

PRÁCTICO 4: NÚMEROS PRIMOS Y TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA.

Ejercicio 1. Se consideran los siguientes números naturales:

$$a = 1485000, \quad b = 15^4 \times 42^3 \times 56^5, \quad c = 15!, \quad d = 1485000^3, \quad e = (15!)^5.$$

Para cada número:

- Hallar la descomposición en factores primos.
- Determinar la cantidad de divisores positivos.
- Determinar si es un cuadrado perfecto.

Ejercicio 2.

- Hallar el menor número natural n tal que $6552 \times n$ sea un cuadrado perfecto.
- Hallar el menor número natural m para el cual $1260 \times m$ sea un cubo perfecto.

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros positivos a y b que satisfagan:

- $a^2 = 8b^2$.
- $a^2 = 3b^3$.
- $7a^2 = 11b^2$.

Ejercicio 4. Determinar el menor cuadrado perfecto que es divisible entre $7!$.

Ejercicio 5. Hallar los números naturales $n \leq 1000$ que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

Ejercicio 6. Hallar los números naturales a y b que cumplen: $\text{mcd}(a, b) = 18$, a tiene 21 divisores positivos y b tiene 10 divisores positivos.

Ejercicio 7. Sean a y b enteros positivos. Demostrar que: $\text{mcd}(a^n, b^n) = \text{mcd}(a, b)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 8. Demostrar que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ si y solamente si n tiene un número impar de divisores positivos.

Ejercicio 9. Demostrar que \sqrt{pq} y $\log_{30}(pq)$ son irracionales para cualquier par de primos distintos p, q .

Ejercicio 10.

- Probar que un número de la forma: $99 \dots 99$, con una cantidad par de 9s, no puede ser cuadrado perfecto. Sugerencia: usar que $n^2 + 1$ no es cuadrado perfecto para ningún $n \in \mathbb{N}$.
- Probar que $11 \dots 11$, con una cantidad par de 1s, no puede ser cuadrado perfecto.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 11. Sea (p_n) la sucesión de los números primos. Es decir: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.

- Probar que se cumple: $p_1 p_2 \dots p_n + 1 \geq p_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sugerencia: razonando por absurdo, probar que $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que ningún primo divide a $p_1 p_2 \dots p_n + 1$.
- ¿Es cierto que $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ es primo para todo $n \in \mathbb{N}$?

Ejercicio 12.

- ¿Existen dos cuadrados perfectos cuya diferencia sea 311?
- ¿Existen dos cubos cuya suma sea 311? Sugerencia: observar que $f(x, y) = x^3 + y^3$ tiene raíz $x = -y$, y usar esto para factorizar $x^3 + y^3$.

Ejercicio 13. En el pasillo de un hospital hay 2014 habitaciones, numeradas del 1 al 2014. En un principio están todas las puertas cerradas. Cuando pasa el primer paciente, abre la puerta de cada habitación. Luego pasa el segundo paciente y cierra las puertas 2, 4, 6, 8, ... Pasa el tercer paciente y cambia de estado las puertas 3, 6, 9, 12, ... (es decir, la cierra si estaba abierta y la abre si estaba cerrada). Así hasta que pasa el paciente 2014, que cambia de estado la puerta 2014. ¿Cuántas puertas abiertas quedan luego de pasar los 2014 pacientes?

Ejercicio 14.

- Probar que si $p > 2$ es primo, entonces es de la forma $4k + 1$ o $4k + 3$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Sugerencia: trabajar con el resto de una división entera, analizando cada posible valor del resto.
- Probar que si $p > 3$ es primo, entonces es de la forma $6k + 1$ o $6k + 5$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- Probar que existen infinitos primos de la forma $4k + 3$. Sugerencia: imitar la prueba de Euclides sobre la infinitud de primos.

Ejercicio 15.

- Sean a y b naturales primos entre sí. Probar las siguientes afirmaciones.
 - a^2 y b^2 son primos entre sí.
 - $a + b$ y ab son primos entre sí.
- Determinar las parejas de números naturales (a, b) que verifican $5 \times (a + b)^2 = 147 \times \text{mcm}(a, b)$.
Sugerencia: escribir $a = ca^*$ y $b = cb^*$ con a^* y b^* coprimos y aplicar i) a a^* y b^* .