Cartografía Matemática

1480

TCI13

Roberto Pérez Rodino - rodino@fing.edu.uy

Esteban Striewe - estriewe@fing.edu.uy

Año 2024

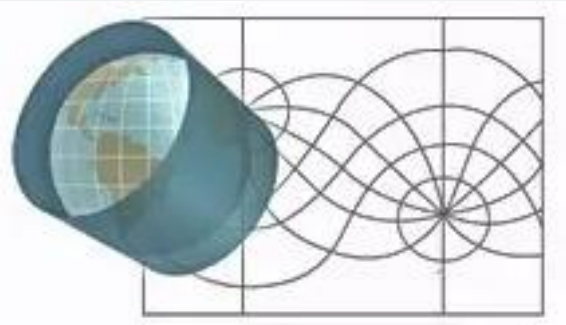
Proyecciones cartográficas - clasificación

Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

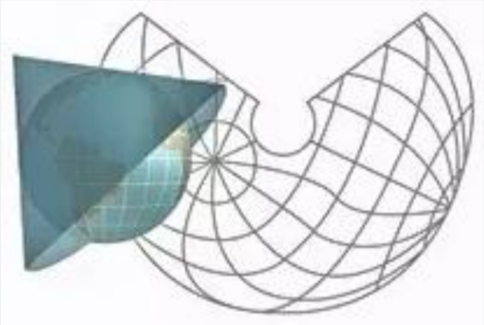
Enunciaremos 5 de ellos.

1- Según la naturaleza de la superficie subjetiva

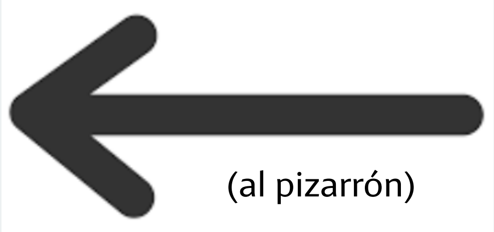
Proyecciones planas



Proyecciones cilíndricas



Proyecciones cónicas



Proyecciones poliédricas

Proyecciones cartográficas - clasificación

Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

Enunciaremos 5 de ellos.

2- Según la <u>naturaleza de la Ley de la proyección</u>

- proyecciones geométricas o propiamente proyecciones (si existe una construcción geométrica o proyectividad que vincula los puntos homólogos)

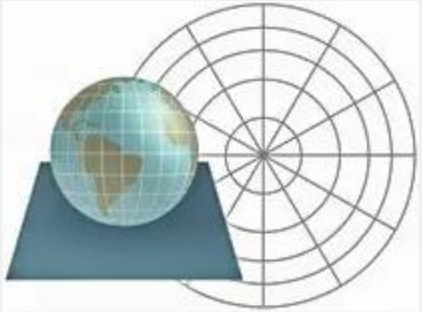
- proyecciones analíticas (si la Ley de la proyección sólo tiene expresión analítica y no geométrica)

Proyecciones cartográficas - clasificación

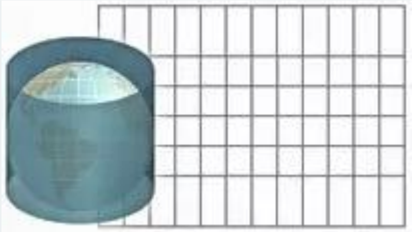
Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

Enunciaremos 5 de ellos.

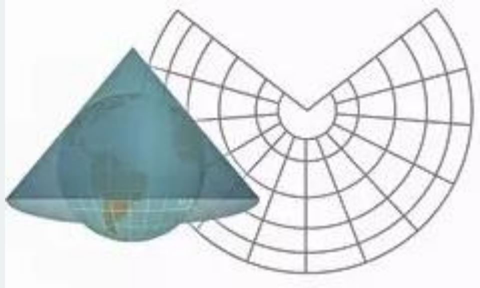
3- Según la <u>posición de la superficie subjetiva</u> respecto de la objetiva



Polar



Directa



Directa

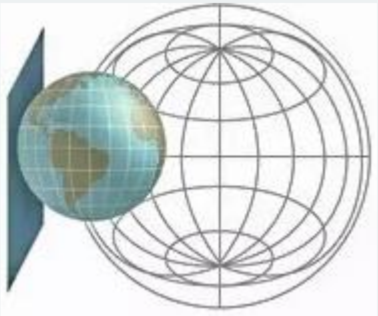
Polares en el caso de las planas, o directas en el caso de las cilíndricas y de las cónicas (cuando el plano es tangente en el polo, o el eje del cilindro o del cono coincide con el eje polar terrestre, respectivamente)

Proyecciones cartográficas - clasificación

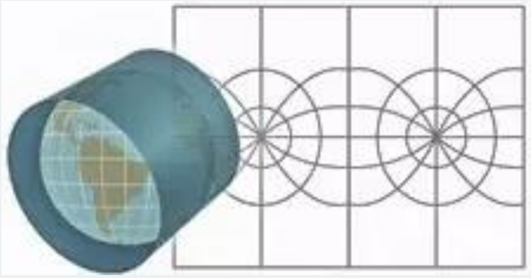
Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

Enunciaremos 5 de ellos.

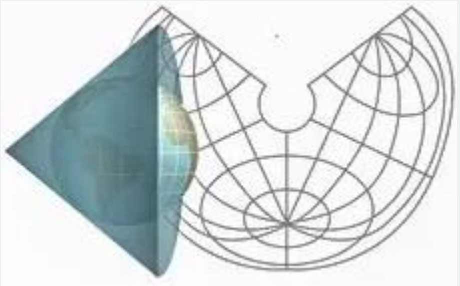
3- Según la <u>posición de la superficie subjetiva</u> respecto de la objetiva



Ecuatorial



Transversa



Transversa

Ecuatoriales en el caso de las planas, o transversas en el caso de las cónicas o cilíndricas (cuando el plano es tangente en el ecuador, o el eje del cilindro o del cono pertenece al plano del ecuador, respectivamente)

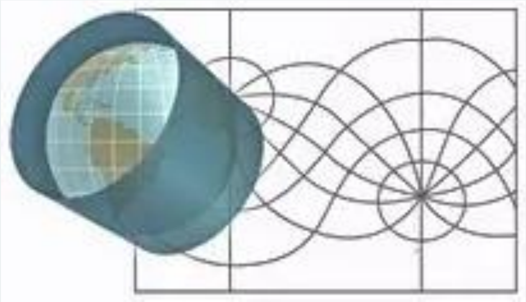
Proyecciones cartográficas - clasificación

Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

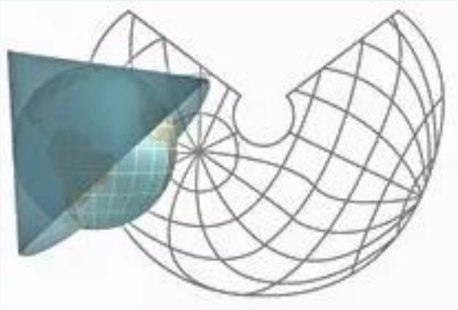
Enunciaremos 5 de ellos.

3- Según la posición de la superficie subjetiva respecto de la objetiva

Acimutal



Oblicua



Oblicua

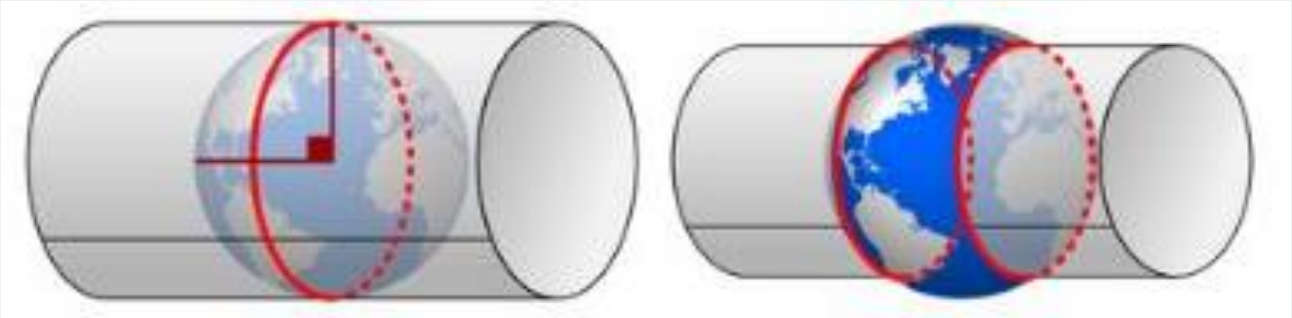
Acimutales u oblicuas (cuando el plano es tangente a la superficie objetiva en un punto de latitud intermedia, o el eje del cilindro o del cono forma un ángulo de latitud intermedia, respectivamente)

Proyecciones cartográficas - clasificación

Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

Enunciaremos 5 de ellos.

4- Según se <u>intersecten o no las superficies subjetiva y objetiva</u>



Externa

Tangente

Secante

Proyecciones cartográficas - clasificación

Hay diversos criterios para clasificar a las proyecciones.

Enunciaremos 5 de ellos.

5- Según la naturaleza de la <u>característica geométrica que se conserva</u>

- equidistantes o automecoicas (cuando conservan las distancias)

- conformes (cuando conservan los ángulos)

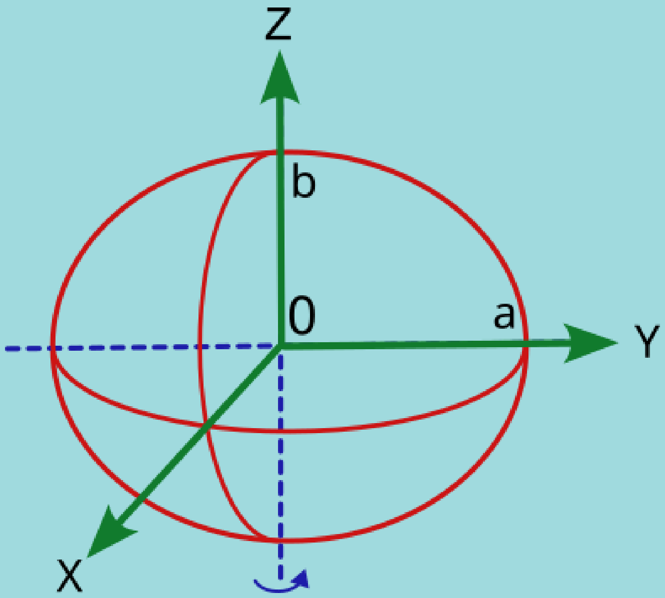
- equivalentes (cuando conservan las áreas)

- afilácticas (cuando no conservan ninguna de las características)

Elementos diferenciales

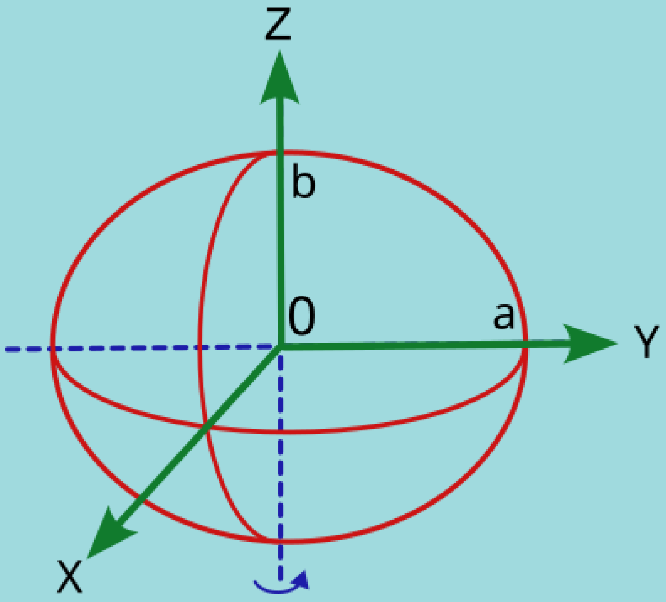
Elementos diferenciales

Vimos que se adopta el elipsoide de revolución como modelo matemático para la representación de la Tierra.

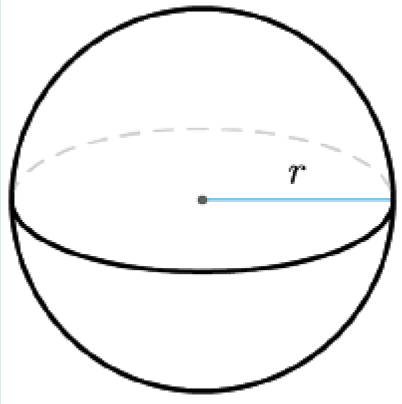


Elementos diferenciales

Vimos que se adopta el elipsoide de revolución como modelo matemático para la representación de la Tierra.



En algunos casos y dependiendo qué proyección cartográfica se utilice, se puede simplificar aún más el modelo de la Tierra, considerando una esfera.



Donde r = a = b

Elementos diferenciales

Para lograr establecer la representación cartográfica que vincula los puntos de la Tierra (superficie objetiva) y los puntos homólogos en el plano (superficie subjetiva), estos deben identificarse de manera unívoca.

Elementos diferenciales

Para lograr establecer la representación cartográfica que vincula los puntos de la Tierra (superficie objetiva) y los puntos homólogos en el plano (superficie subjetiva), estos deben identificarse de manera unívoca.

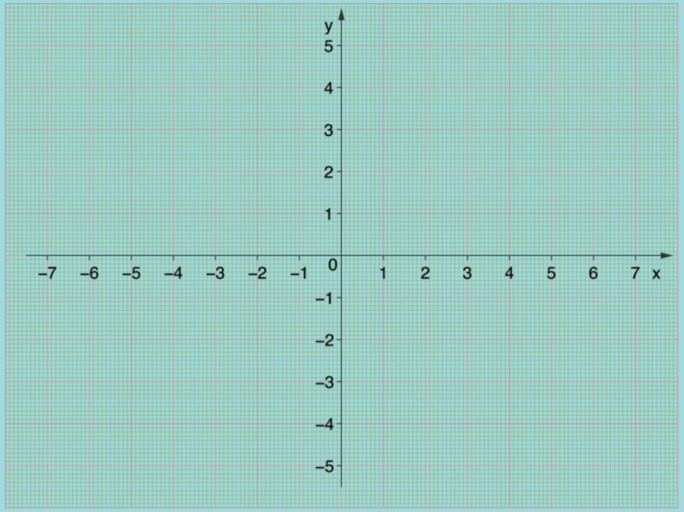
Esta identificación se realiza mediante el uso de coordenadas.

Elementos diferenciales

Para lograr establecer la representación cartográfica que vincula los puntos de la Tierra (superficie objetiva) y los puntos homólogos en el plano (superficie subjetiva), estos deben identificarse de manera unívoca.

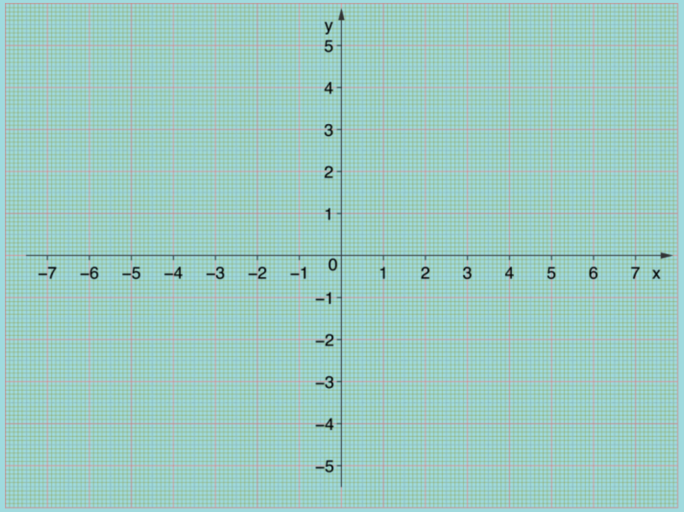
Esta identificación se realiza mediante el uso de coordenadas.

En el plano se utilizan las coordenadas cartesianas x , y o E , N y en el elipsoide o la esfera las coordenadas geodésicas latitud y longitud φ y λ .



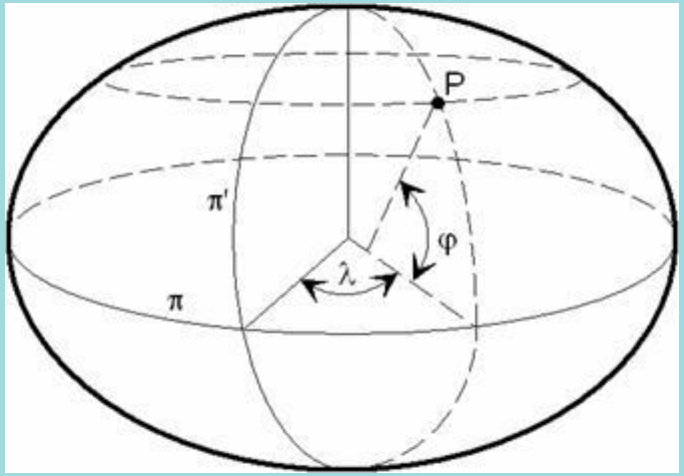
Elementos diferenciales

Para lograr establecer la representación cartográfica que vincula los puntos de la Tierra (superficie objetiva) y los puntos homólogos en el plano (superficie subjetiva), estos deben identificarse de manera unívoca.

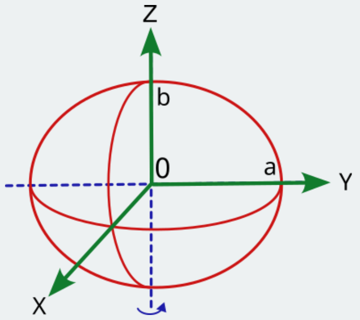


Esta identificación se realiza mediante el uso de coordenadas.

En el plano se utilizan las coordenadas cartesianas x , y o E , N y en el elipsoide o la esfera las coordenadas geodésicas latitud y longitud φ y λ .

