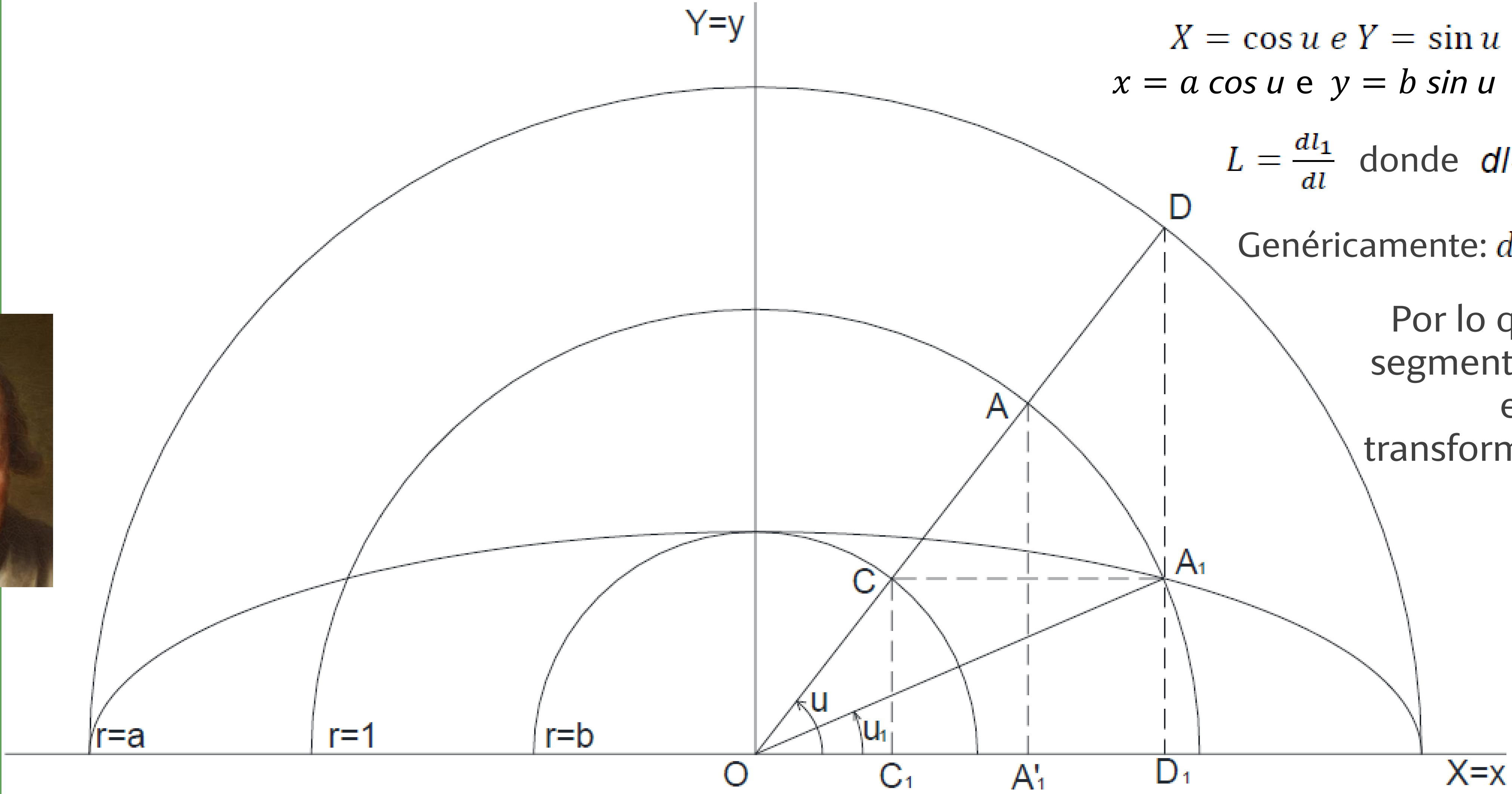
Genéricamente: $dl_1^2 = x^2 + y^2$

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$




$X = \cos u$ e $Y = \sin u$

$x = a \cos u$ e $y = b \sin u$

$L = \frac{dl_1}{dl}$ donde $dl_1 = OA_1$

Genéricamente: $dl_1^2 = x^2 + y^2$

Por lo que $dl_1$ es el segmento del plano en el que se transforma $dl$ =1 del elipsoide.

