ESTIMADOR DE MAXIMA VEROSIMILITUD (MLE)

Ejercicio 1 Estimación por máxima verosimilitud
Sea $X_1, \dots, X_n$ un muestreo aleatorio de una distribución discreta con recorrido $\{0, 1, 2, 3\}$. Supongamos que el parámetro θ solo puede tomar los valores $\theta = 0$ y $\theta = 1$. La función de probabilidad puntual para $\theta = 0$ y $\theta = 1$ es:

	$\theta = 0$	$\theta = 1$
$X = 0$	0.1	0.2
$X = 1$	0.3	0.4
$X = 2$	0.3	0.3
$X = 3$	0.3	0.1

Se tiene una muestra con $n = 6$ y los datos son 0,3,1,2,0,3. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

Ejercicio 2 Bayes vs. Máxima verosimilitud
Se tiene 3 monedas con probabilidad de cara p igual a 0.4, 0.5 y 0.6, respectivamente. Beto toma una de las monedas y se la da a Ana. Después de lanzar la moneda 100 veces, Ana obtiene cara 53 veces.

1. Hallar una estimación de p basada en el método de máxima verosimilitud.
2. Si se sabe que Beto elige las monedas con probabilidad 0.1, 0.4, y 0.5 respectivamente. ¿Cambiarías tu estimación?

Ejercicio 3 Momentos vs. Máxima verosimilitud
Sea $X_1, \dots, X_n$ un muestreo i.i.d. de una distribución normal $N(\theta, \theta)$.

1. Calcular los estimadores de momentos $\hat{\theta}_M$ y de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_{MLE}$ de θ.
2. Nos enfocamos en esta parte en el estimador de máxima verosimilitud.
   a) Probar que $\hat{\theta}_{MLE}$ es sesgado pero asíntóticamente insesgado
   b) Probar que $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MLE})$ alcanza la cota de Cramer Rao. Se dice que es asíntoticamente eficiente.

Ejercicio 4 Sesgo de un estimador
Un estimador $\hat{\theta}$ de un parámetro θ tiene distribución normal.

Se sabe además que $\mathrm{ECM}\left(\hat{\theta}\right) = 8$ y $\mathbf{P}\left(\hat{\theta} \leq \theta\right) = 0{,}8413$. Hallar el sesgo de $\hat{\theta}$.

Ejercicio 5 Comparación de estimadores
Ana y Beto saben que el delivery llega en un tiempo uniforme en el intervalo $[0, a]$, en donde 0 es el momento en el que hacen el pedido, y a es un valor desconocido. Se deciden a estimar a, y para esto disponen de un muestreo aleatorio $X_1, \dots, X_n$. Proponen los siguientes estimadores:

$$A_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\} \text{ y } B_n = 2\overline{X}_n.$$

1. Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de B_n. Determinar si B_n es consistente.
2. Demostrar que la densidad de A_n es
$$p_A(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{a^n} & \text{si } 0 \leq x \leq a; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$
3. Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de A_n. ¿Es asintóticamente insesgado?

Ejercicio 6 Estimador de mínima varianza
Se considera la condición (C): $\partial_\theta \ell(\theta,x) = I(\theta)(T(x)-\theta)$

1. Probar que si un estimador $T(x)$ satisface la condición (C) entonces $I(\theta)$ es la información de Fisher de θ.
2. Probar que si $\hat{\theta}_{MLE}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ y $T(x)$ cumple con la condición (C) entonces $T(x) = \hat{\theta}_{MLE}$.

Ejercicio 7 El método delta
Sea X una variable aleatoria con la siguiente densidad de probabilidad:

$$p(x;a) = \begin{cases} (a+1)x^a & \text{si } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea $X_1,\dots,X_n$ un muestreo aleatorio de X.

1. Hallar el estimador de máxima verosimilitud $\hat{a}$ de a.
2. Hallar la densidad de $Y = -\ln(X)$ y calcular $\mu = \mathrm{E}(Y)$ en función de a.
3. Verificar que $\hat{a} = g\left(\overline{Y}_n\right)$, con $g(y) = \frac{1}{y} - 1$ y probar que $\hat{a}$ es consistente.
4. Usando el desarrollo $\hat{a} - a = g\left(\overline{Y}_n\right) - g(\mu) \approx g'(\mu)\left(\overline{Y}_n - \mu\right)$ para n grande:
   a) Probar que $\hat{a}$ es asintóticamente insesgado;
   b) Hallar la varianza asintótica de $\hat{a}$.
   c) ¿Es $\hat{a}$ asintóticamente normal?
5. Se dispone de la siguiente muestra de X:

   0.56 0.82 0.71 0.87 0.33 0.36 0.93 0.94 0.89 0.42

   Hallar un intervalo de confianza asintótico para a al nivel 0.9.

Ejercicio 8 Transformación de estimadores eficientes
Supongamos que $\hat{\theta}$ es un estimador eficiente de θ (insesgado y alcanza la cota de Cramer Rao).

1. Consideramos la transformación $f(\theta) = a\theta + b = \alpha$.

   Probar que $\hat{f}(\theta) = a\hat{\theta} + b$ es un estimador eficiente de $\alpha = f(\theta)$
2. Si $f(\theta) = \theta^2$ muestre que $\hat{f}(\theta) = \hat{\theta}^2$ deja de ser eficiente para θ^2 pero sí lo es asintóticamente. Se sugiere considerar $\hat{\theta} = \overline{X_n}$ estimador de μ con una muestra $X_1,\dots,X_n$ iid de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Ejercicio 9 Divergencia de Kullback Leibler
Pruebe que $D(p||q) \geq 0$ y que $D(p||q) = 0 \Leftrightarrow p(x) = q(x)\,\forall x$

Ejercicio 10 Información de Fisher
Calcular la información de Fisher en cada uno de los casos siguientes:

(a) Si $X \sim Ber(p)$ (b) $X \sim exp(\lambda)$ (c) $X \sim \mathcal{N}(\mu,4)$

Ejercicio 11 Cramer Rao generalizado
Si $\hat{\theta}_n$ es un estimador θ con $\mathbb{E}_{x\sim f_\theta}(\hat{\theta}_n) = \tau(\theta)$ entonces $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{|\tau'(\theta)|^2}{nI_1(\theta)}$