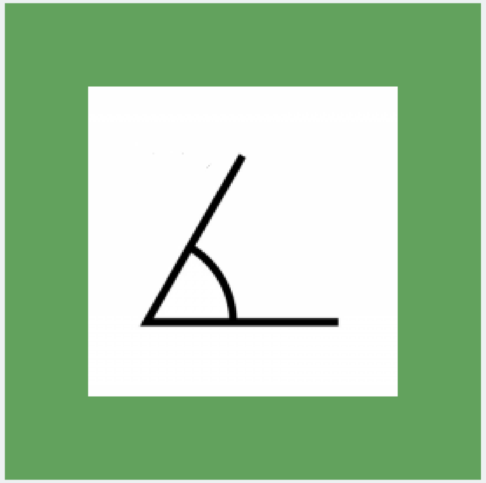


Elementos diferenciales en el elipsoide

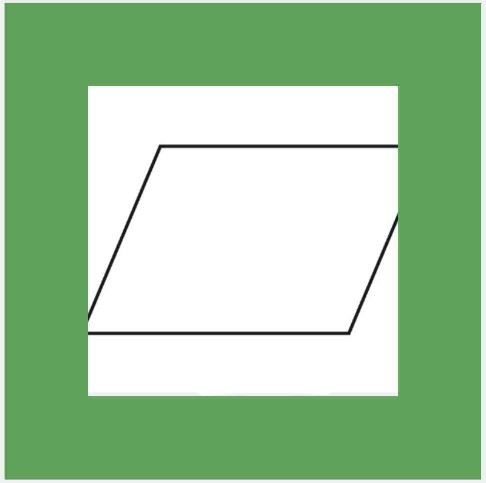


Para avanzar en la formulación matemática de una proyección cartográfica, debemos analizar las expresiones que asumen los elementos diferenciales de las tres entidades geométricas relevantes:

Longitudes

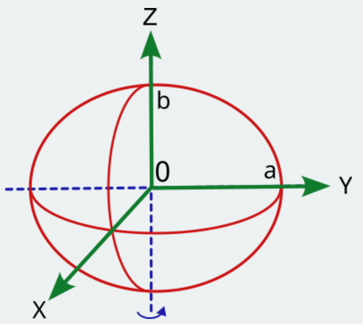


Ángulos

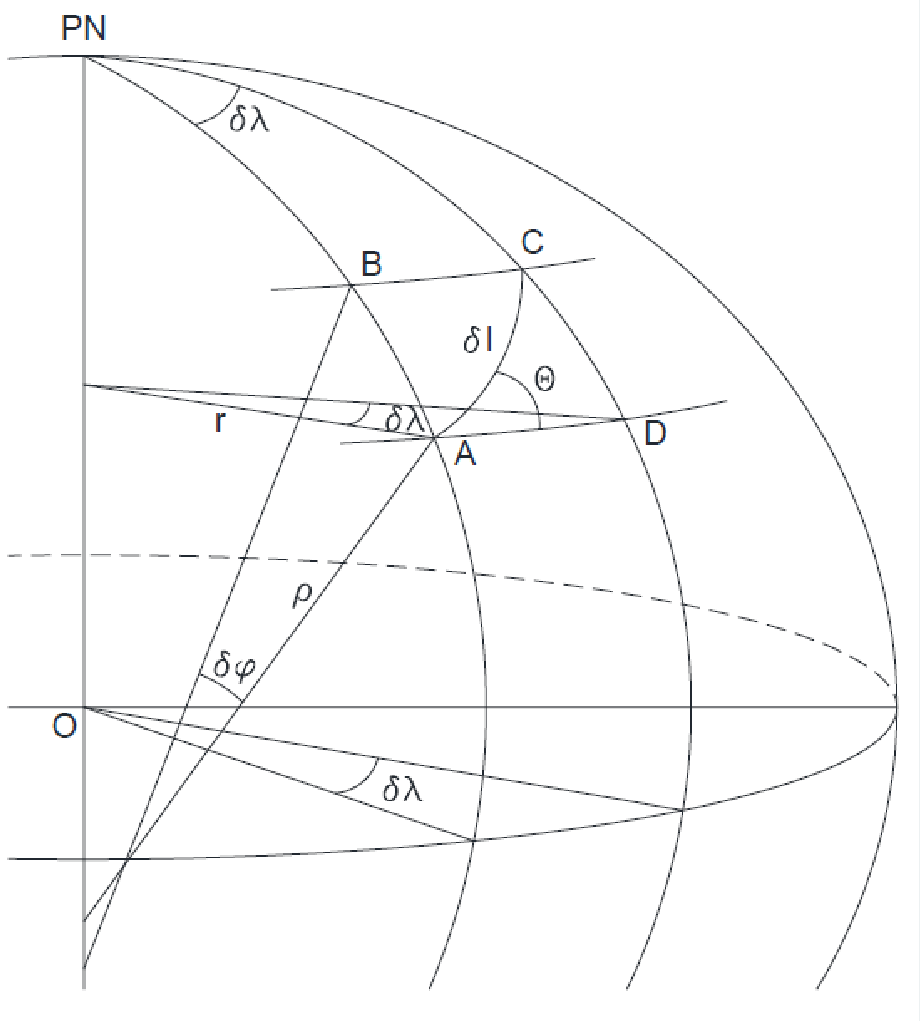


Áreas

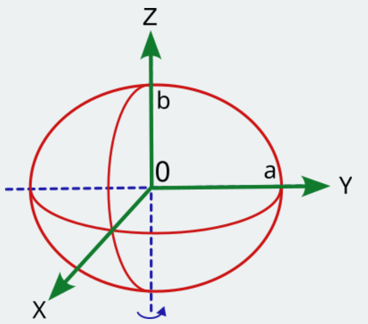
Elementos diferenciales en el elipsoide



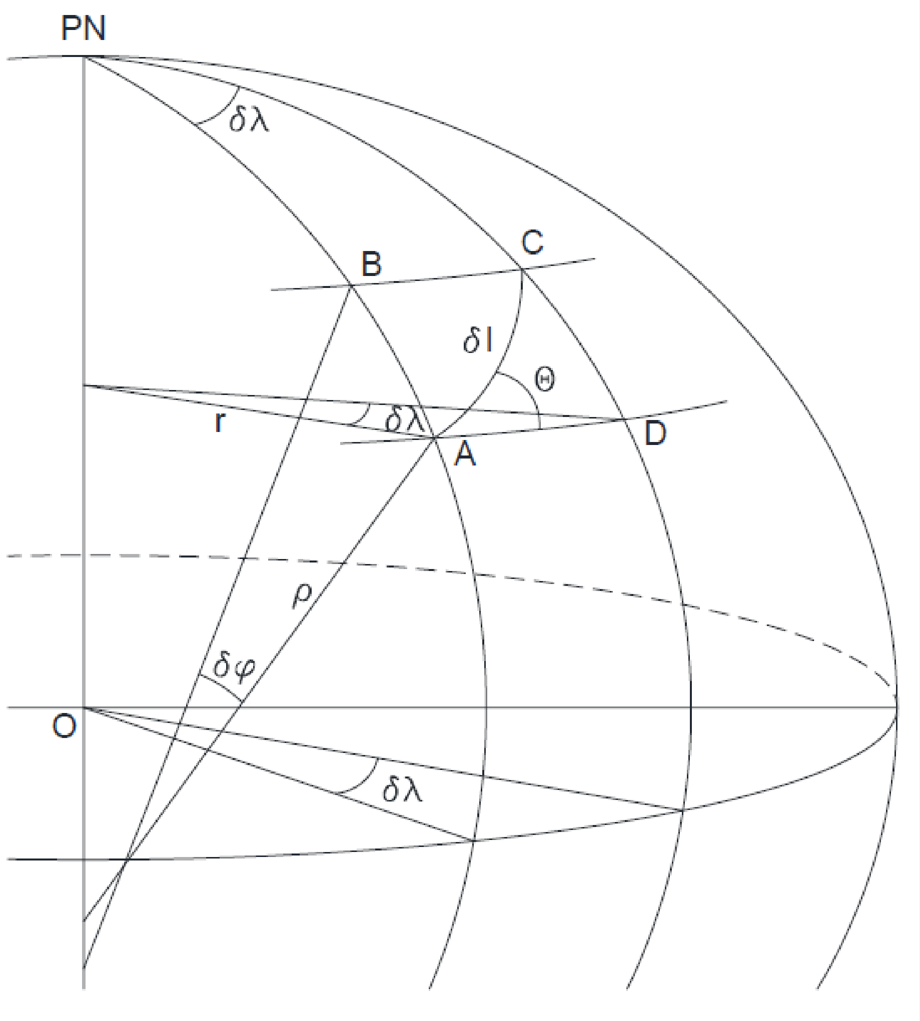
Vamos a comenzar analizando la siguiente figura:



Elementos diferenciales en el elipsoide

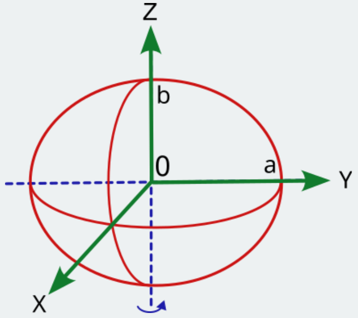


Vamos a comenzar analizando la siguiente figura:

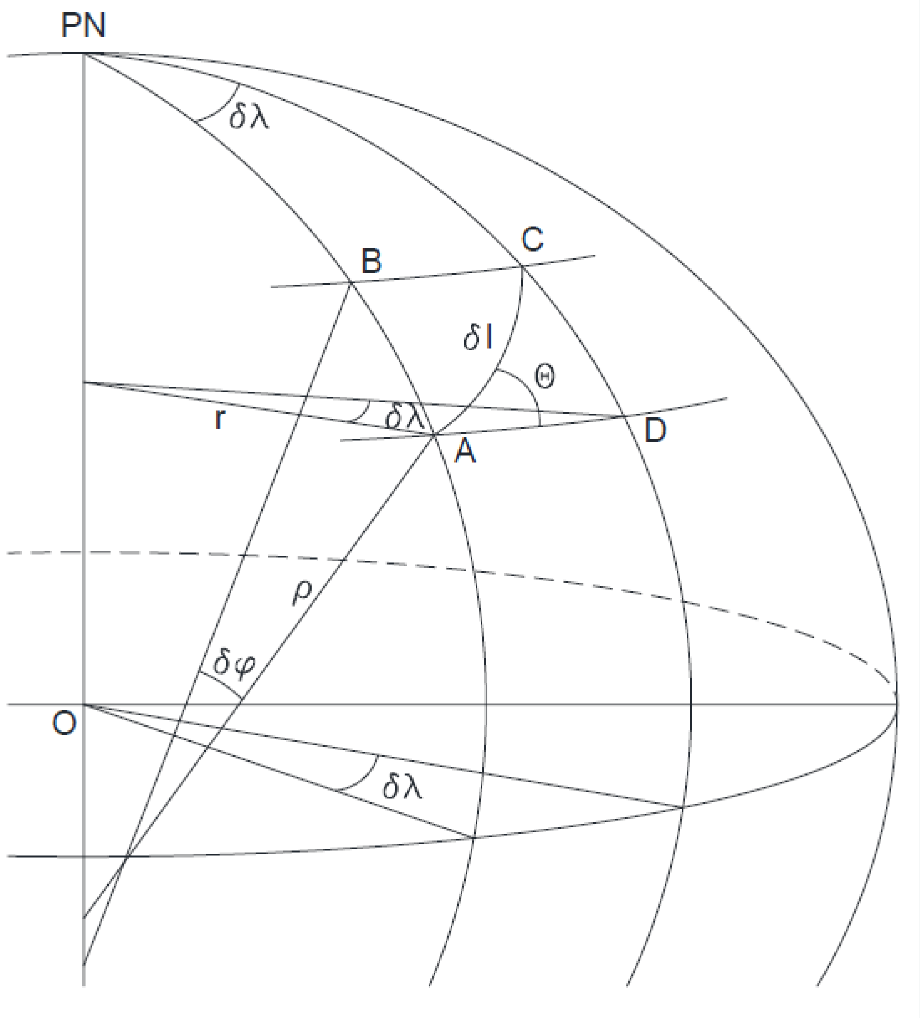


Se representa parte de la superficie del elipsoide con un cuadrilátero infinitesimal de vértices A, B, C y D sobre él.

Elementos diferenciales en el elipsoide



Vamos a comenzar analizando la siguiente figura:



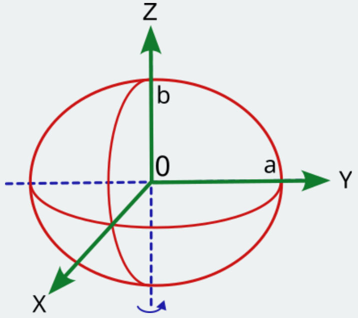
Se representa parte de la superficie del elipsoide con un cuadrilátero infinitesimal de vértices A, B, C y D sobre él.

Elemento lineal *dl*: $AC = dl = \sqrt{AD^2 + DC^2}$

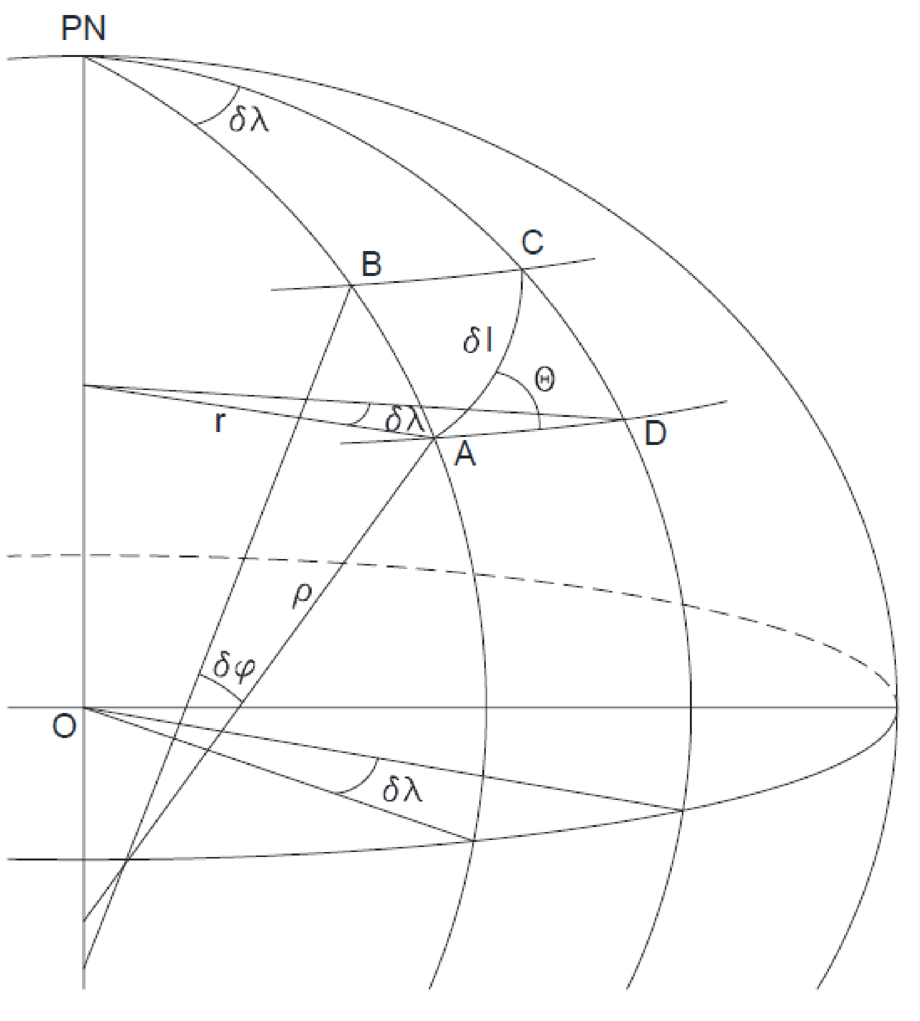
a su vez, $AD = r.d\lambda$ y $DC = AB = \rho.d\varphi$

por lo que: $dl = \sqrt{r^2.d\lambda^2 + \rho^2.d\varphi^2}$

Elementos diferenciales en el elipsoide



Vamos a comenzar analizando la siguiente figura:



Se representa parte de la superficie del elipsoide con un cuadrilátero infinitesimal de vértices A, B, C y D sobre él.

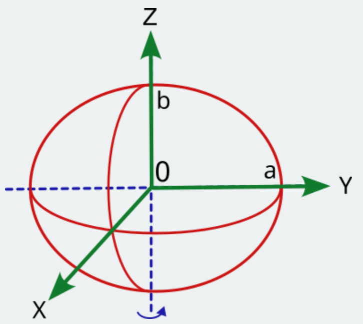
Elemento lineal *dl*: $AC = dl = \sqrt{AD^2 + DC^2}$

a su vez, $AD = r.d\lambda$ y $DC = AB = \rho.d\varphi$

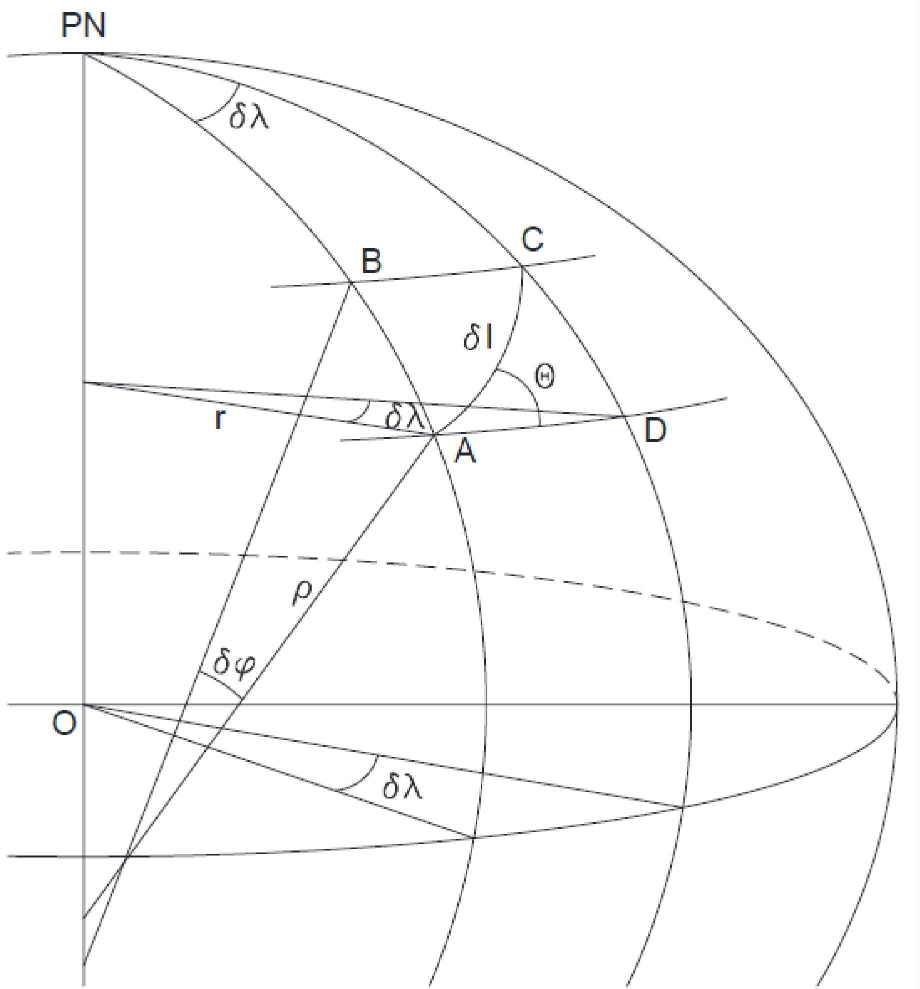
por lo que: $dl = \sqrt{r^2.d\lambda^2 + \rho^2.d\varphi^2}$

Elemento angular *θ*: $\tan\Theta = \frac{DC}{AD} = \frac{\rho.d\varphi}{r.d\lambda}$

Elementos diferenciales en el elipsoide



Vamos a comenzar analizando la siguiente figura:



Se representa parte de la superficie del elipsoide con un cuadrilátero infinitesimal de vértices A, B, C y D sobre él.

Elemento lineal *dl*: $AC = dl = \sqrt{AD^2 + DC^2}$

a su vez, $AD = r.d\lambda$ y $DC = AB = \rho.d\varphi$

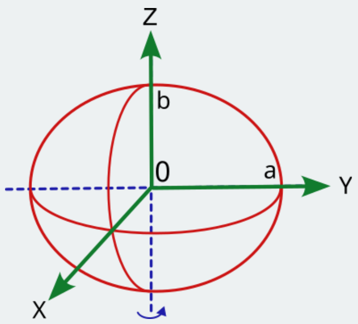
por lo que: $dl = \sqrt{r^2.d\lambda^2 + \rho^2.d\varphi^2}$

Elemento angular *θ*: $\tan\Theta = \frac{DC}{AD} = \frac{\rho.d\varphi}{r.d\lambda}$

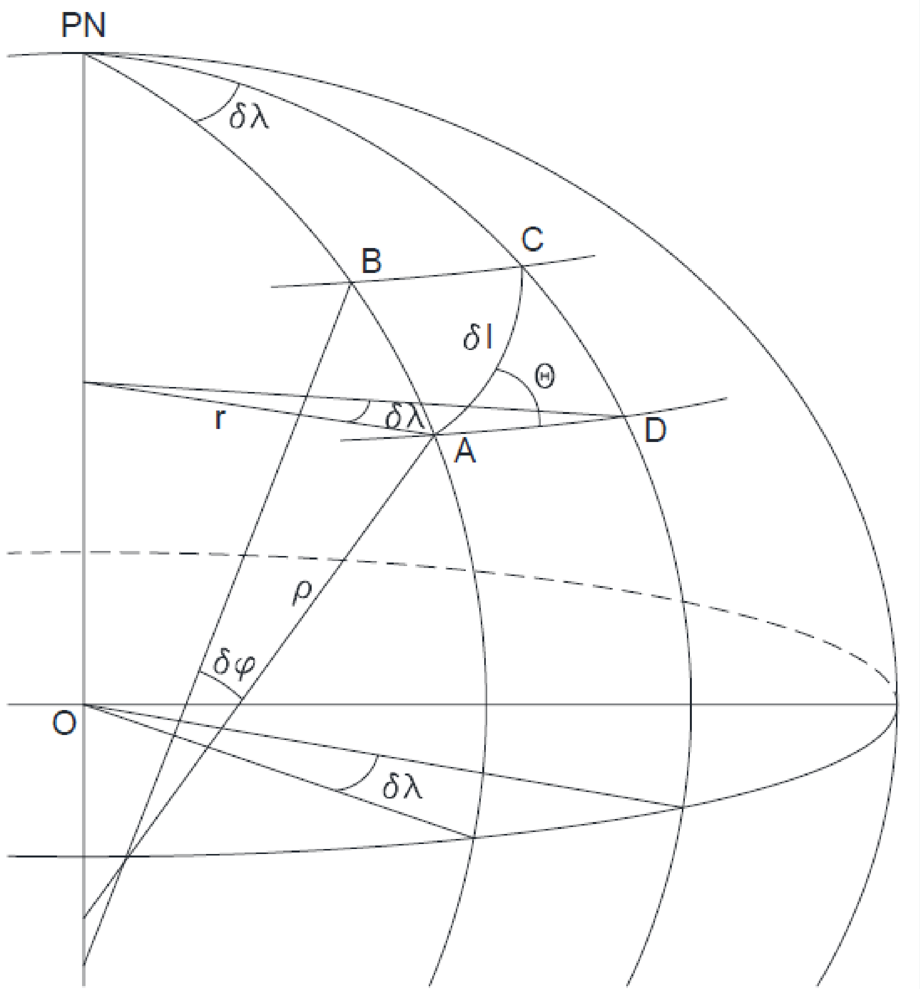
Elemento superficial *ds*:

$$ds = AD.DC = \rho.r.d\varphi.d\lambda = \rho.N.\cos\varphi.d\varphi.d\lambda$$

Elementos diferenciales en el elipsoide



Vamos a comenzar analizando la siguiente figura:



Se representa parte de la superficie del elipsoide con un cuadrilátero infinitesimal de vértices A, B, C y D sobre él.