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

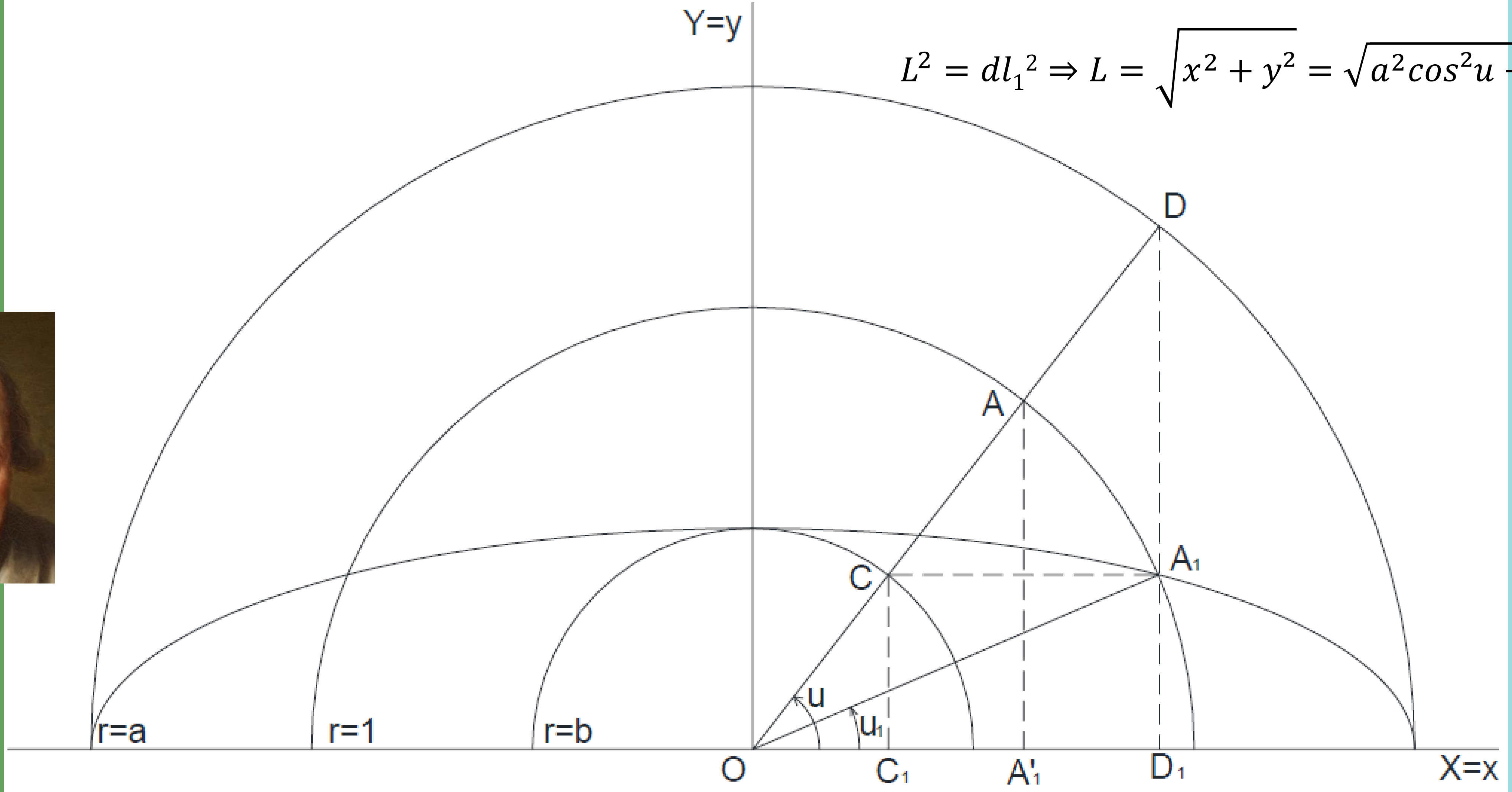
$$X = \cos u \; e \; Y = \sin u$$

$$x = a \cos u \text{ e } y = b \sin u$$

A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$

$$L^2 = dl_1{}^2 \Rightarrow L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 cos^2 u + b^2 sin^2 u}$$




# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración lineal

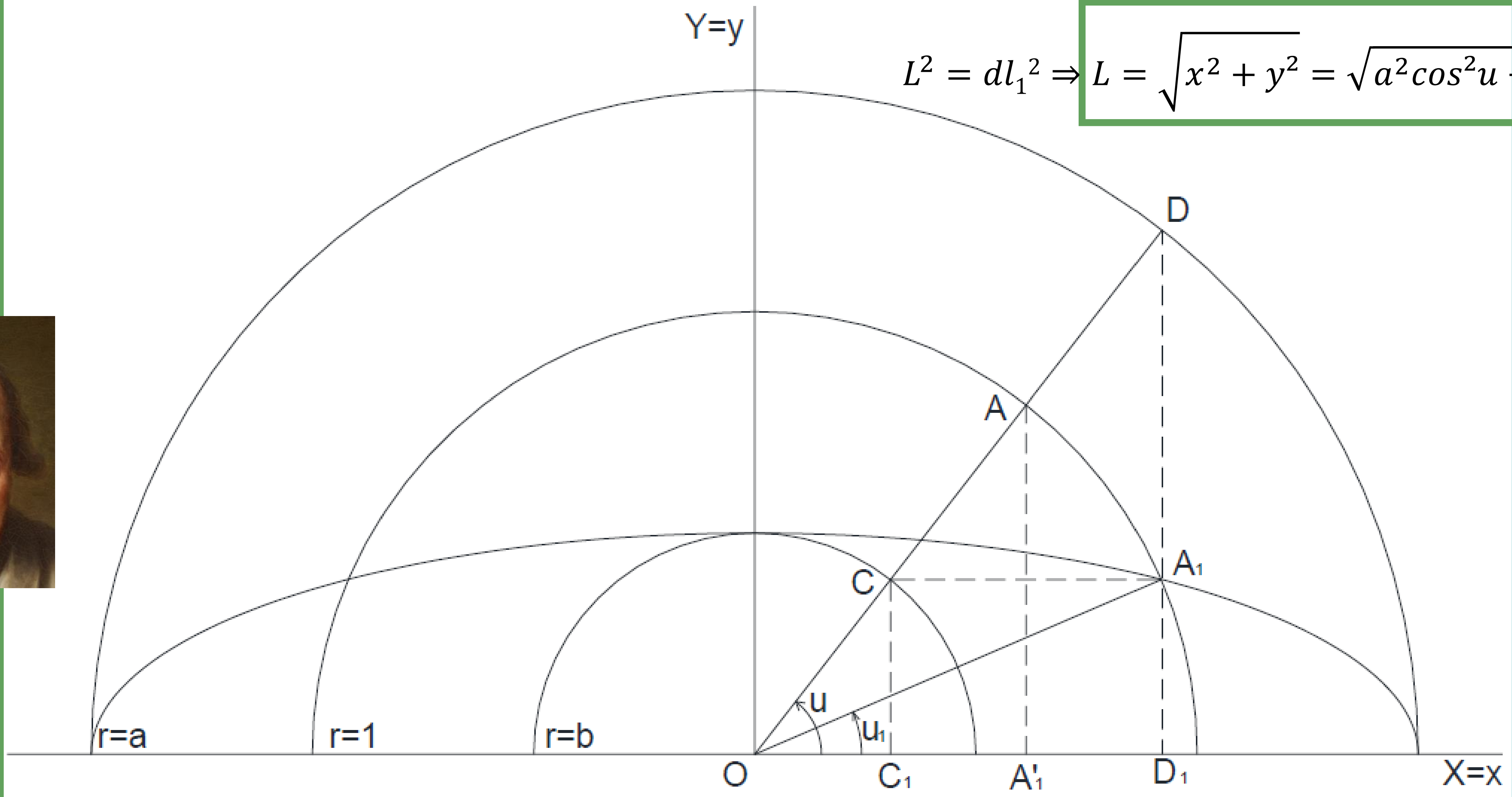
$X = \cos u \; e \; Y = \sin u$

$x = a\ cos\ u$ e $y = b\ sin\ u$

$$L^2 = dl_1{}^2 \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2cos^2u + b^2sin^2u}}$$

