

ENTREGA 1

DCP 2024

Un campo experimental está comprobando el rendimiento de una especie nueva de trébol. La cantidad de biomasa que puede rendir el campo puede expresarse a través de un modelo poblacional sencillo, que indica que el crecimiento de la población es proporcional al número de individuos, pero está limitado por los recursos disponibles, que son finitos:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \left(1 - \frac{P}{P_m}\right)$$

Donde α es la tasa neta de crecimiento de las plantas y P_m la cantidad máxima de plantas posible en el territorio ocupado por esa población. A su vez, $\alpha = \alpha_n - \alpha_d$ donde α_n es la tasa de crecimiento y α_d la de muerte de las plantas.

La tasa de crecimiento depende del estado nutricional del suelo que se cuantificará con un factor γ que puede variar entre 0 y 1. Se sabe que $\alpha_n = 0.16e^{-\gamma}$, en d^{-1} .

La tasa de muerte (en d^{-1}) es función de la presencia de un parásito Q según la expresión

$$\alpha_d = 0.01 + 0.2 \frac{Q}{Q_m}$$

Siendo Q la cantidad de parásitos y Q_m la cantidad máxima de parásitos por metro cuadrado. A su vez el parásito también sigue una dinámica poblacional

$$\frac{dQ}{dt} = \beta Q \left(1 - \frac{Q}{Q_m}\right)$$

Siendo la tasa de crecimiento neta $\beta = \beta_n - \beta_d$; la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad de trébol $\beta_n = \beta_0 \frac{P}{P_m}$, con $\beta_0 = 0.09 d^{-1}$; y la tasa de decaimiento (en d^{-1}) depende de la concentración de un insecticida I (en unidades por metro cuadrado) de la siguiente manera: $\beta_d = 0.026 + 0.015 \frac{I}{Q_m}$

Más allá de su acción insecticida este producto deteriora la calidad del suelo afectando al parámetro γ de la siguiente manera: $\gamma = 1 - I/228$. La actividad del insecticida decae en el tiempo según $I = I_0 \exp(-0.00008 t)$

Estudios preliminares han determinado que $P_m = 500$ plantas por metro cuadrado y $Q_m = 230$ parásitos por metro cuadrado.

- i) Indique cuáles considera variables de estado, variables de entrada, variables de salida y parámetros
- ii) Sobre un horizonte de 6 años grafique como será la evolución de P y Q en el tiempo si se parte de 50 plantas y 1 parásito por metro cuadrado, sin aplicar insecticida.
- iii) Realice el diagrama de fase.
- iv) Repita la parte ii) con una dosis de insecticida de 180 unidades por metro cuadrado.

Como alternativa al uso de insecticida se ha propuesto irradiar el terreno, con lo cual se genera una mutación en el insecto que reduce a la tercera parte la tasa de crecimiento β_0 . Verifique los resultados graficando nuevamente las variables.