Elemento lineal ***dl***: $AC = dl = \sqrt{AD^2 + DC^2}$

a su vez, $AD = r.d\lambda$ y $DC = AB = \rho.d\varphi$

por lo que: $dl = \sqrt{r^2.d\lambda^2 + \rho^2.d\varphi^2}$

Elemento angular ***θ***: $\tan\Theta = \frac{DC}{AD} = \frac{\rho.d\varphi}{r.d\lambda}$

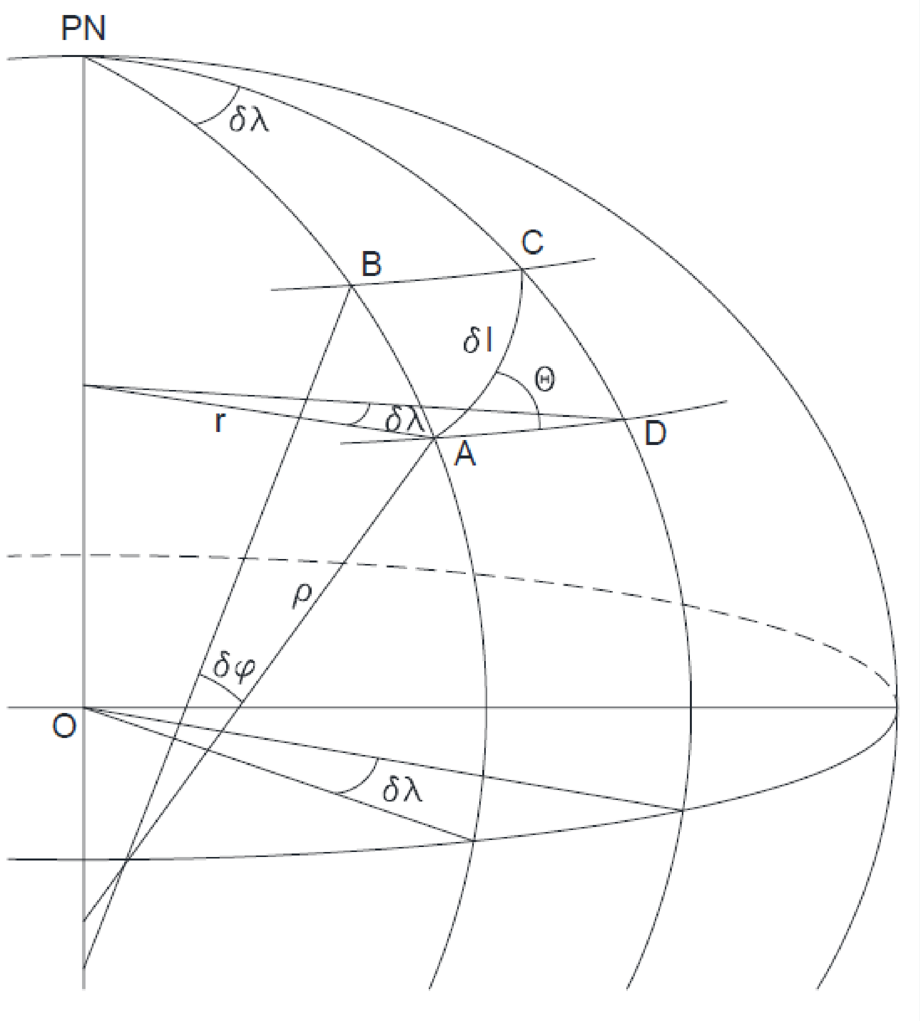
Elemento superficial ***ds***:

$$ds = AD.DC = \rho.r.d\varphi.d\lambda = \rho.N.\cos\varphi.d\varphi.d\lambda$$

Elementos diferenciales en el plano

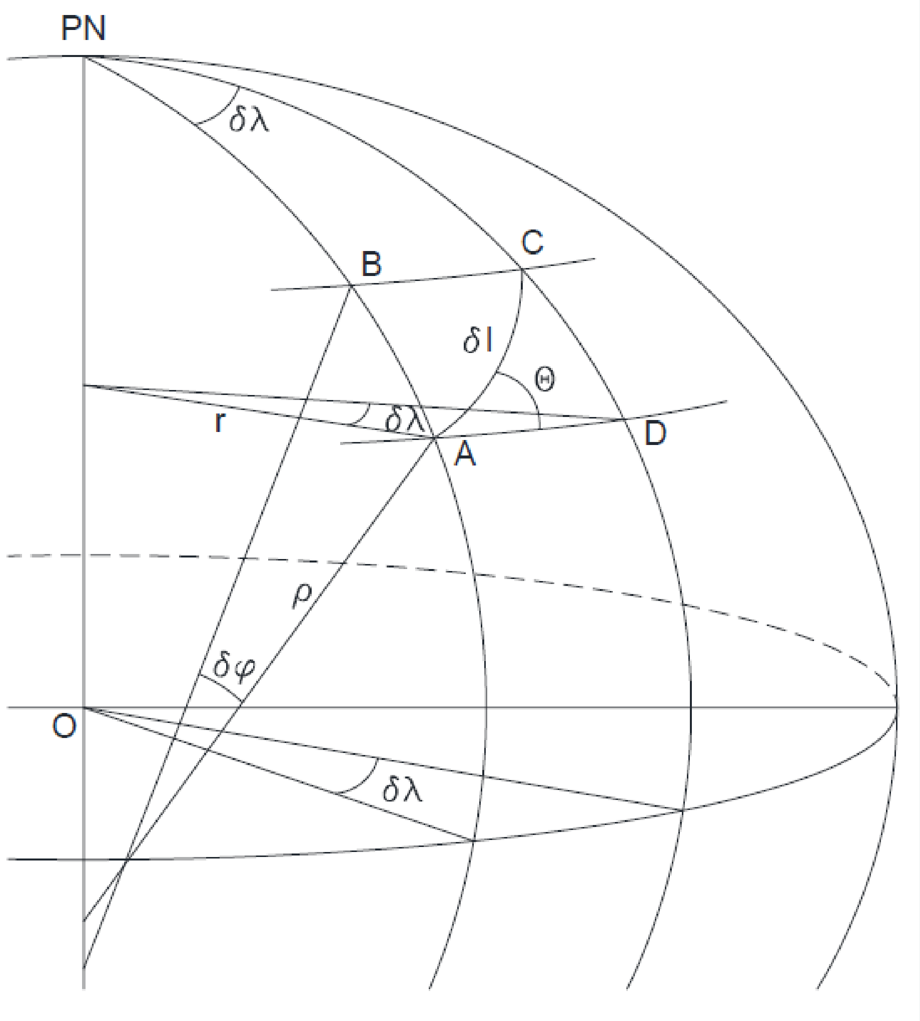
Elementos diferenciales en el plano

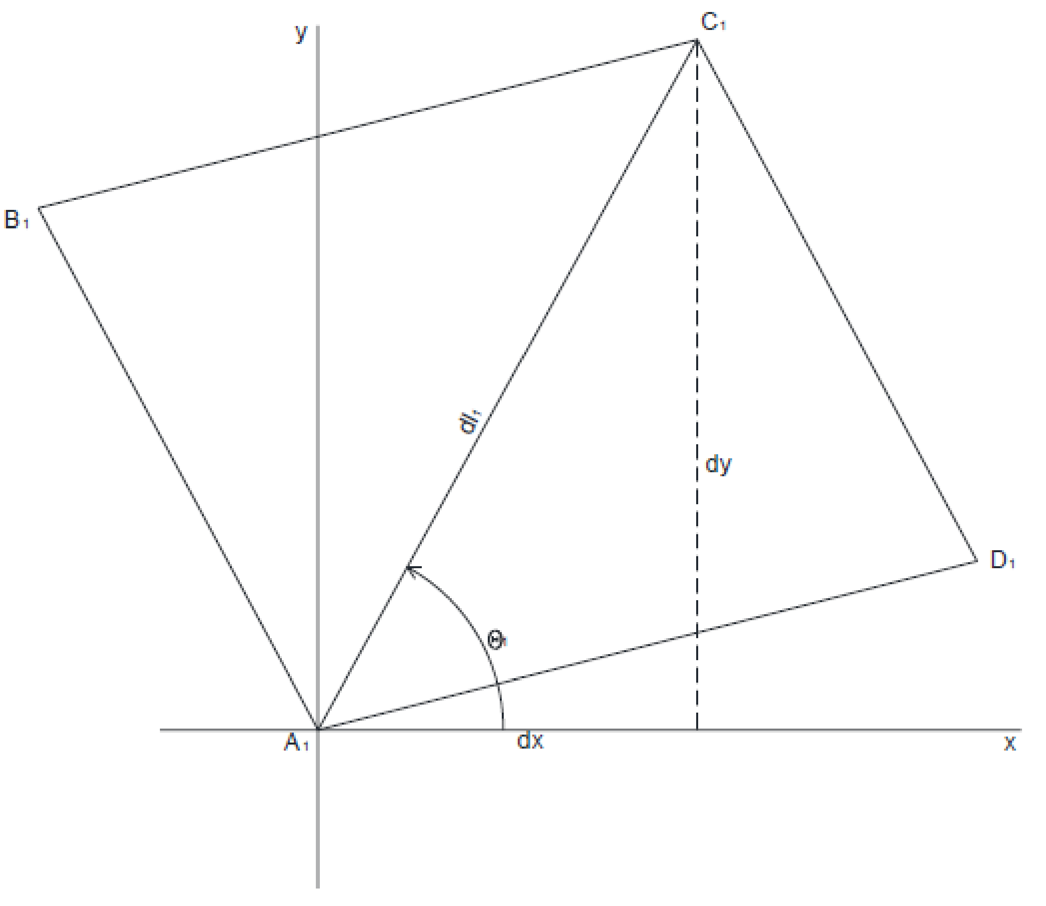
Vamos a considerar los homólogos de A, B, C y D en el plano:



Elementos diferenciales en el plano

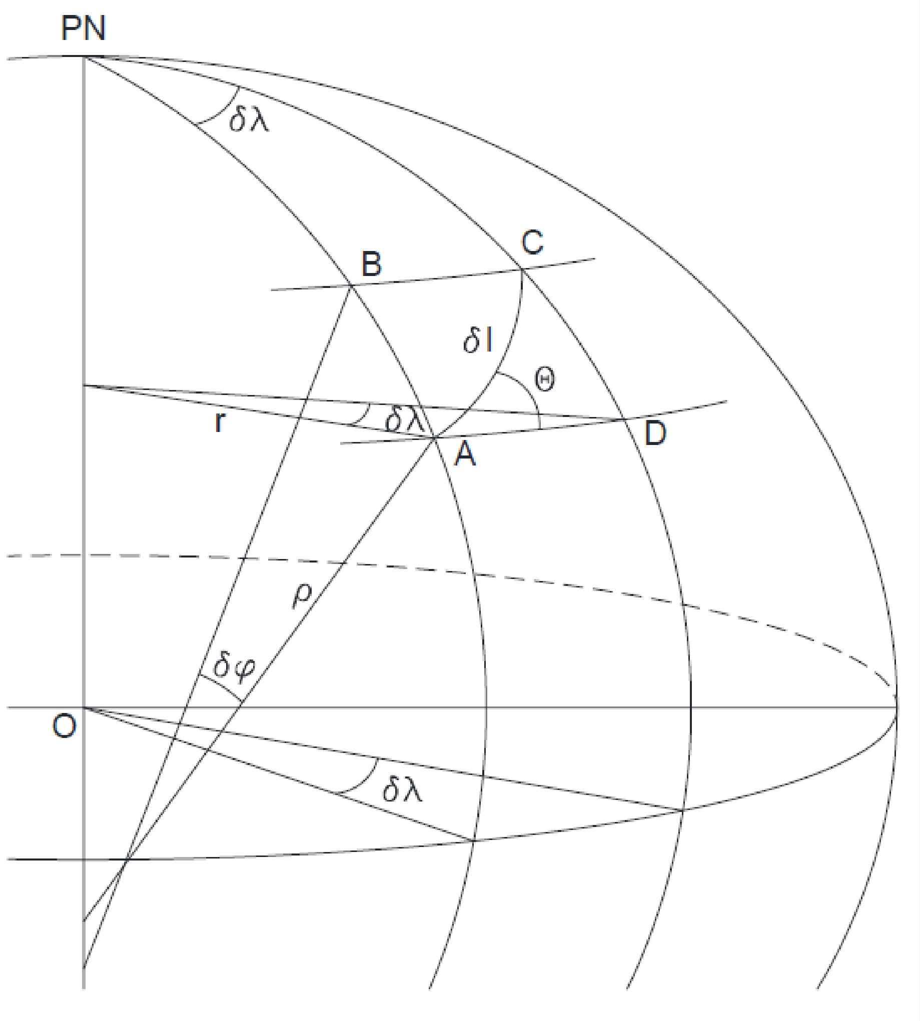
Vamos a considerar los homólogos de A, B, C y D en el plano:

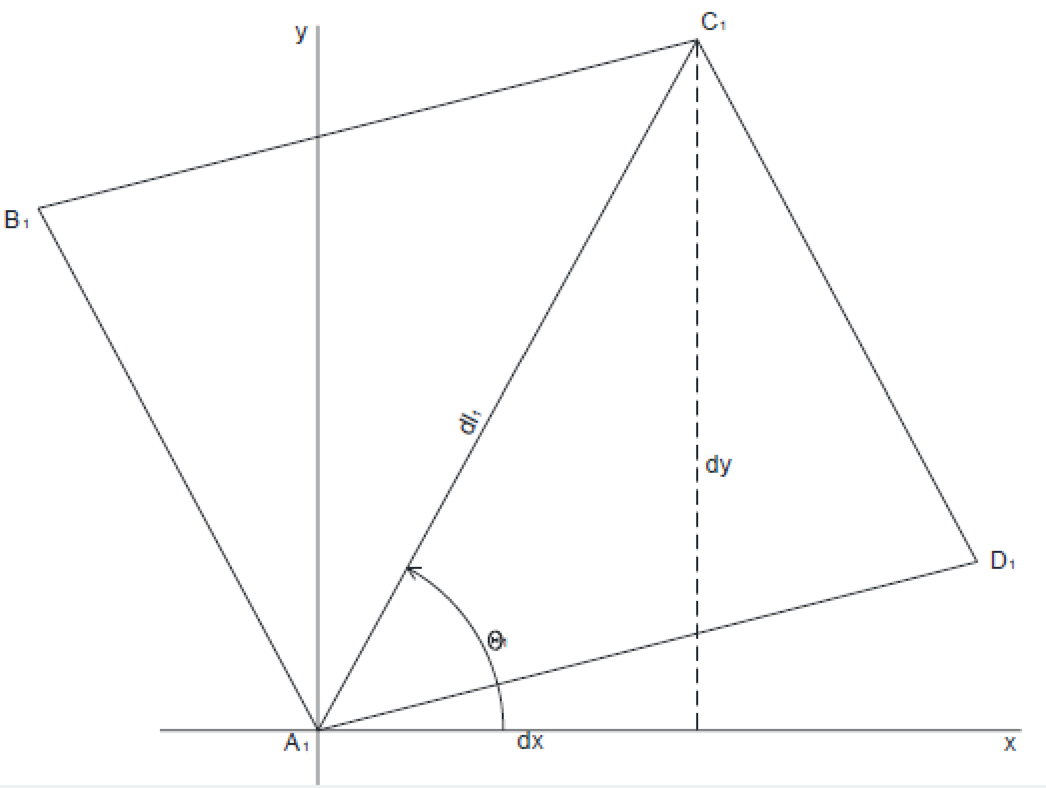




Elementos diferenciales en el plano

Vamos a considerar los homólogos de A, B, C y D en el plano:

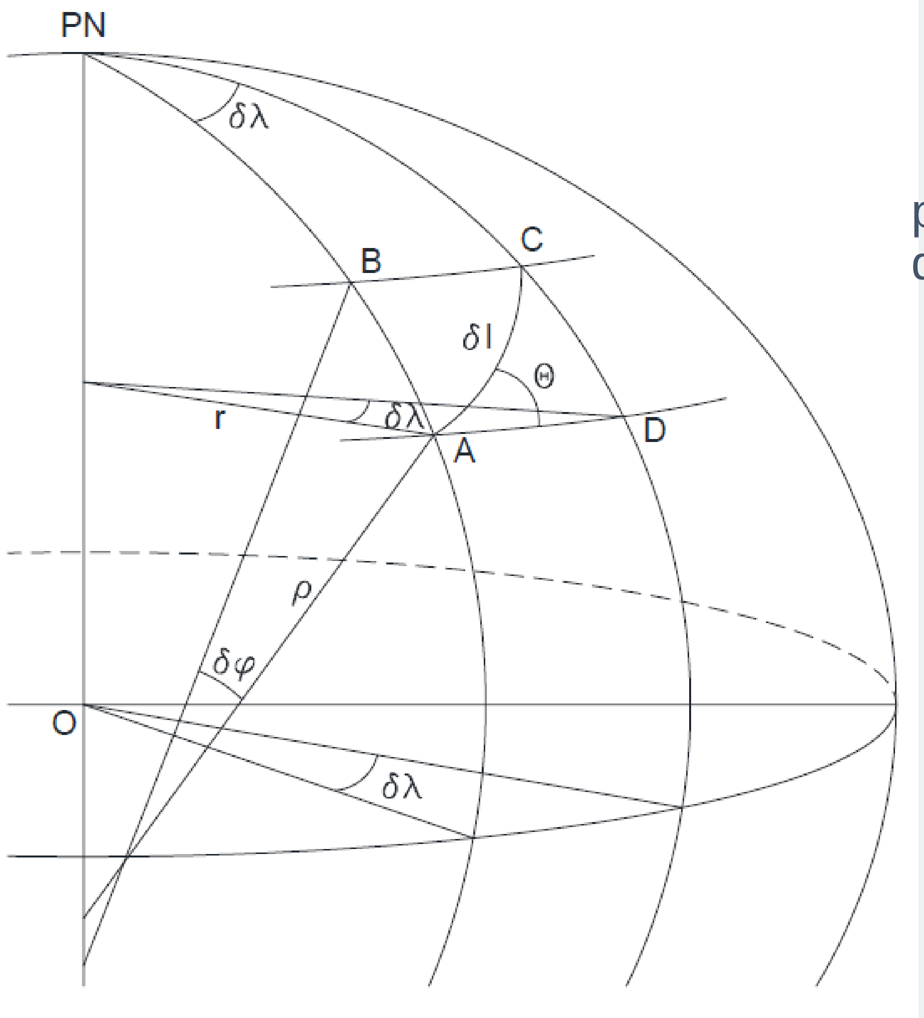




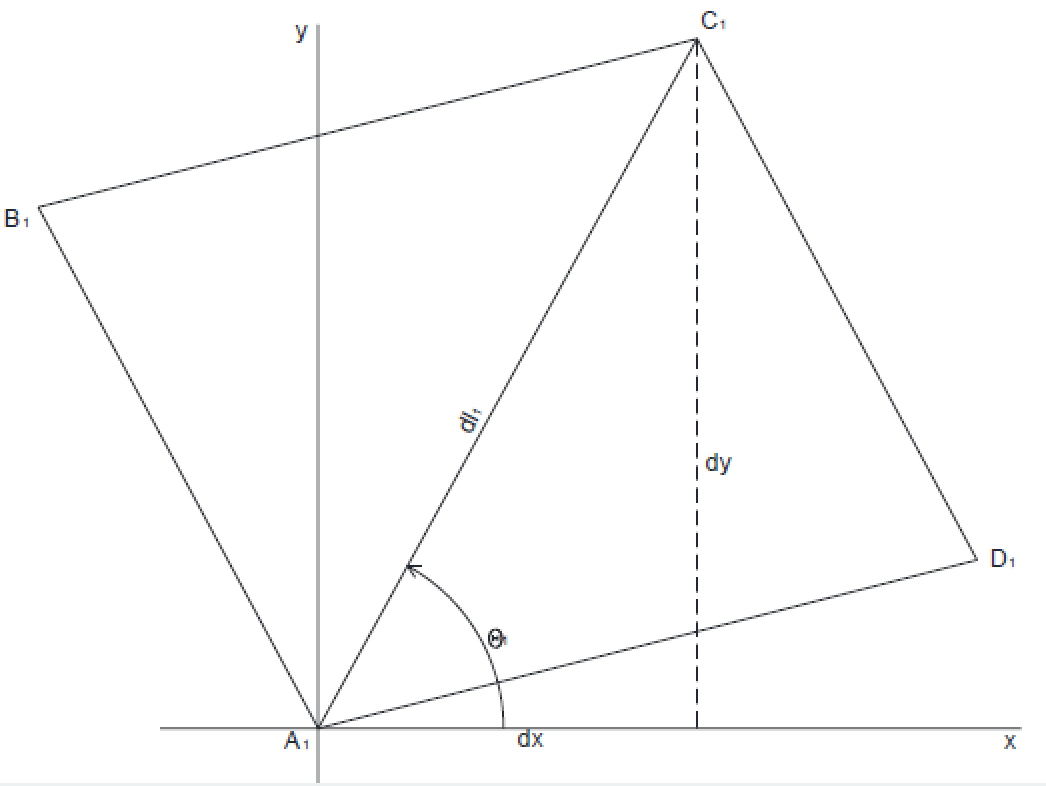
Que son A', B', C' y D'.