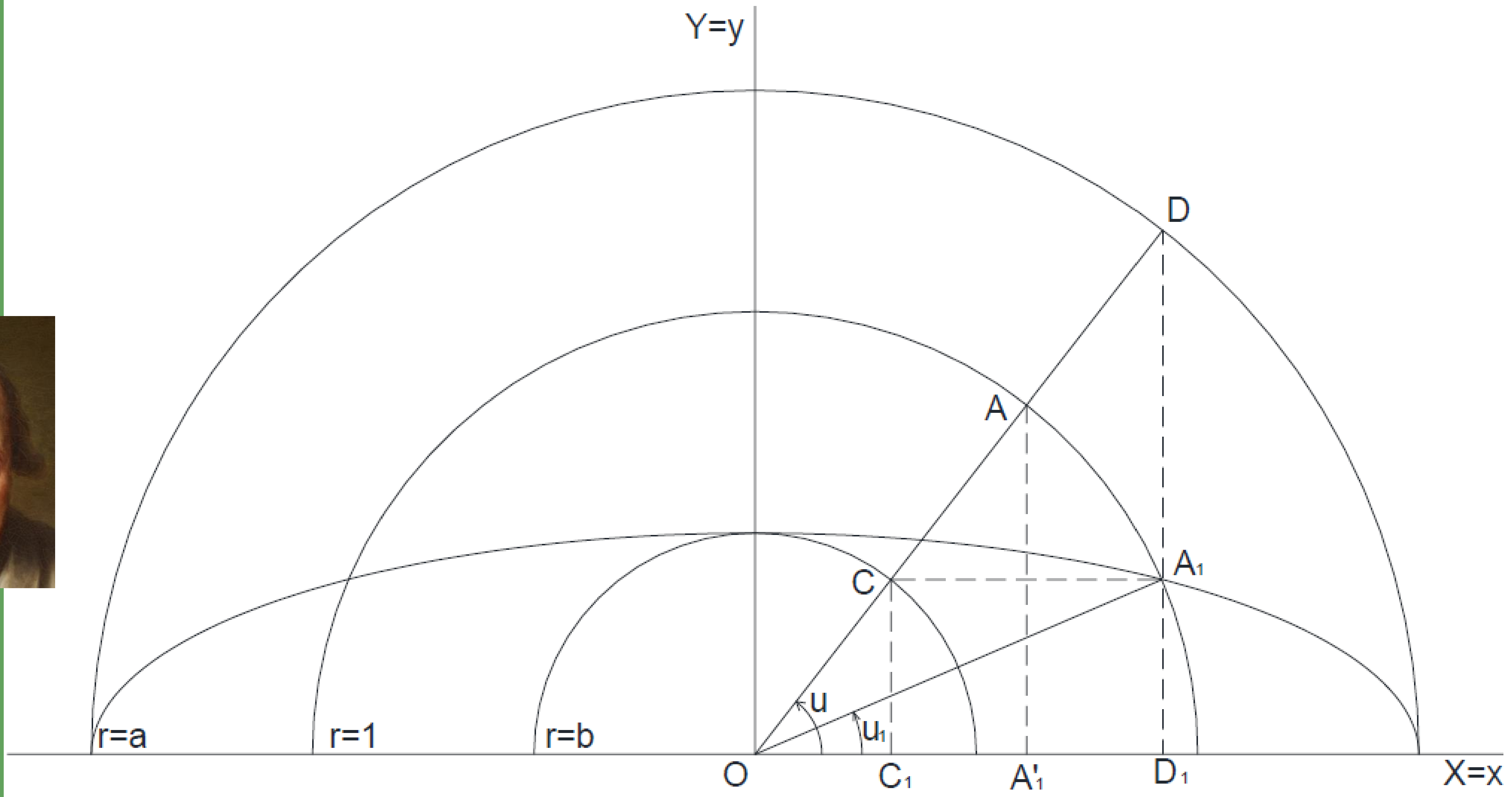
A (X,Y)

