Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 4: Combinatoria III

Principio de Inclusión-Exclusión, funciones sobreyectivas, desórdenes y números de Stirling.

Ejercicio 1.

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 2. Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 3. ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 5. Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

Ejercicio 6. Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 7. ¿ De cuántas formas se puede factorizar el número $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ como producto de 2 factores positivos mayores que 1? ¿ Y como producto de 3 factores positivos mayores que 1? En ambos casos el orden de los factores no importa.

Ejercicio 8. Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros y gatos en el mismo escondite?

Ejercicio 9. Probar las siguientes recurrencias para el número de funciones sobreyectivas y los números de Stiling de segundo tipo, respectivamente.

(a) **Funciones Sobreyectivas:** $Sob(m+1,n) = n \cdot (Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(b) **Números de Stirling de segundo tipo:** $S(m+1,n) = S(m,n-1) + n \cdot S(m,n)$.

Ejercicio 10. Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

(b) $Sob(m,n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m-i,n-1)$.

(c) $n! = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d_i$, donde $d_0 = 1$ y d_i es el número de desórdenes de tamaño i.

Aclaraciones:

- En el ejercicio 7 el orden de los factores no importa. Por ejemplo $2310 = 10 \cdot 231$ y $2310 = 231 \cdot 10$ se consideran como la misma factorización. Sugerencia: considere el Teorema Fundamental de la Aritmética: todo entero positivo $n > 1$ se escribe de forma única (a menos del orden de los factores) como producto de números primos.
- En el ejercicio 8, los perros se consideran distinguibles entre sí y también los gatos se consideran distinguibles entre sí. Por el contrario, los escondites se consideran como indistinguibles (o sea, lo único relevante es como los animales se agrupan entre ellos).