Elementos diferenciales en el plano

Vamos a considerar los homólogos de A, B, C y D en el plano:



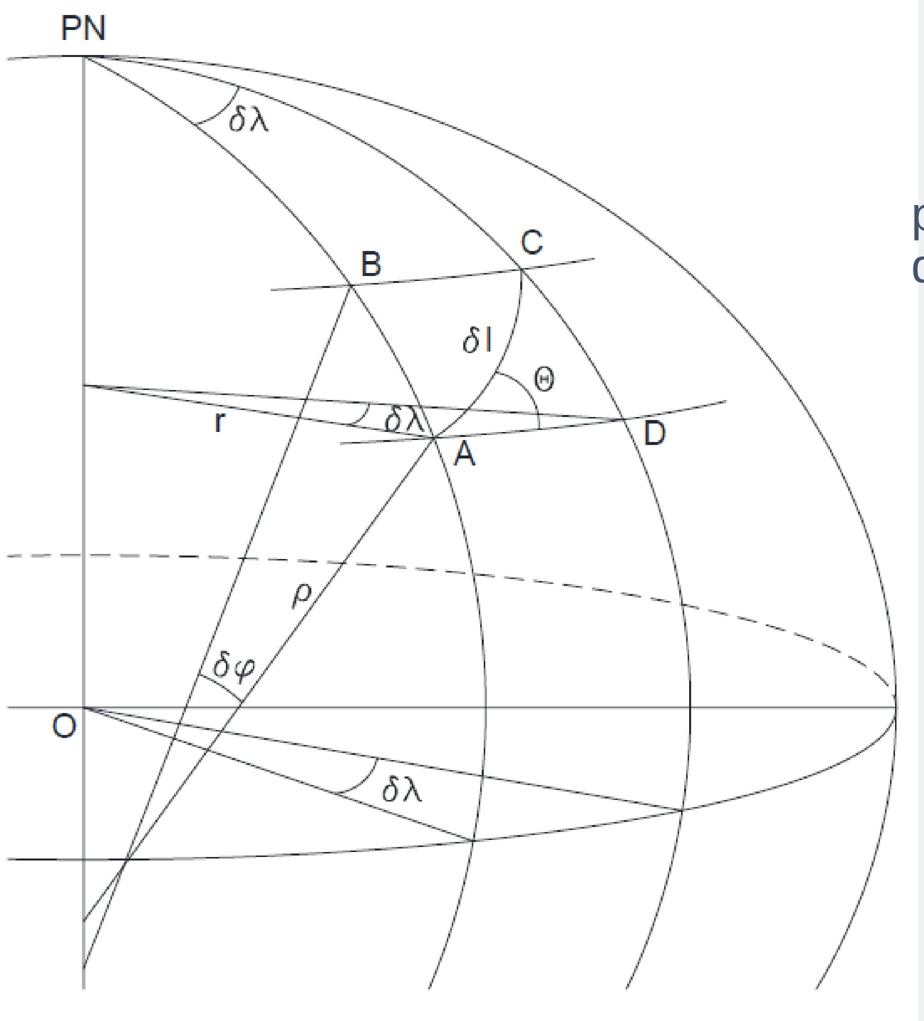
La correspondencia o proyección cartográfica queda determinada por dos funciones:



Que son A', B', C' y D'.

Elementos diferenciales en el plano

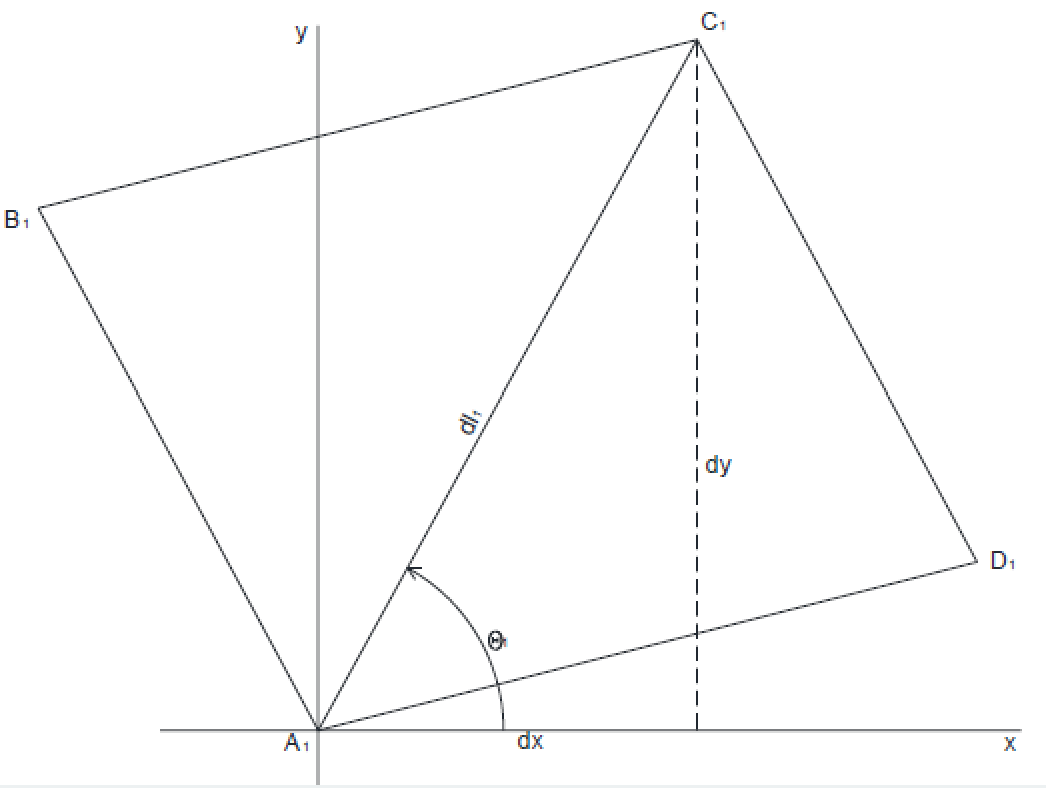
Vamos a considerar los homólogos de A, B, C y D en el plano:



La correspondencia o proyección cartográfica queda determinada por dos funciones:

$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

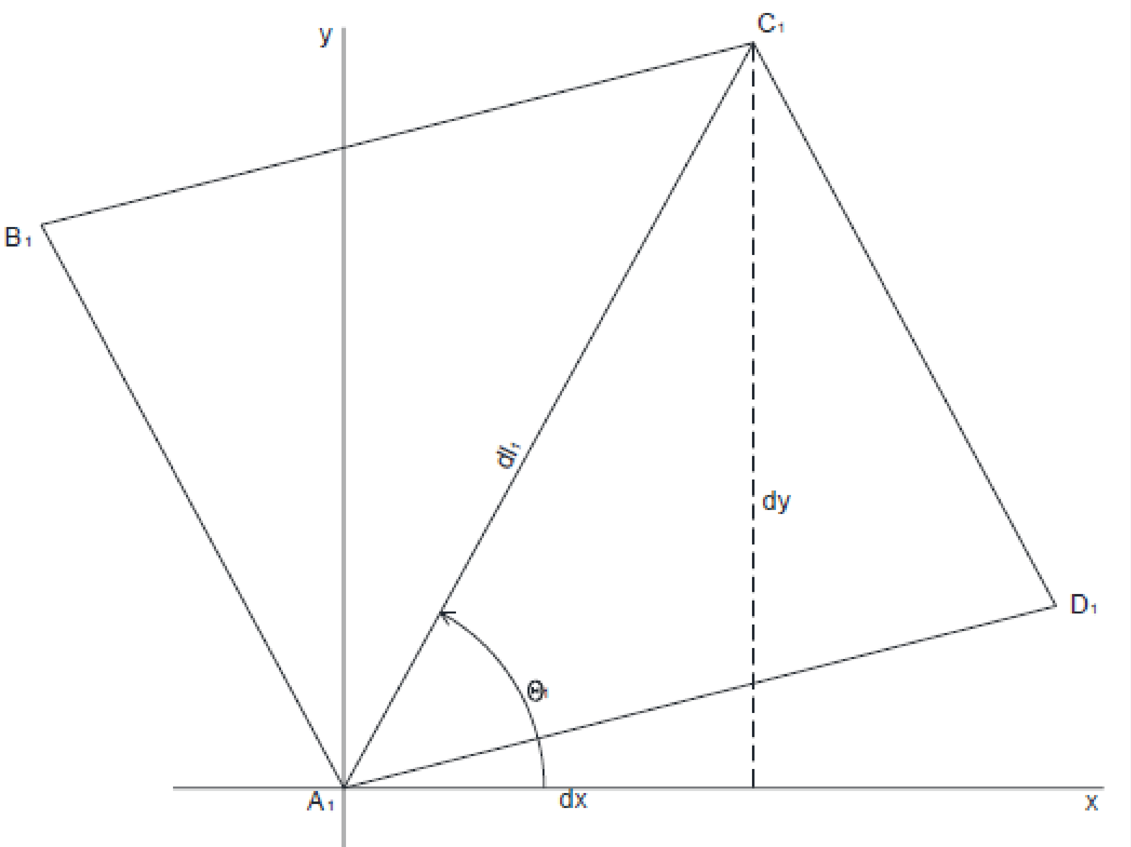


Que son A', B', C' y D'.

Elementos diferenciales en el plano

El elemento lineal en el plano, dl_1, corresponde a la longitud del segmento A_1C_1.

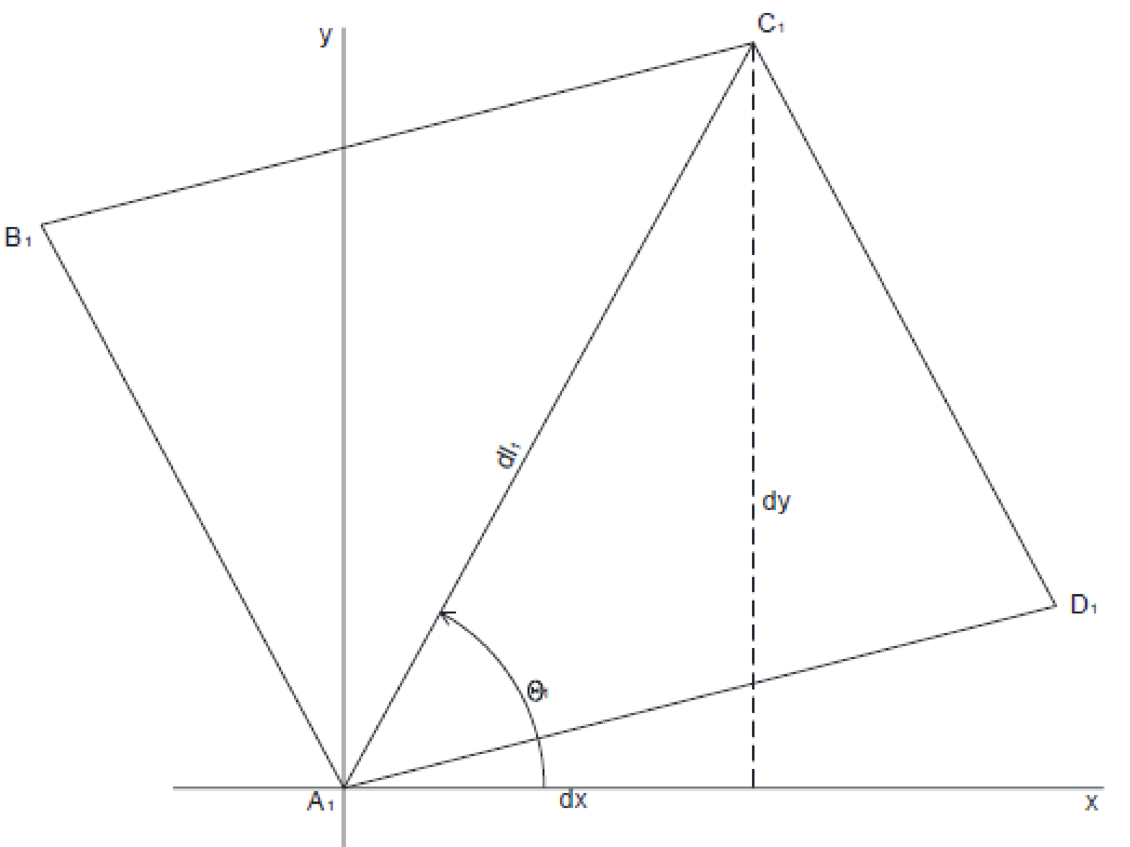
C_1 (xC_1, yC_1) / $xC_1 = xA_1 + dx$, $yC_1 = yA_1 + dy$ $\Longrightarrow$ $A_1C_1 = dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



Elementos diferenciales en el plano

El elemento lineal en el plano, dl_1, corresponde a la longitud del segmento A_1C_1.

$C_1\ (xC_1, yC_1)\ /\ xC_1 = xA_1 + dx\ ,\ yC_1 = yA_1 + dy \Longrightarrow A_1C_1 = dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



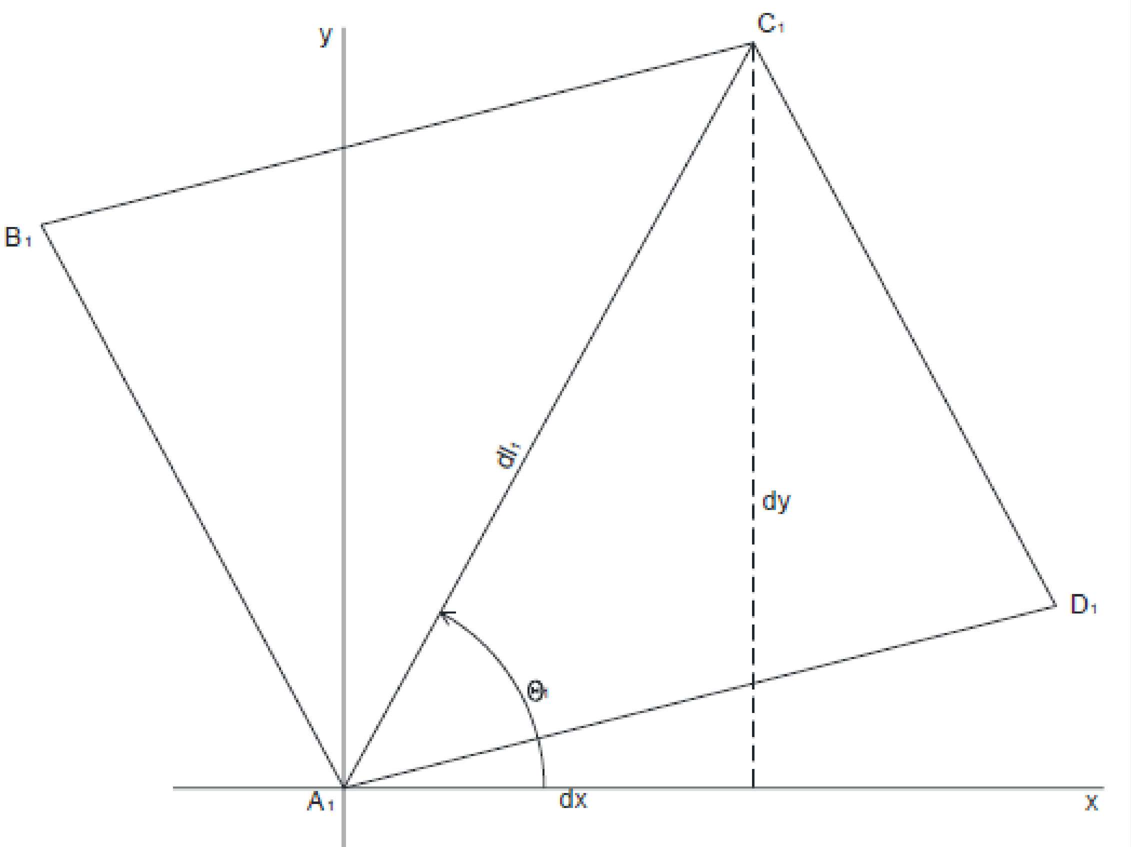
$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

Elementos diferenciales en el plano

El <u>elemento lineal</u> en el plano, dl_1, corresponde a la longitud del segmento A_1C_1.

C_1 (xC_1, yC_1) / $xC_1 = xA_1 + dx$, $yC_1 = yA_1 + dy$ $\Longrightarrow$ $A_1C_1 = dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

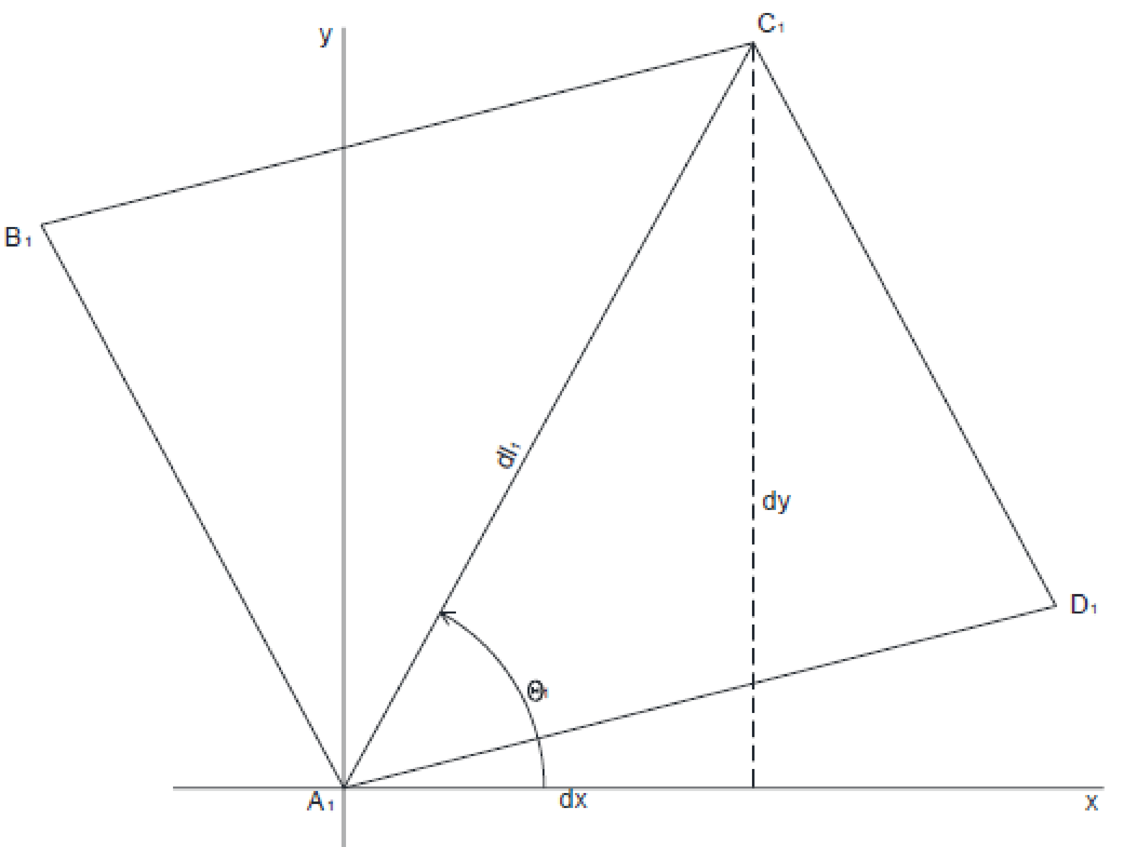
$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

Para calcular dl_1, hay que hacer las derivadas parciales de estas funciones.