$A_1$ $(x,y)$



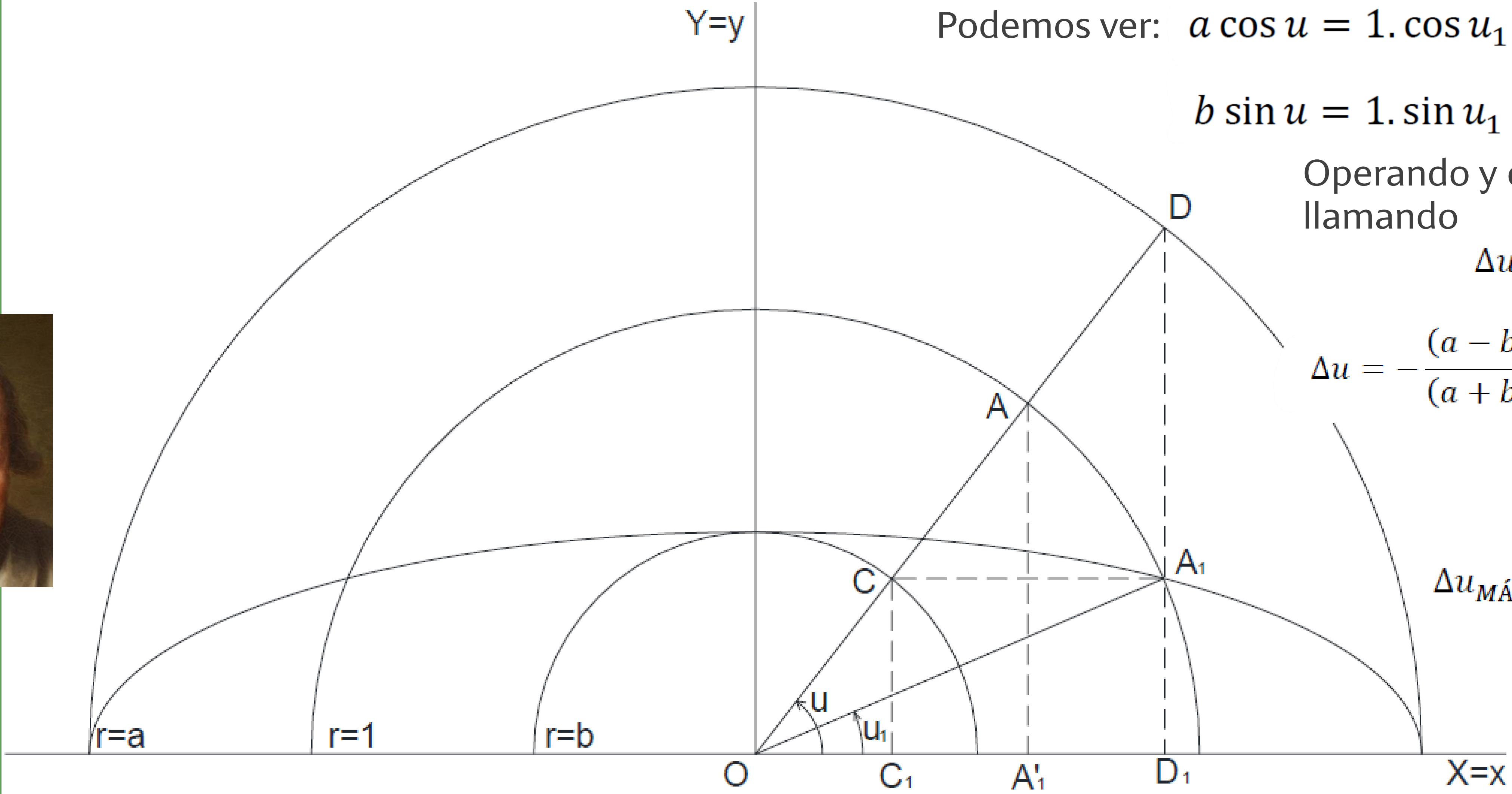
# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración angular



# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración angular




Podemos ver: $a \cos u = 1. \cos u_1$

$$b \sin u = 1. \sin u_1$$

Operando y operando, y llamando

$$\Delta u = u_1 - u$$

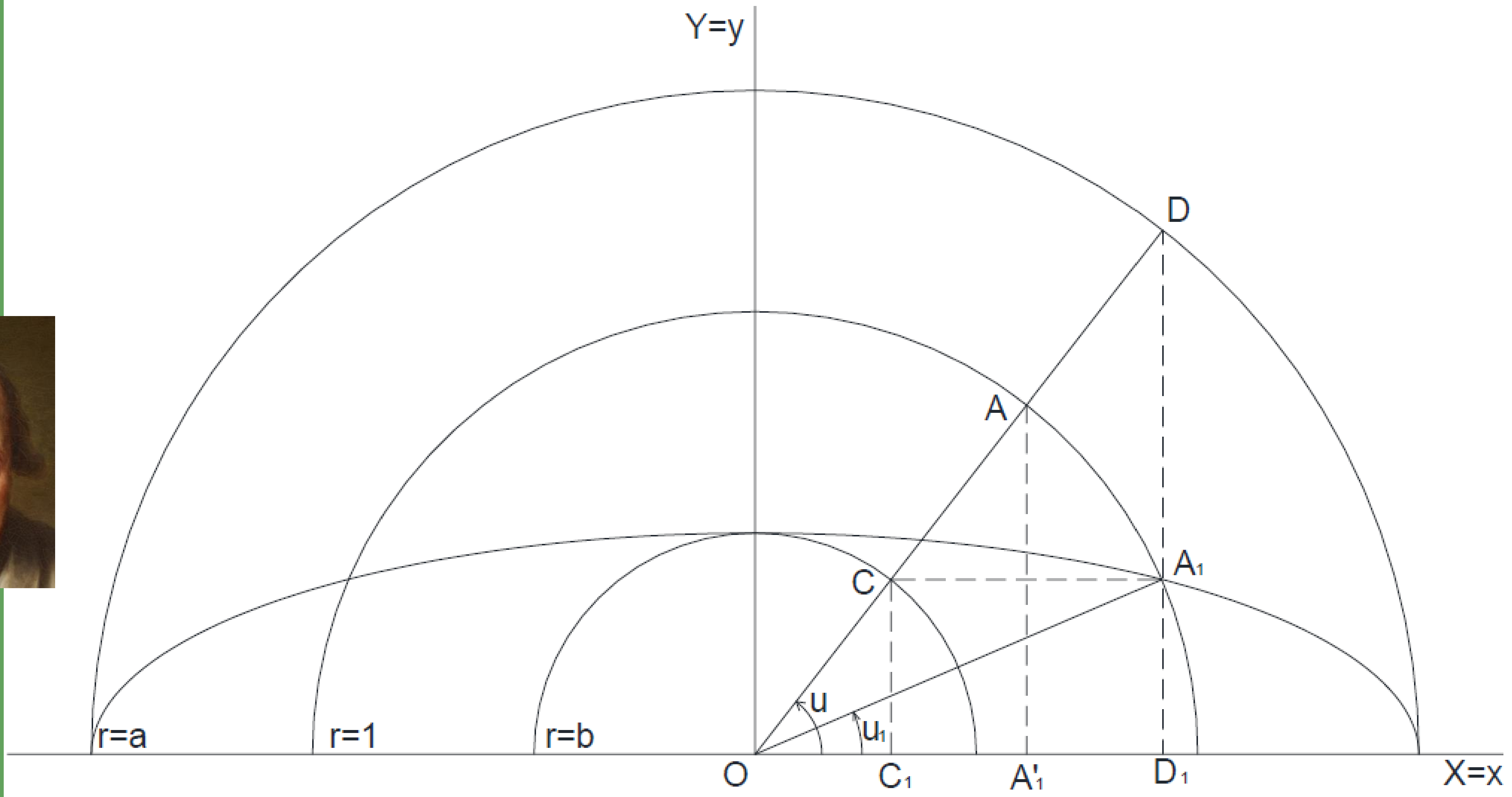
$$\Delta u = -\frac{(a-b)}{(a+b)} \sin(u_1 + u)$$

y

$$\Delta u_{MÁX} = -\frac{a-b}{a+b}$$

# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración superficial



# Aplicación de la elipse indicatriz de Tissot para el cálculo de alteraciones

## Alteración superficial

Como vimos antes:

$$S = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\text{área elipse}}{\text{área círculo}} = \frac{\pi ab}{\pi dl^2} = \frac{ab}{1^2} = ab$$