Elementos diferenciales en el plano

El elemento lineal en el plano, dl_1, corresponde a la longitud del segmento A_1C_1.

C_1 (xC_1, yC_1) / $xC_1 = xA_1 + dx$, $yC_1 = yA_1 + dy$ $\Longrightarrow$ $A_1C_1 = dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

Para calcular dl_1, hay que hacer las derivadas parciales de estas funciones.

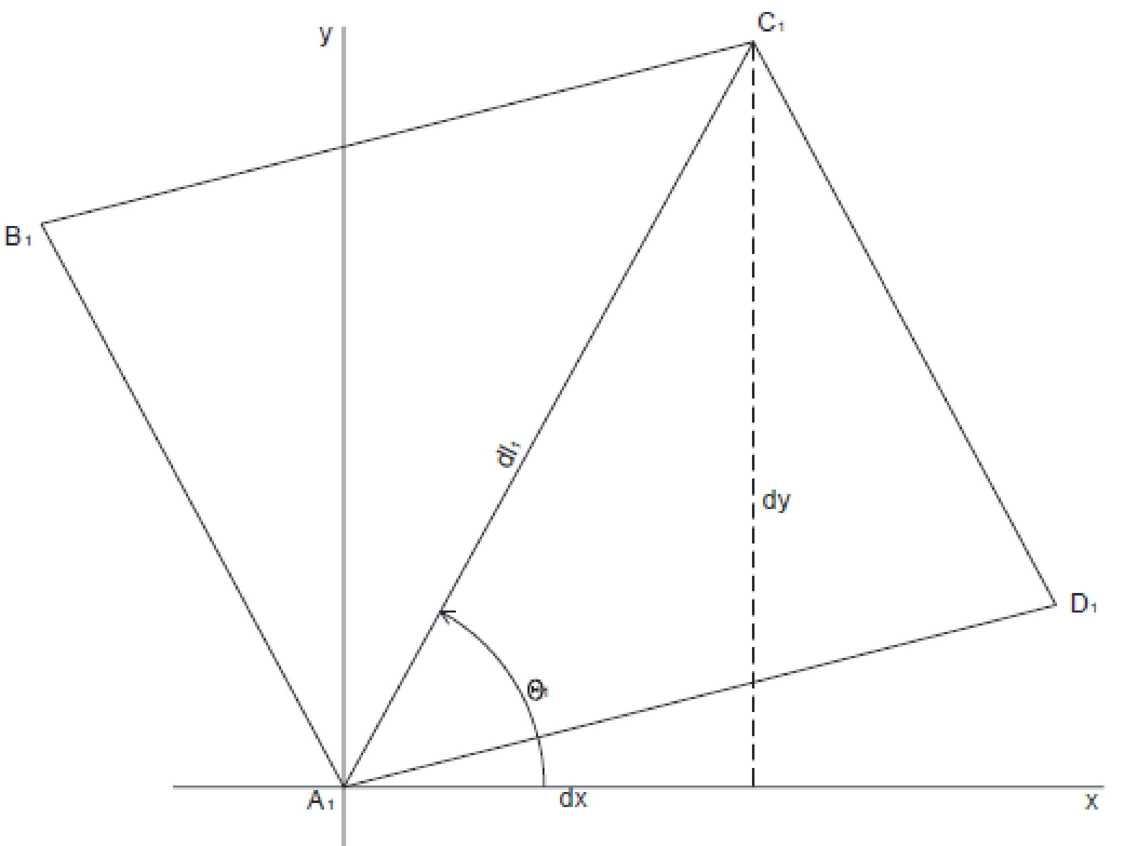
$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

Elementos diferenciales en el plano

El <u>elemento lineal</u> en el plano, dl_1, corresponde a la longitud del segmento A_1C_1.

C_1 (xC_1, yC_1) / $xC_1 = xA_1 + dx$, $yC_1 = yA_1 + dy$ $\Longrightarrow$ $A_1C_1 = dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

Para calcular dl_1, hay que hacer las derivadas parciales de estas funciones.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

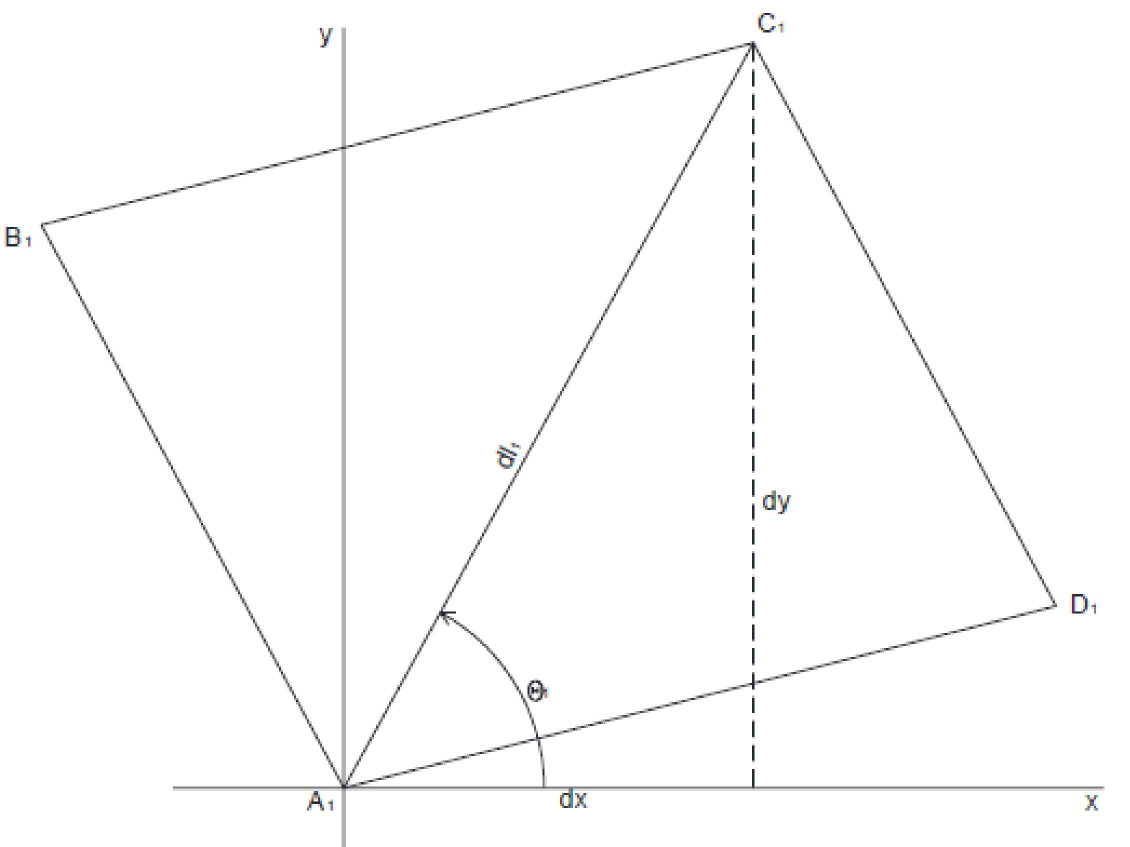
$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

Sustituirlas en la ecuación de arriba:

$$dl_1 = \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2}$$

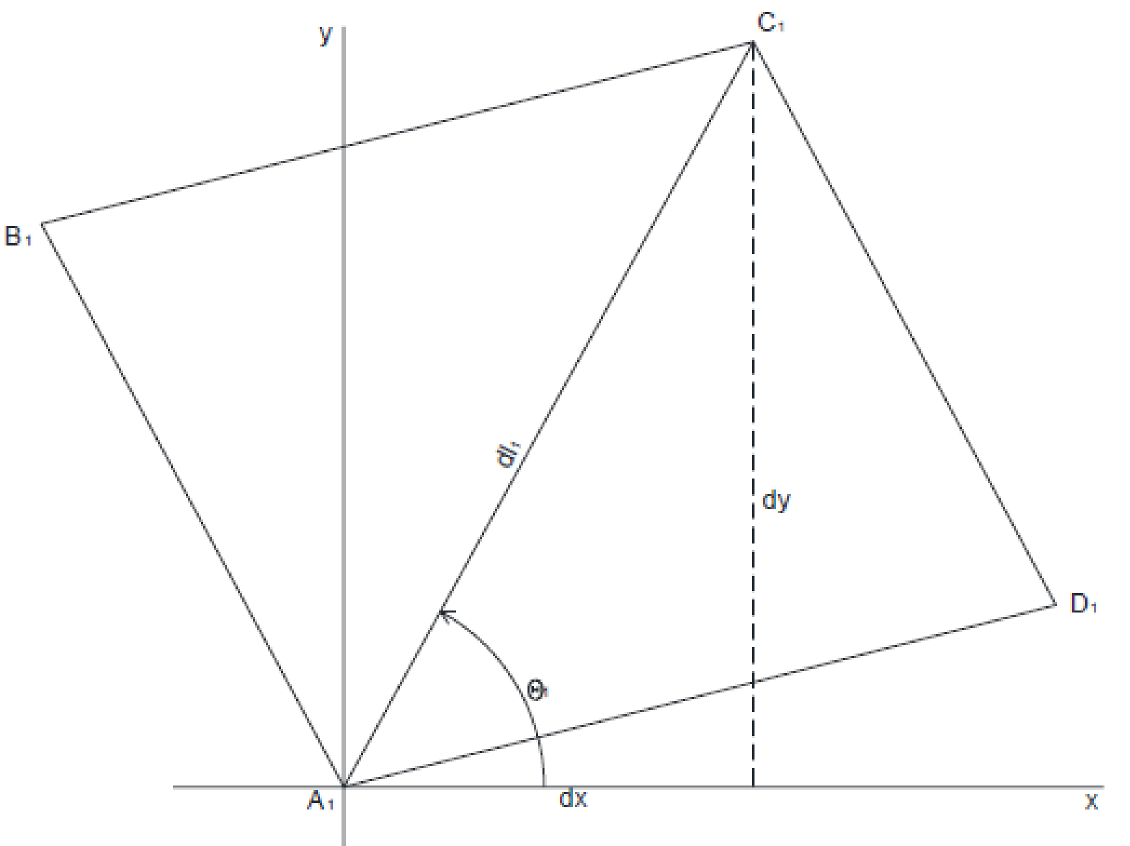
Elementos diferenciales en el plano *(dl_1)*

$$dl_1 = \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2} \Longrightarrow dl_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] d\varphi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right] d\varphi d\lambda}$$



Elementos diferenciales en el plano *(dl_1)*

$$dl_1 = \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2} \Longrightarrow dl_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] d\varphi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right] d\varphi d\lambda}$$



Nombrando a lo que está en los corchetes de esta forma:

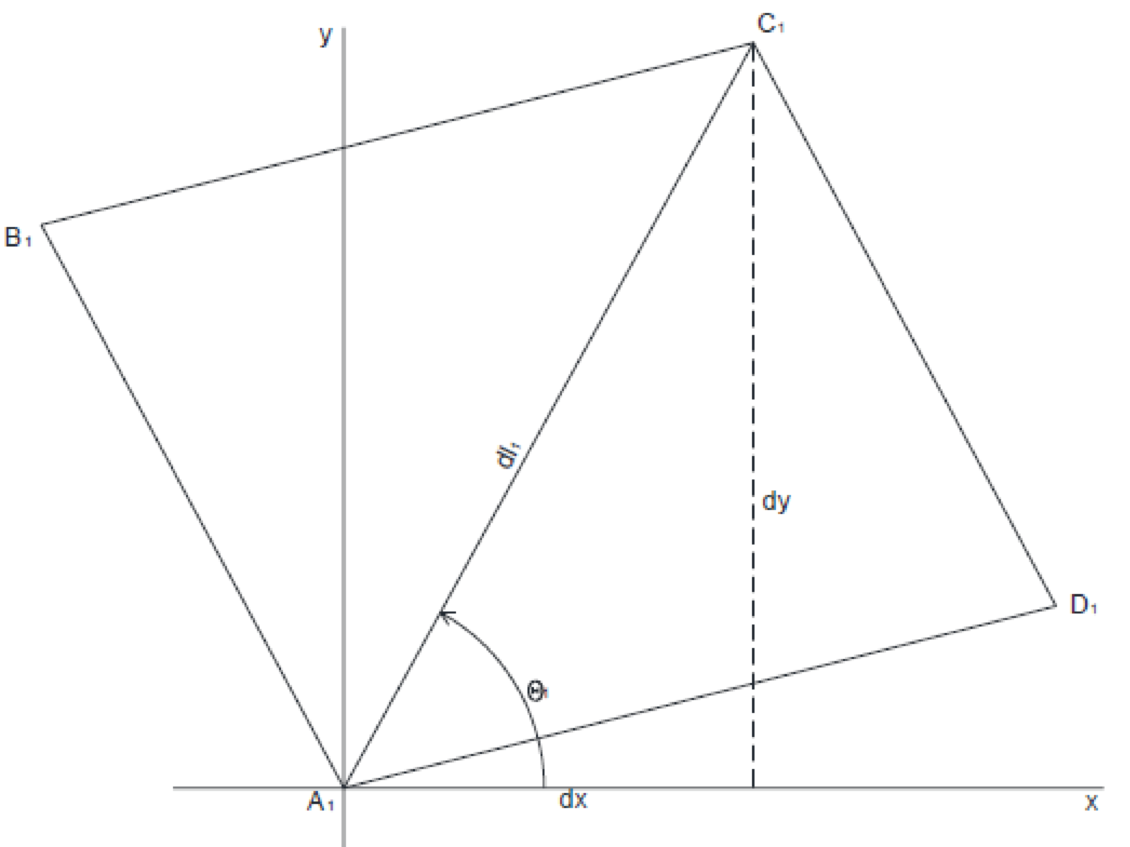
$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Elementos diferenciales en el plano *(dl_1)*

$$dl_1 = \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda\right]^2} \Longrightarrow dl_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] d\varphi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right] d\varphi d\lambda}$$



Nombrando a lo que está en los corchetes de esta forma:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

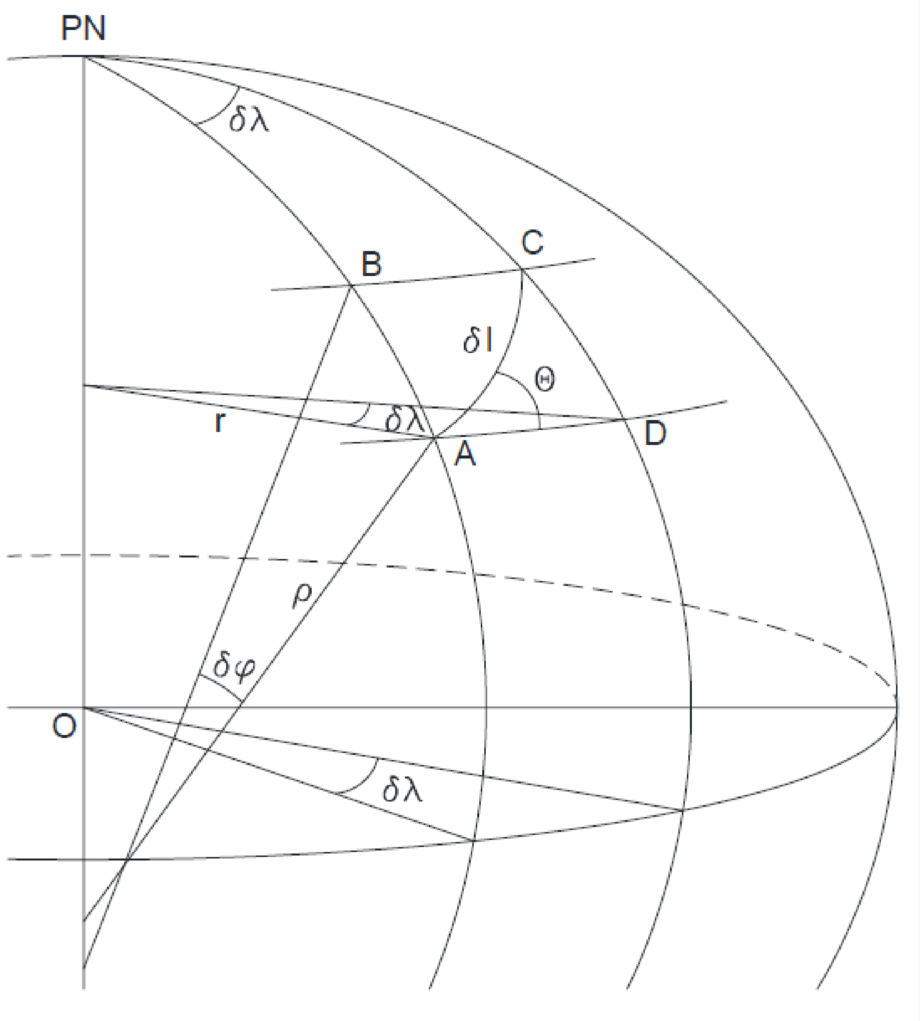
$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

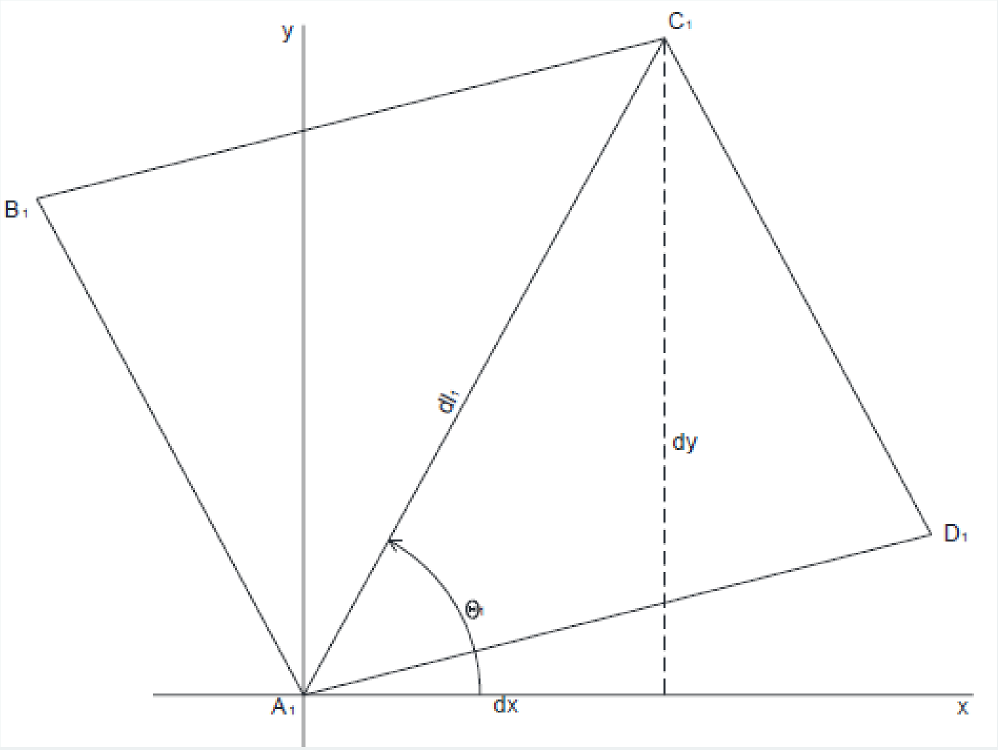
Llegamos a:

$$dl_1 = \sqrt{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}$$

Elementos diferenciales en el plano *(dl_1)*

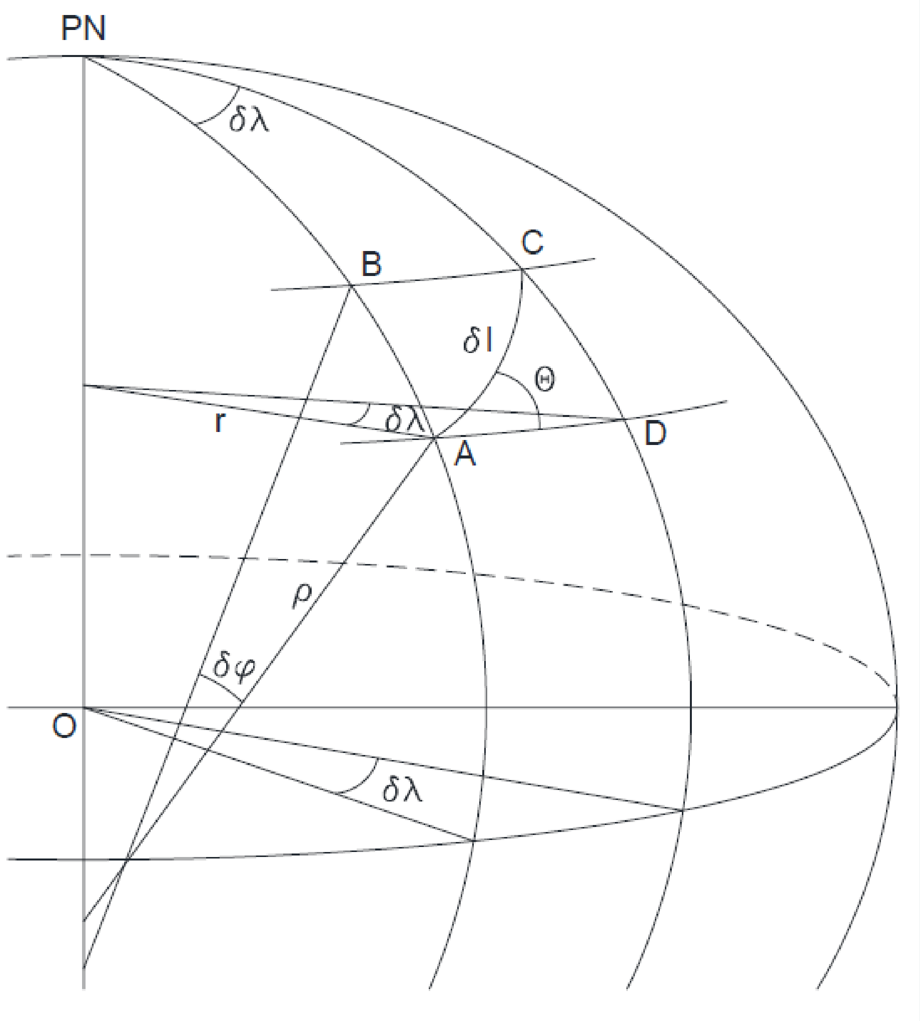
Llegamos a: $$dl_1 = \sqrt{E d\varphi^2 + G d\lambda^2 + 2F d\varphi d\lambda}$$





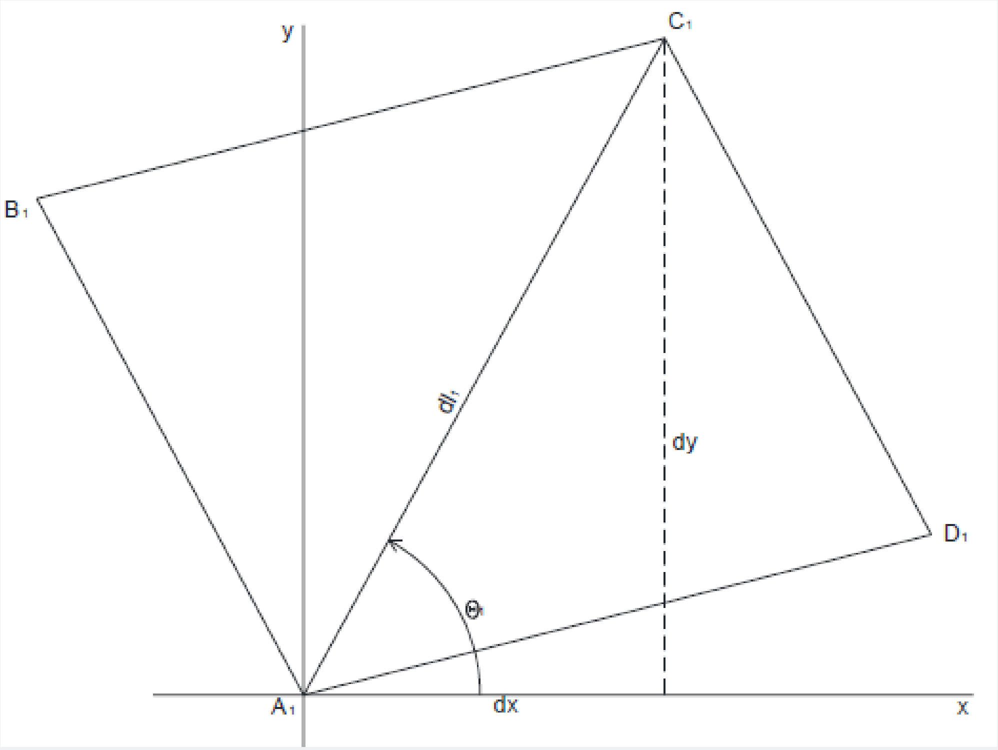
Elementos diferenciales en el plano *(dl_1)*

Llegamos a: $$dl_1 = \sqrt{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 + 2Fd\varphi d\lambda}$$



$A_1D_1 = dl_{1p}(d\varphi = 0) = \sqrt{G}d\lambda$

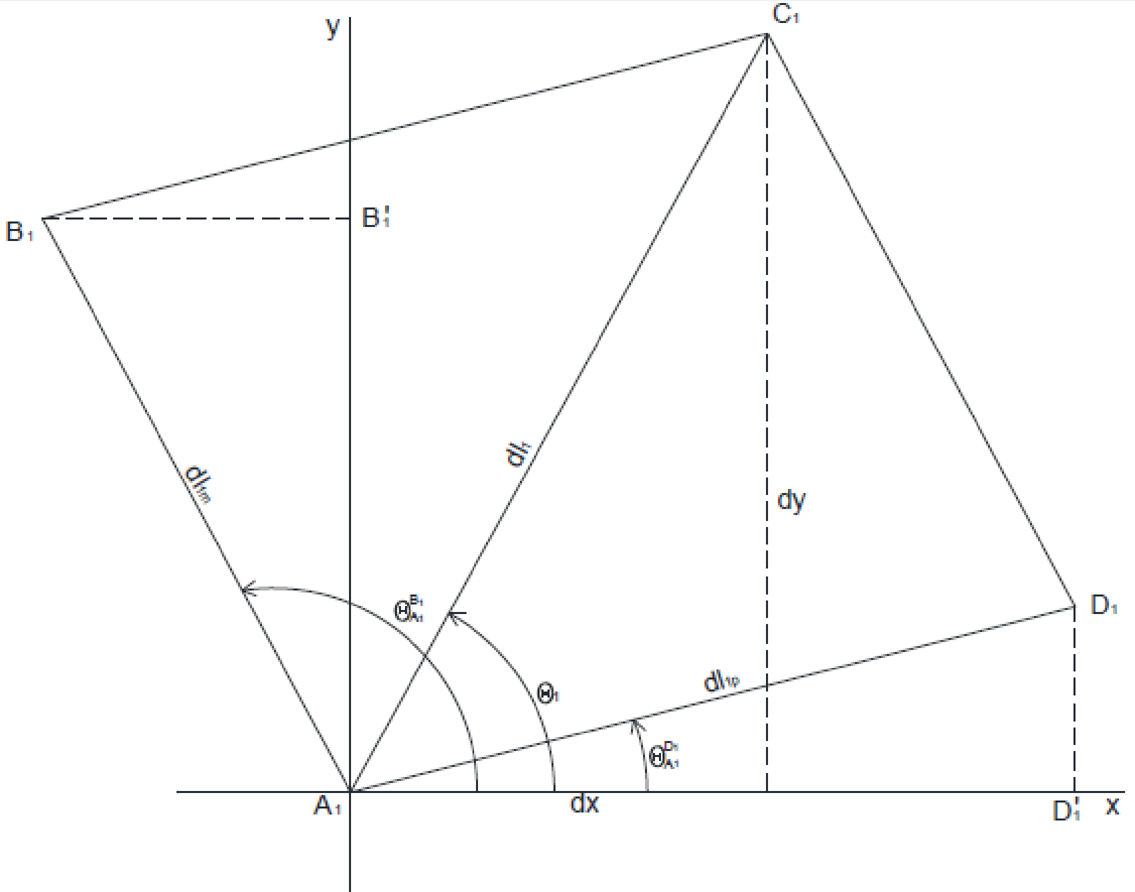
$A_1B_1 = dl_{1m}(d\lambda = 0) = \sqrt{E}d\varphi$



Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

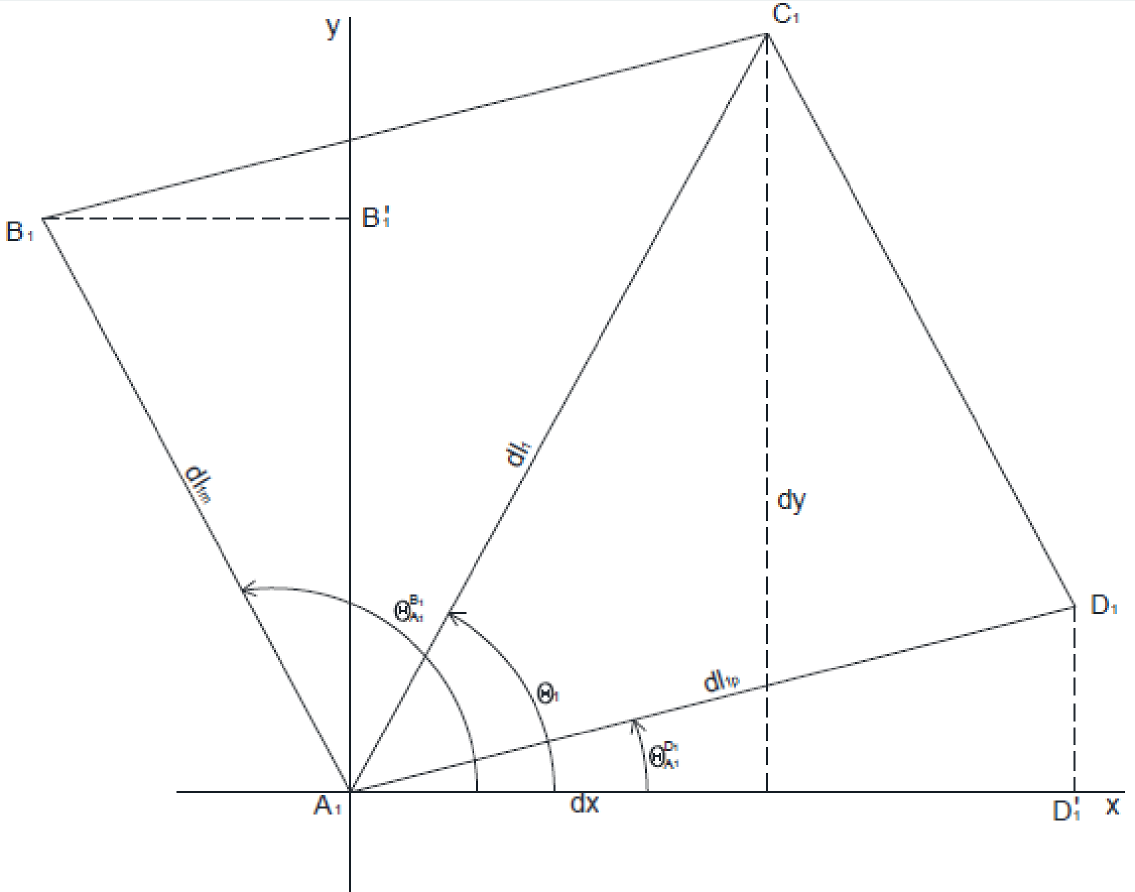
Gráficamente podemos deducir:



Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1'\ A_1\ C_1$.

Gráficamente podemos deducir:

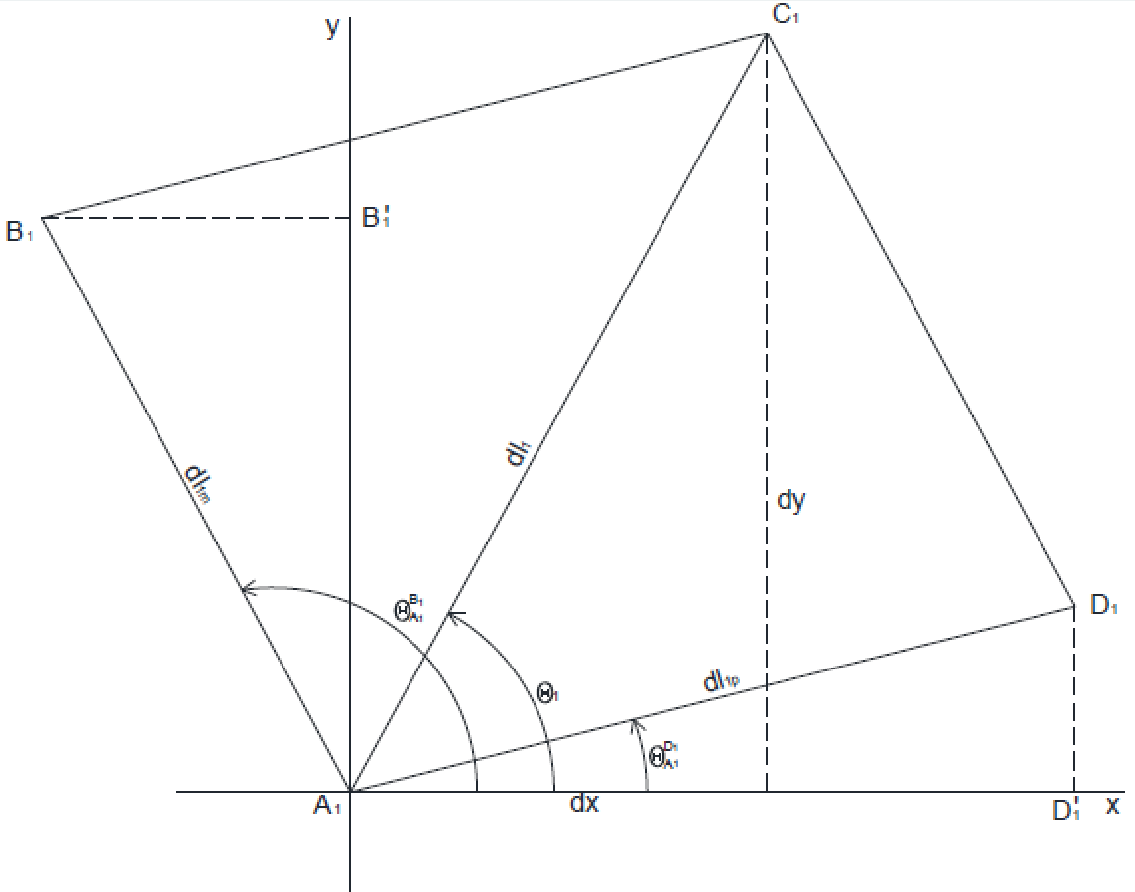


$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo D_1' A_1 C_1.

Gráficamente podemos deducir:



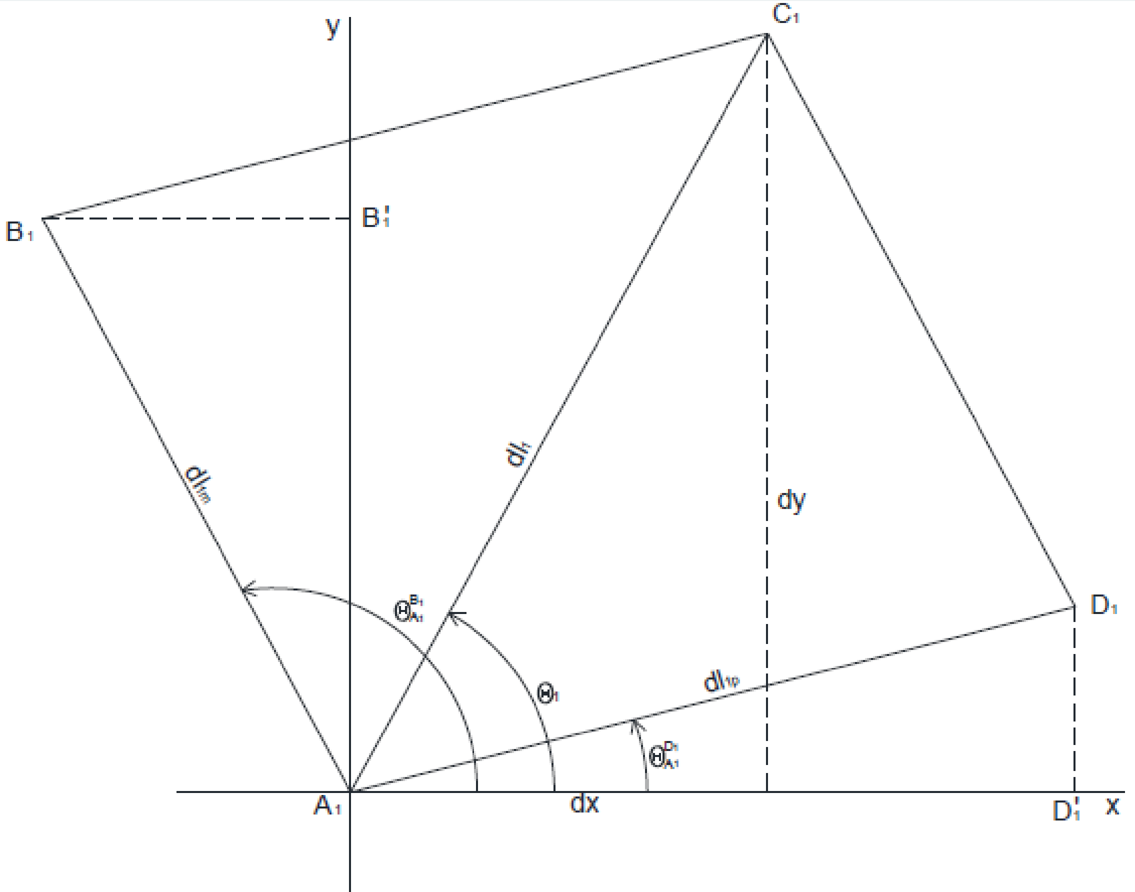
$$\tan \theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