# Elipse indicatriz de Tissot

De esta forma calculamos:

Semieje mayor de la elipse: $a$

Semieje menor de la elipse: $b$

Módulo deformación lineal meridiano: $h$

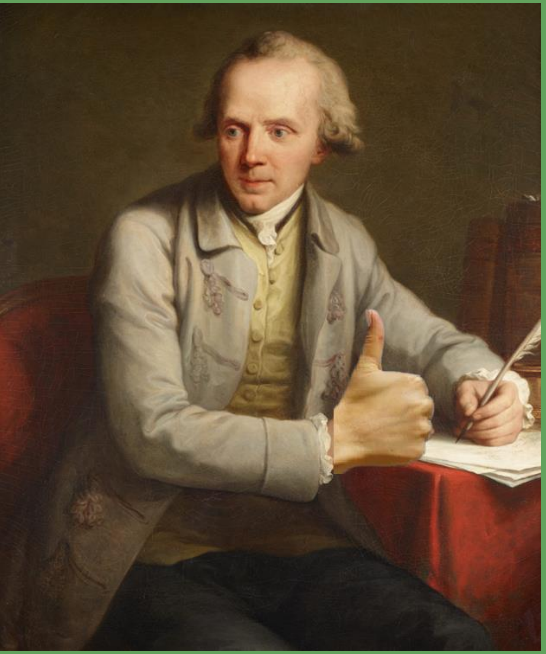
Módulo de deformación lineal paralelo: $k$

Alteración superficial: $S$

Alteración angular: $\Delta u$

Alteración lineal: $L$

# Elipse indicatriz de Tissot



De esta forma calculamos:

Semieje mayor de la elipse: $a$

Semieje menor de la elipse: $b$

Módulo deformación lineal meridiano: $h$

Módulo de deformación lineal paralelo: $k$

Alteración superficial: $S$

Alteración angular: $\Delta u$

Alteración lineal: $L$

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

Para que una proyección sea conforme, un círculo sobre el elipsoide deberá transformarse en otro círculo sobre el plano. Esto es lo mismo que decir que no exista diferencia en los ángulos homólogos.

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

Para que una proyección sea conforme, un círculo sobre el elipsoide deberá transformarse en otro círculo sobre el plano. Esto es lo mismo que decir que no exista diferencia en los ángulos homólogos.

$$\Delta u = -\frac{(a-b)}{(a+b)}\sin(u_1 + u)$$

Visto en esta ecuación, $\Delta u$ debe ser 0, que se cumple si $a = b$.

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

Para que una proyección sea conforme, un círculo sobre el elipsoide deberá transformarse en otro círculo sobre el plano. Esto es lo mismo que decir que <u>no</u> exista diferencia en los ángulos homólogos.

$$\Delta u = -\frac{(a-b)}{(a+b)}\sin(u_1 + u)$$

Visto en esta ecuación, *Δu* debe ser 0, que se cumple si *a* = *b*.

Aplicándolo a:

$$(a-b)^2 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2$$

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

Para que una proyección sea conforme, un círculo sobre el elipsoide deberá transformarse en otro círculo sobre el plano. Esto es lo mismo que decir que no exista diferencia en los ángulos homólogos.

$$\Delta u = -\frac{(a-b)}{(a+b)}\sin(u_1 + u)$$

Visto en esta ecuación, $\Delta u$ debe ser 0, que se cumple si $a = b$.

Aplicándolo a:

$$(a-b)^2 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2$$

Llegamos a:

$$0 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2$$

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

$$0 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2$$

Debe cumplirse que $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 = 0$

y que $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2 = 0$

# Condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*

$$0 = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2$$

Debe cumplirse que $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]^2 = 0$

y que $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right]^2 = 0$

Así es que, para darse las condiciones de conformidad de *Cauchy-Riemann*, se debe cumplir simultáneamente:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \end{cases}$$