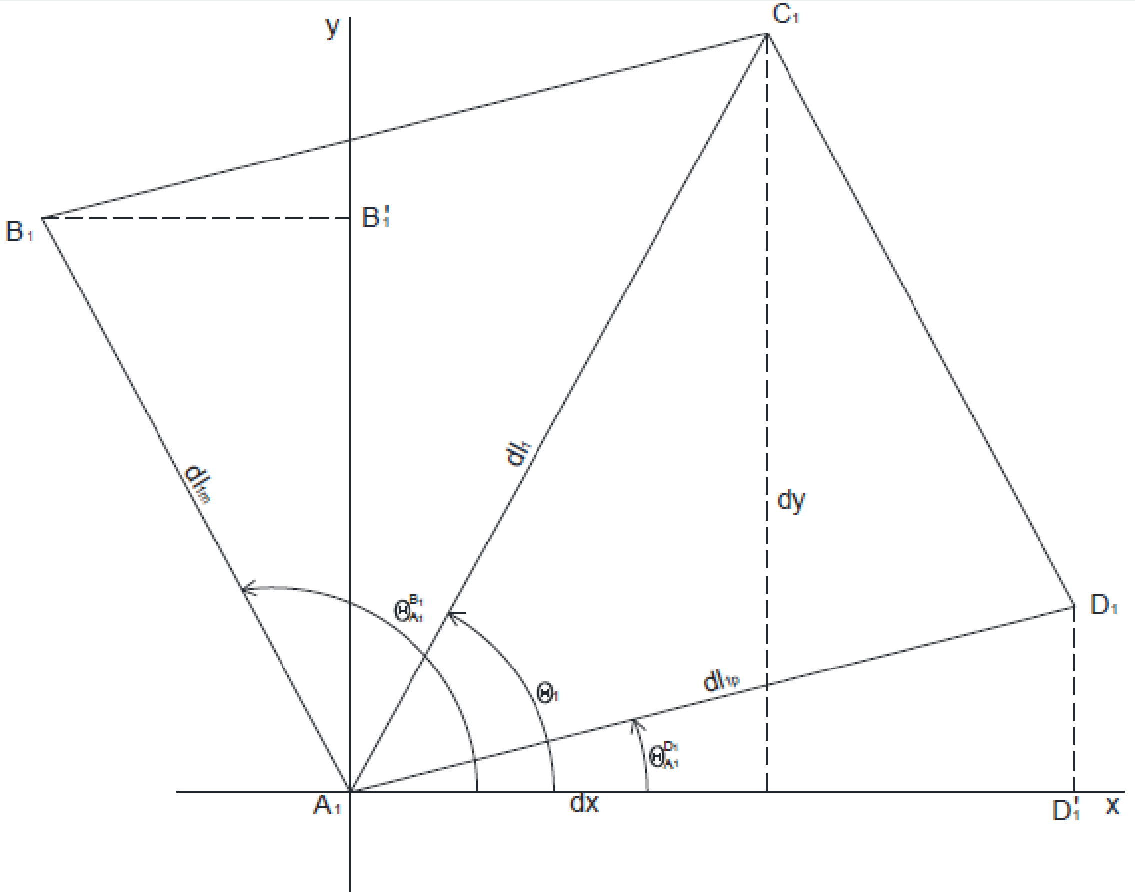
$$\sin\theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

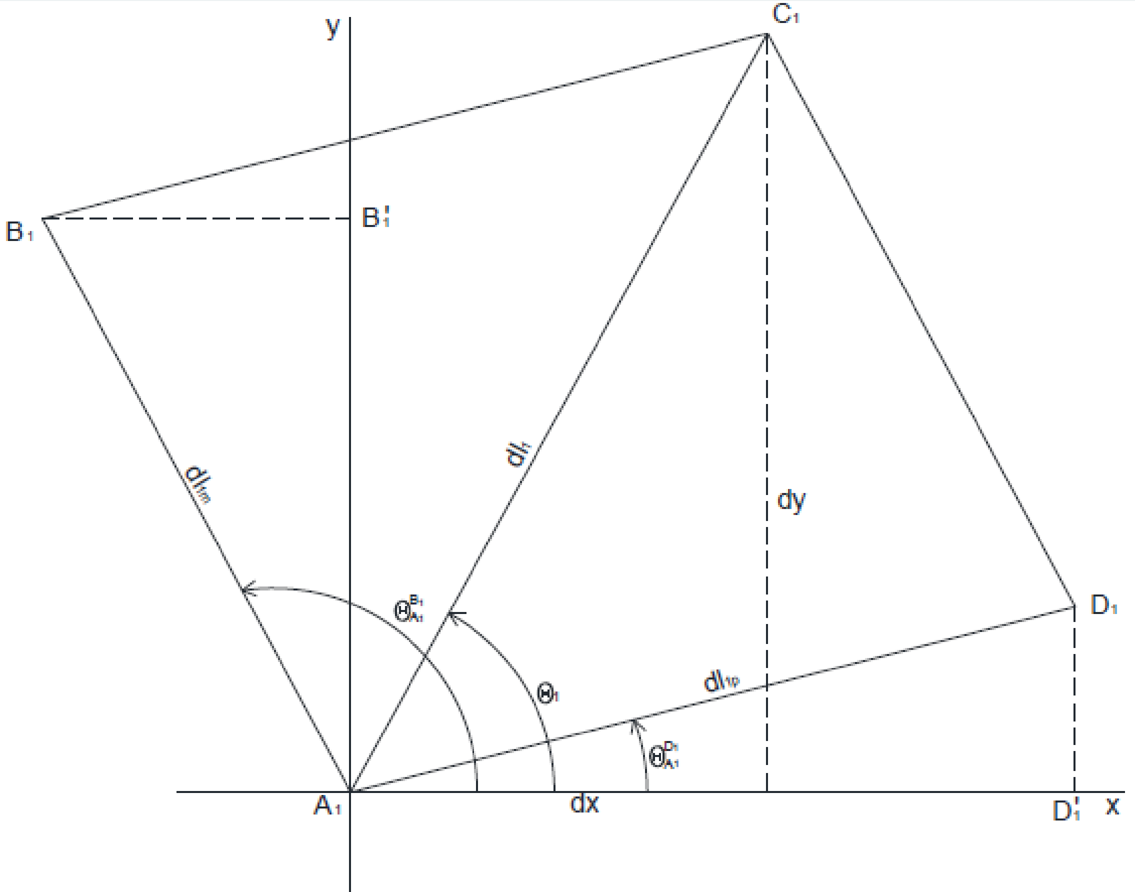
$$\cos\theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\tan\theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1'}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx} \qquad \sin\theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \qquad \cos\theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

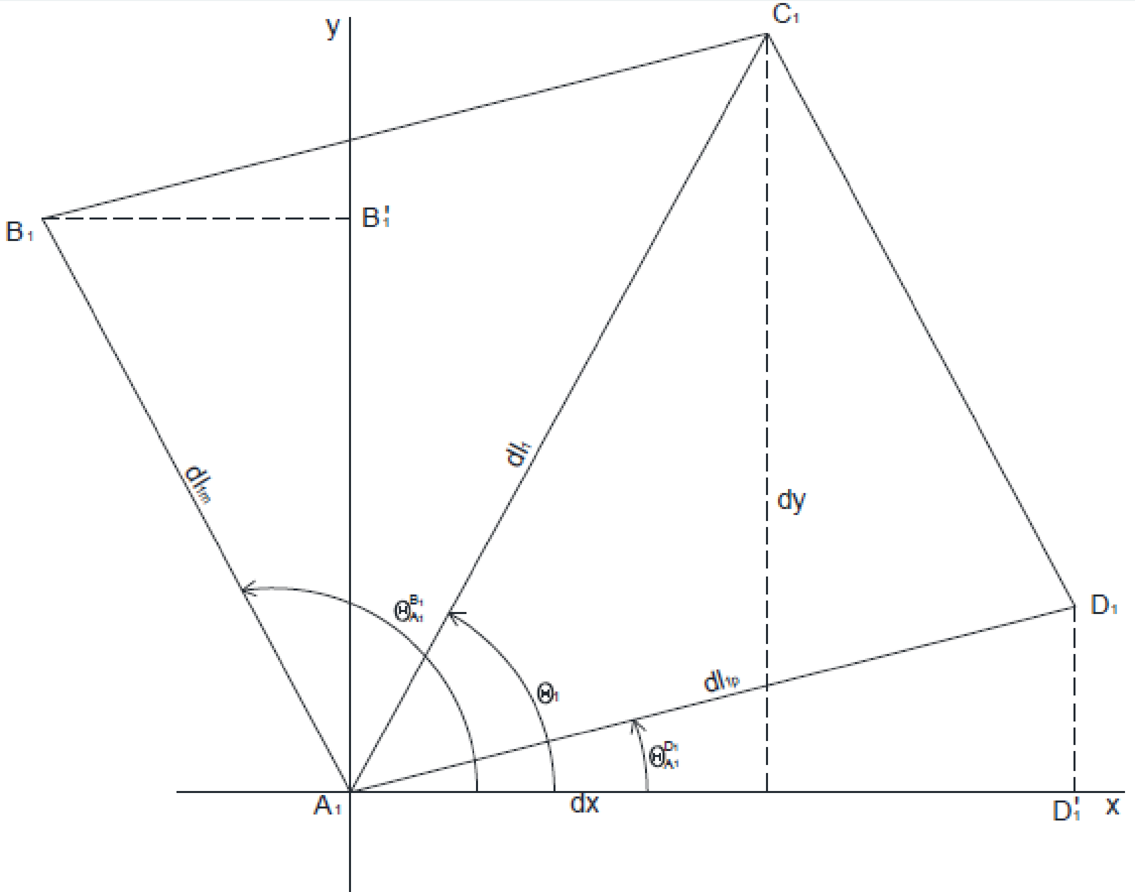
$$\tan\theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1'}$$

Nos detenemos en esto.

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\tan\theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1'}$$

Nos detenemos en esto.

Veamos que $D_1D'_1$ es la variación en la coordenada *y*, cuando se produce un desplazamiento de A_1 hasta D_1 en el plano, exclusivamente por el desplazamiento de A hasta D en el elipsoide, sólo por la variación de λ (desplazamiento sobre un paralelo):

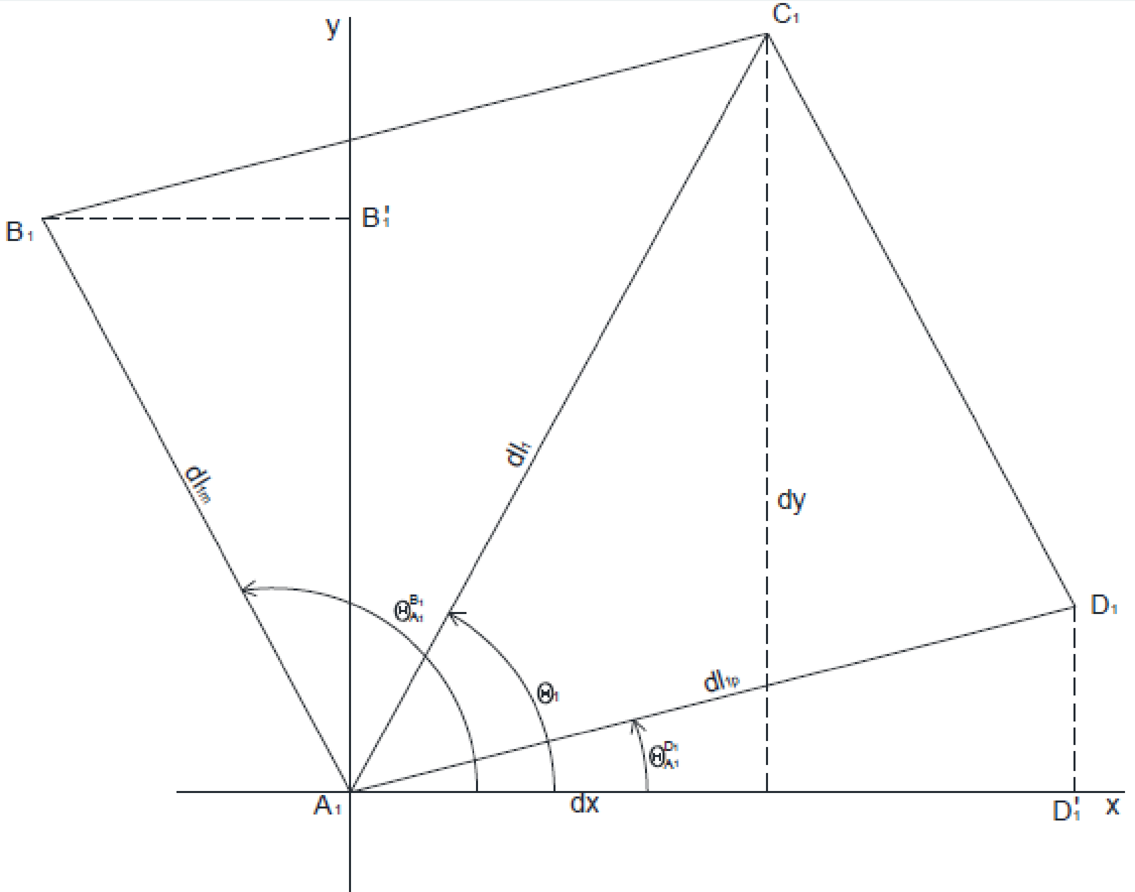
Elementos diferenciales en el plano

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' \, A_1 \, C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan \theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\tan \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1'}$$

Nos detenemos en esto.

Veamos que $D_1D'_1$ es la variación en la coordenada *y*, cuando se produce un desplazamiento de A_1 hasta D_1 en el plano, exclusivamente por el desplazamiento de A hasta D en el elipsoide, sólo por la variación de λ (desplazamiento sobre un paralelo):

$$D_1 D_1' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

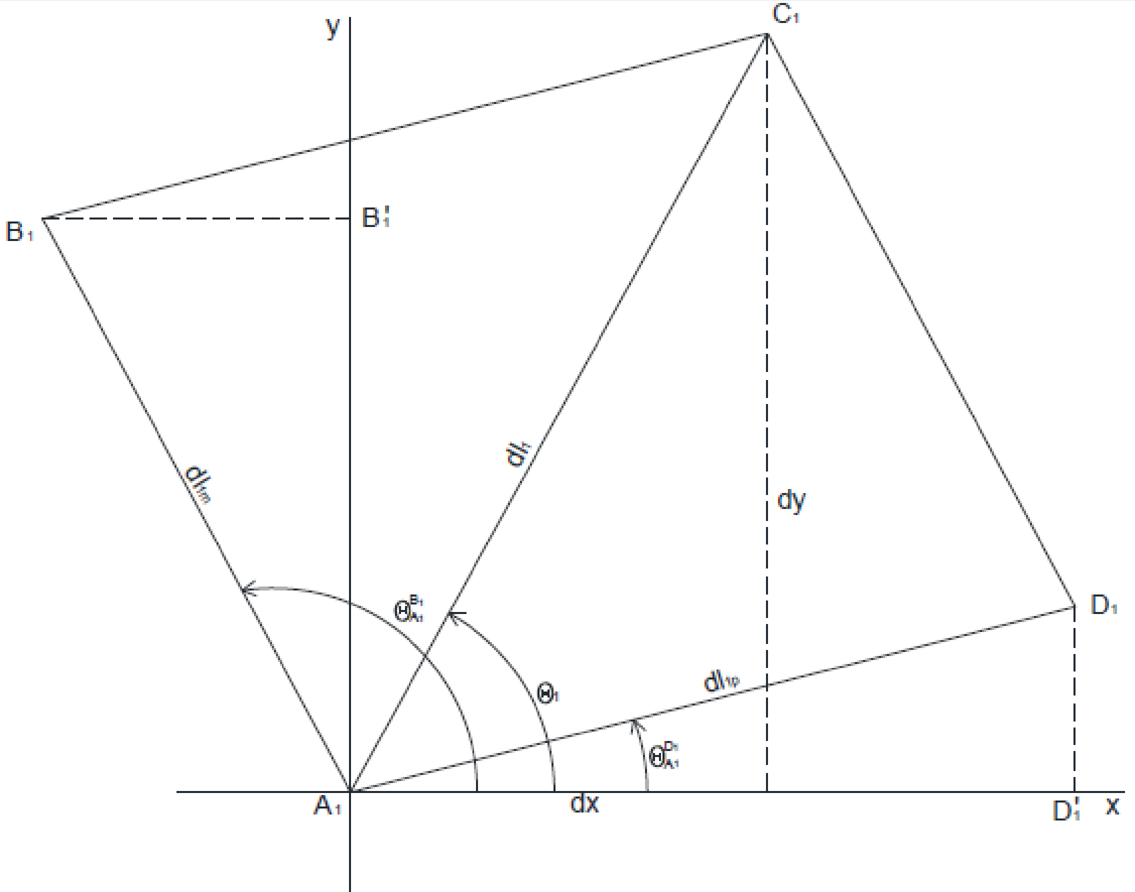
Análogamente, $A_1D'_1$ es la variación en la coordenada *x*:

$$A_1 D_1' = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan \theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\tan \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1'}$$

$$D_1 D_1' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

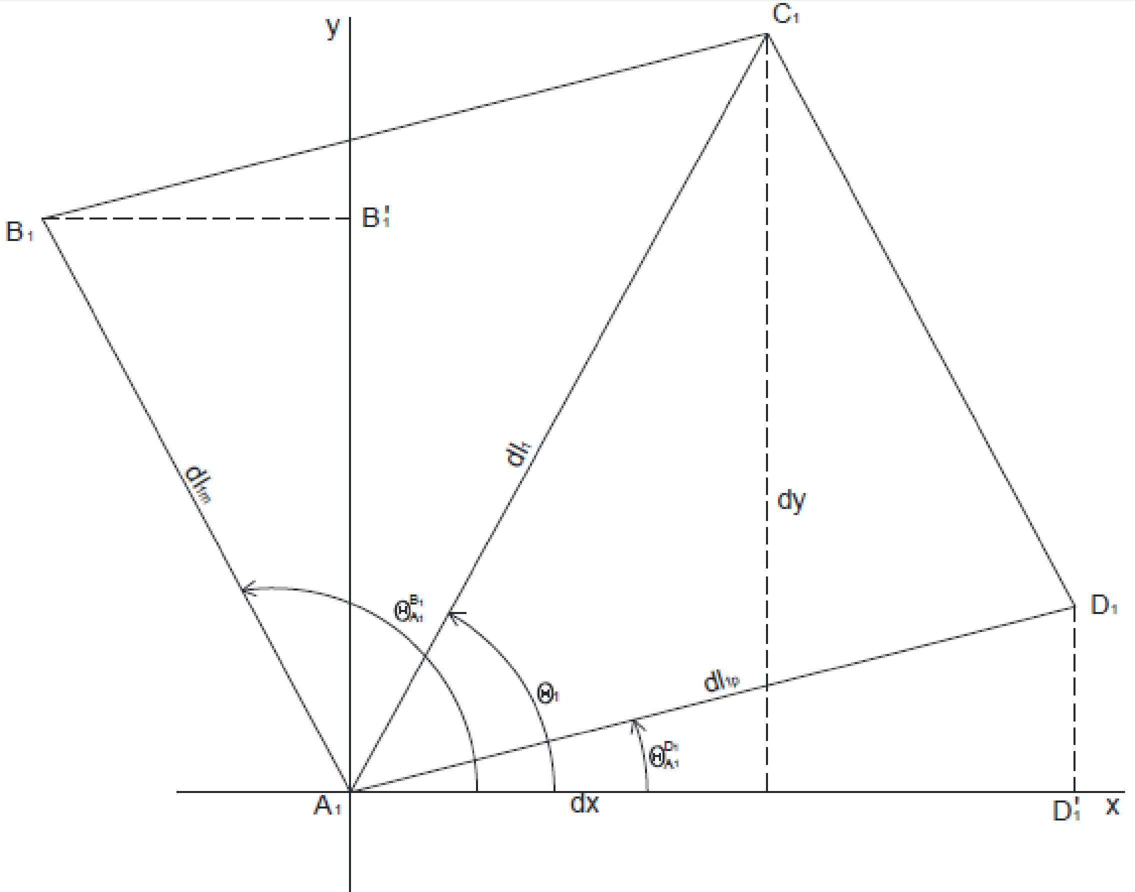
$$A_1 D_1' = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$\tan \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan \theta_1 = \frac{dy}{dx} \qquad \sin \theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \qquad \cos \theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\tan \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1'}$$

$$D_1 D_1' = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$A_1 D_1' = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

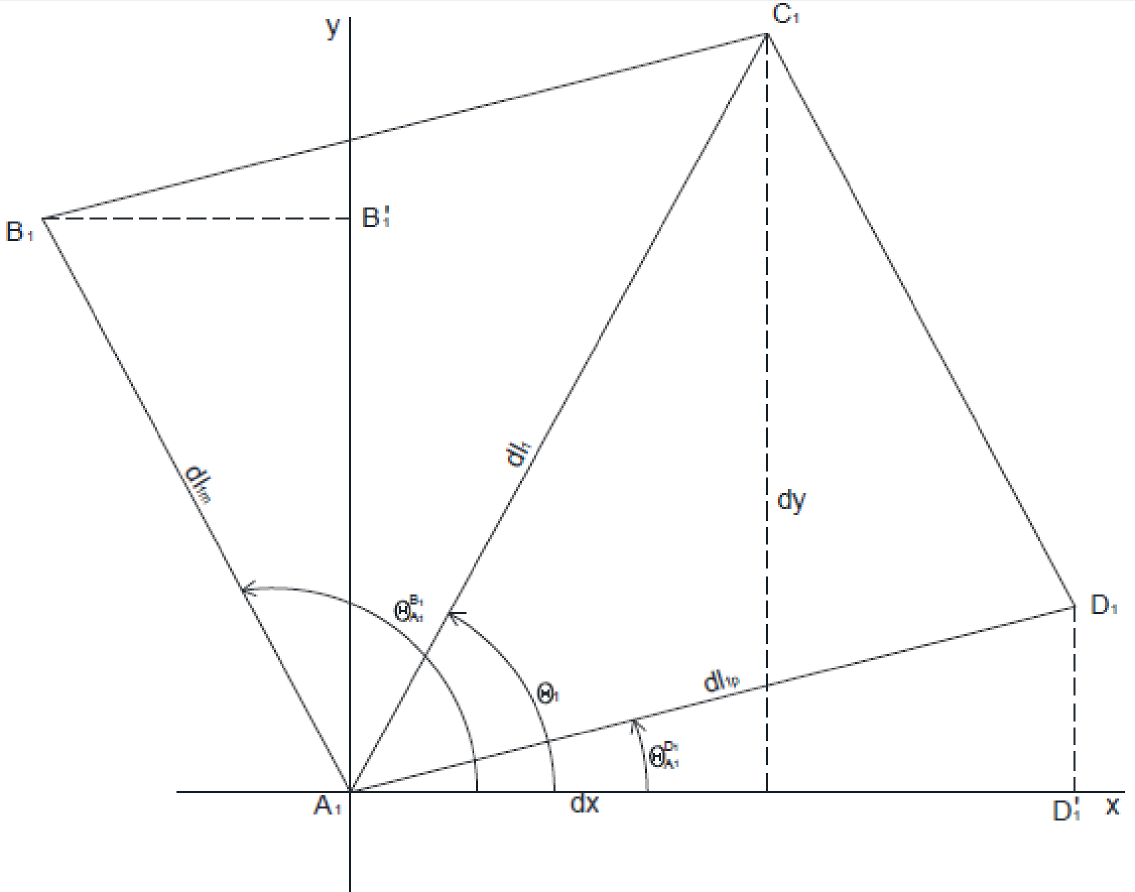
$$\tan \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

$$\sin \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D_1'}{A_1 D_1} = \frac{D_1 D_1'}{dl_{1p}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \qquad \cos \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{A_1 D_1'}{A_1 D_1} = \frac{A_1 D_1'}{dl_{1p}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento angular en el plano, θ_1, corresponde al ángulo $D_1' A_1 C_1$.

Gráficamente podemos deducir:



$$\tan\theta_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{dy}{dl_1} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{dx}{dl_1} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Análogamente para θ_{A1}^{B1}:

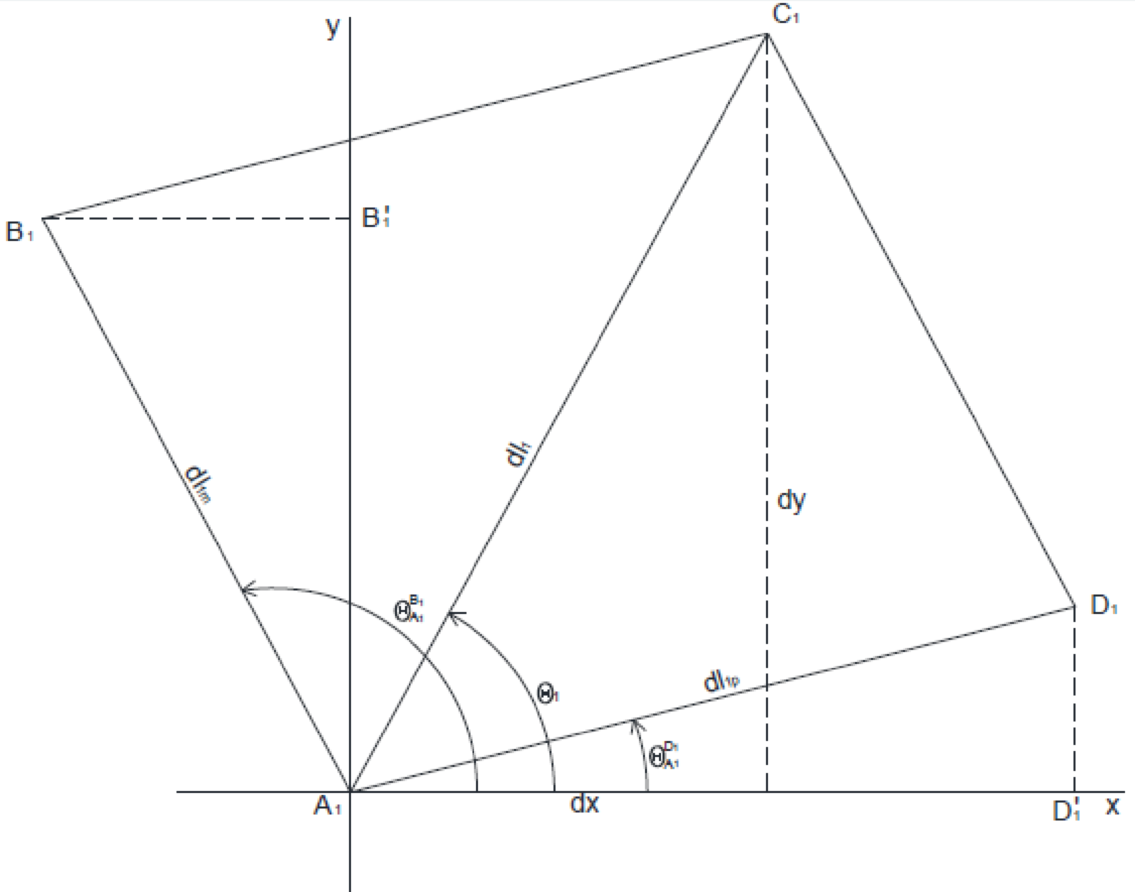
$$\sin\theta_{A_1}^{B_1} = \frac{A_1B_1'}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1'}{dl_{1m}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi}{\sqrt{E}\,d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$

$$\cos\theta_{A_1}^{B_1} = \frac{B_1B_1'}{A_1B_1} = \frac{B_1B_1'}{dl_{1m}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi}{\sqrt{E}\,d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento superficial, ds_1, corresponde al área del cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.

$$ds_1 = A_1B_1 . A_1D_1 . \sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right)$$



Elementos diferenciales en el plano

El elemento superficial, ds_1, corresponde al área del cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.

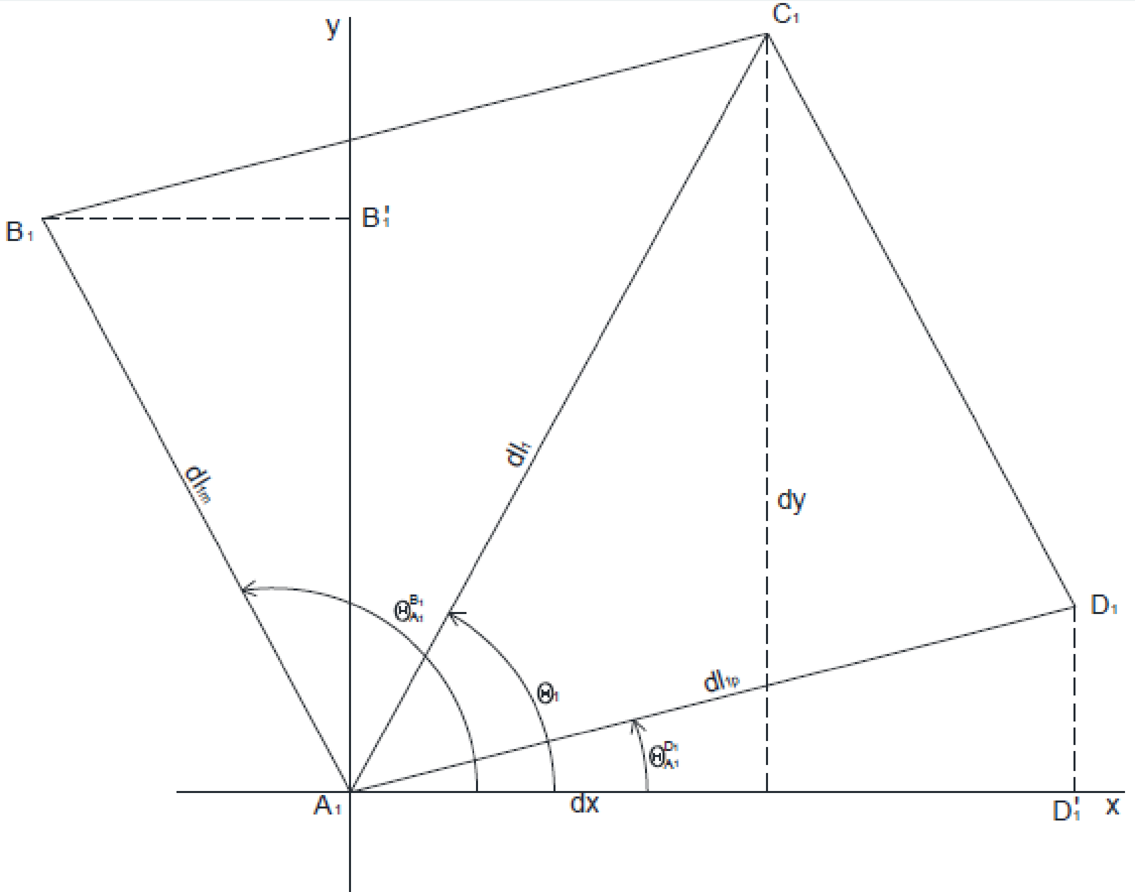
$$ds_1 = A_1B_1 . A_1D_1 . \sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right)$$

Pero sabemos que: $A_1B_1 = \sqrt{E}d\varphi$

y que: $A_1D_1 = \sqrt{G}d\lambda$

Además, se cumple:

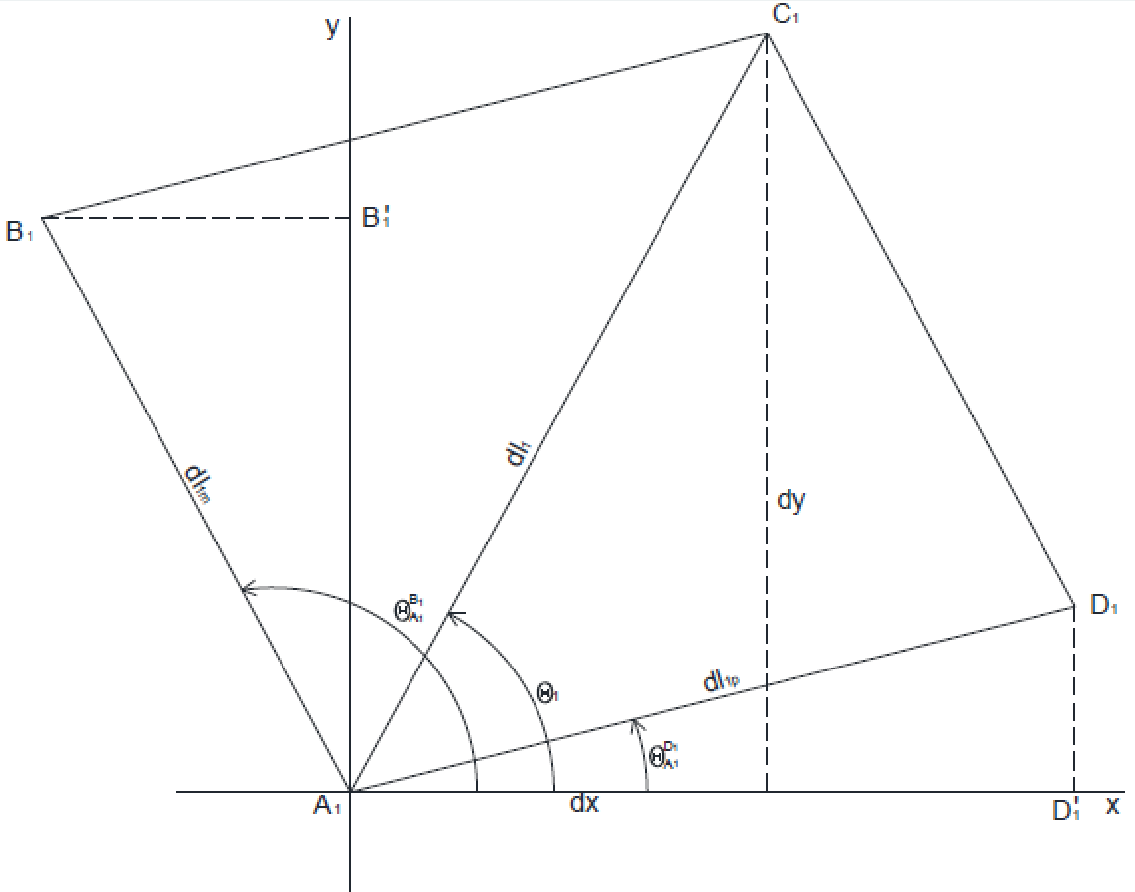
$$\sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right) = \sin\theta_{A_1}^{B_1}\cos\theta_{A_1}^{D_1} - \cos\theta_{A_1}^{B_1}\sin\theta_{A_1}^{D_1}$$



Elementos diferenciales en el plano

El elemento superficial, ds_1, corresponde al área del cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.

$$ds_1 = A_1B_1 . A_1D_1 . \sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right)$$



Pero sabemos que: $A_1B_1 = \sqrt{E}d\varphi$

y que: $A_1D_1 = \sqrt{G}d\lambda$

Además, se cumple:

$$\sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right) = \sin\theta_{A_1}^{B_1}\cos\theta_{A_1}^{D_1} - \cos\theta_{A_1}^{B_1}\sin\theta_{A_1}^{D_1}$$

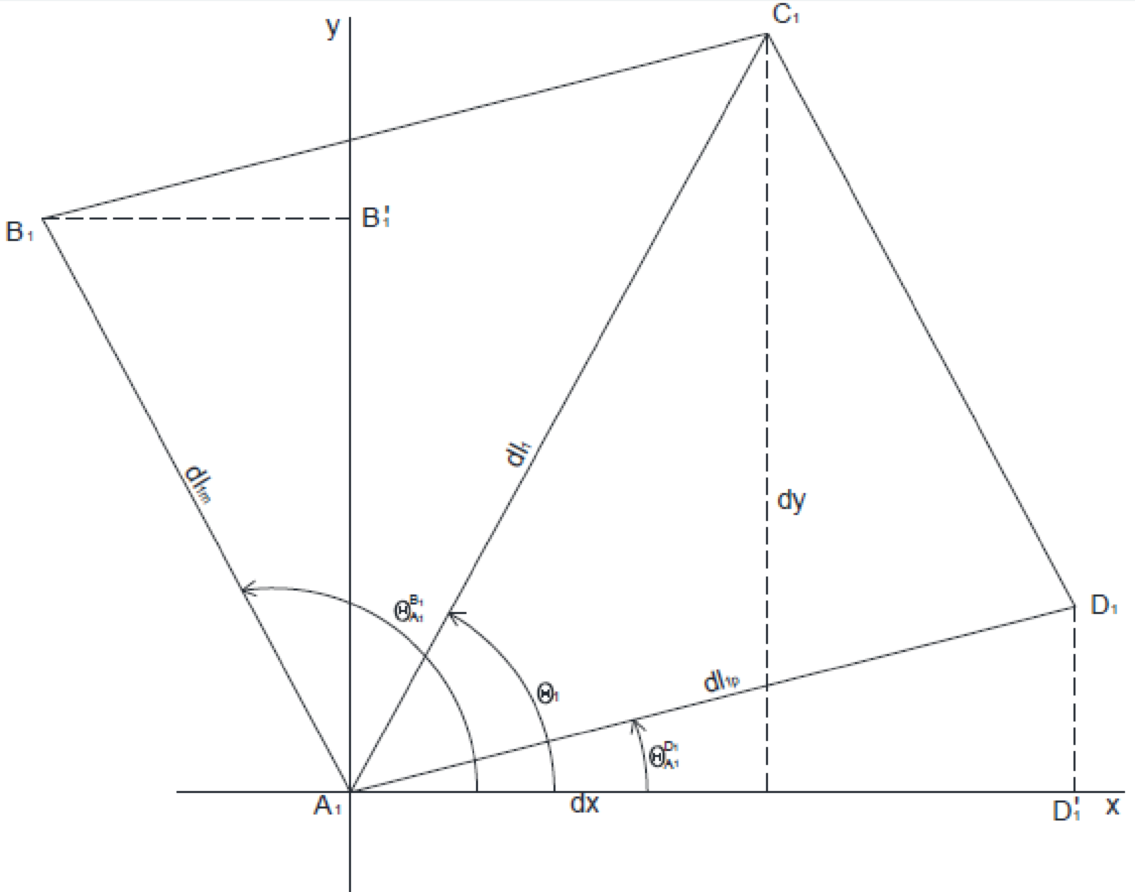
Sustituyendo arriba:

$$ds_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{G}} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{G}}\right]\sqrt{E}d\varphi\sqrt{G}d\lambda$$

Elementos diferenciales en el plano

El elemento superficial, ds_1, corresponde al área del cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.

$$ds_1 = A_1B_1 . A_1D_1 . \sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right)$$



Pero sabemos que: $A_1B_1 = \sqrt{E}d\varphi$

y que: $A_1D_1 = \sqrt{G}d\lambda$

Además, se cumple:

$$\sin\left(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}\right) = \sin\theta_{A_1}^{B_1}\cos\theta_{A_1}^{D_1} - \cos\theta_{A_1}^{B_1}\sin\theta_{A_1}^{D_1}$$

Sustituyendo arriba:

$$ds_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{G}} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{G}}\right]\sqrt{E}d\varphi\sqrt{G}d\lambda$$

Simplificando: $$ds_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]d\varphi d\lambda$$

Coeficientes de anamorfosis

Como vimos en el Postulado de Gauss, al proyectar la superficie terrestre representada por un elipsoide de revolución en un plano, se producirán deformaciones o anamorfosis en los elementos lineales, angulares y superficiales.

Coeficientes de anamorfosis

Como vimos en el Postulado de Gauss, al proyectar la superficie terrestre representada por un elipsoide de revolución en un plano, se producirán deformaciones o anamorfosis en los elementos lineales, angulares y superficiales.

L

Módulo de deformación lineal

A

Módulo de deformación angular

S

Módulo de deformación superficial

Coeficientes de anamorfosis

L

Módulo de deformación lineal

Coeficientes de anamorfosis

L

Módulo de deformación lineal

Se calcula como el cociente entre el elemento de longitud en el plano (***dl₁***) y su homólogo en el elispoide (***dl***):

$$L = \frac{dl_1}{dl} = \frac{\sqrt{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 + 2Fd\varphi d\lambda}}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}}$$

Coeficientes de anamorfosis

A

Módulo de deformación angular

Se calcula como la diferencia entre un ángulo en el plano θ_1 y su homólogo en el elipsoide θ :

Coeficientes de anamorfosis

A

Módulo de deformación angular

Se calcula como la diferencia entre un ángulo en el plano θ_1 y su homólogo en el elipsoide θ :

$A = \theta_1 - \theta$ siendo $\tan \theta_1 = \frac{dy}{dx}$

y $\tan \theta = \frac{\rho d\varphi}{r d\lambda}$

Coeficientes de anamorfosis

S

Módulo de deformación superficial

Se calcula como el cociente entre un elemento de superficie en el plano (***dS_1***) y su homólogo en el elipsoide (***dS***):

Coeficientes de anamorfosis

S

Módulo de deformación superficial

Se calcula como el cociente entre un elemento de superficie en el plano (***ds₁***) y su homólogo en el elispoide (***ds***):

$$S = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right] d\varphi d\lambda}{\rho N \cos\varphi \, d\varphi d\lambda} = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]}{\underbrace{\rho N \cos\varphi}_{r}}$$