

# Canal inalámbrico

Friis, espacio libre variación con distancia y frecuencia

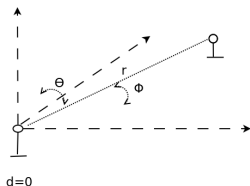


Figure – Antenas

$$P_r = P_t G_r(\theta, \phi) G_t(\theta, \phi) \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{d^2} = a^2 P_t \quad (1)$$

$$r(t) = a(\theta, \phi, f, d) e^{j2\pi f(t-d/c)} \quad (2)$$

# Canal inalámbrico

## Shadow Fading

$$Pr = P_t G_r(\theta, \phi) G_t(\theta, \phi) \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{d^2} 10^X \quad (3)$$

$$X \text{ v.a. Gaussiana de media cero y varianza } \sigma_r \quad (4)$$

# Canal inalámbrico

## Fading - Multicamino

Multicamino : dispersión en el tiempo por los diferentes retardos de los diferentes caminos.

$$h(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \delta(\tau - \tau_i) \text{ y } H(f) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i e^{-j2\pi f \tau_i}$$

La dispersión temporal genera variaciones en el módulo de la respuesta en frecuencia. Dispersión temporal (delay spread) :

$$\mathcal{T} = \max_j \tau_j(t) - \min_j \tau_j(t) \quad (5)$$

Un parámetro relacionado con este es la frecuencia de coherencia del canal definida como :

$$\mathcal{F}_{coh} = \frac{1}{\mathcal{T}} \quad (6)$$

# Canal inalámbrico

## Fading - Multicamino

La respuesta temporal se extiende desde  $\min_i \tau_i$  hasta  $\max_i \tau_i$ ,  $\mathcal{T}$ .  
Si la señal tiene ancho de banda  $B$

- 1 Si  $B \ll \mathcal{F}_{coh}$  desvanecimiento plano (flat fading).
- 2 Si  $B \approx \mathcal{F}$  : desvanecimiento selectivo en frecuencia (frequency selective fading).

# Canal inalámbrico

## Movimiento : Multicamino y Doppler

$$H(f, t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) e^{-j2\pi f \tau_i(t)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) e^{-j2\pi f (\tau_{0i} + v/c \cos(\alpha_i) t)}$$

Esta ecuación se puede escribir en función del desplazamiento Doppler  $\mathcal{D}_i = v/\lambda \cos(\alpha_i)$ .

Si la entrada sinusoidal  $e^{j2\pi f t}$  la salida será

$$r(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i e^{-j2\pi f \tau_{0i}} e^{j2\pi (f - \mathcal{D}_i) t} \quad (7)$$

# Canal inalámbrico

## Fading-Doppler

La dispersión en frecuencia  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{max} - \mathcal{D}_{min}$  genera variaciones temporales en el módulo de la señal de salida

$$|r(t)| = \left| \sum_{i=0}^{m-1} a_i e^{-j2\pi f\tau_{0i}} e^{-j2\pi \mathcal{D}_i t} \right| \quad (8)$$

Si hay un solo camino no hay variaciones del módulo de  $r(t)$

$$\mathcal{T}_{coh} = \frac{1}{\mathcal{D}} : \text{orden de magnitud del tiempo de desvanecimiento} \quad (9)$$

Si la señal tiene ancho de pulso  $T$

- 1 Si  $T \ll \mathcal{T}_{coh}$  se tiene slow fading o fading plano en l tiempo
- 2 Si  $T \approx \mathcal{T}$  : Fast fading.

# Canal inalámbrico

## Modelo banda base tiempo continuo

Relación banda base a pasabanda :

$$s(t) = \Re(s_b(t)e^{j2\pi f_c t})$$

$$r(t) = \Re(r_b(t)e^{j2\pi f_c t})$$

$$r(t) = s(t) * \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)\delta(t - \tau_i(t))$$

$$r(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)\Re(s_b(t - \tau_i(t))e^{j2\pi f_c(t - \tau_i(t))}) =$$

$$r(t) = \Re\left(\left\{\sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)s_b(t - \tau_i(t))e^{-j2\pi f_c \tau_i(t)}\right\}e^{j2\pi f_c t}\right)$$

# Canal inalámbrico

## Modelo banda base tiempo continuo

$$r_b(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) s_b(t - \tau_i(t)) e^{-j2\pi f_c \tau_i(t)}$$

$$r_b(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib}(t) s_b(t - \tau_i(t)) \text{ donde } a_{ib}(t) = a_i(t) e^{-j2\pi f_c \tau_i(t)} \quad (10)$$

Equivalente bandabase del canal

$$h_b(\tau, t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib}(t) \delta(t - \tau_i(t))$$



# Canal inalámbrico

## Modelo banda base tiempo discreto

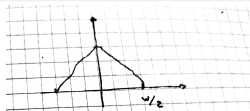


Figure – Señal banda base

Si la señal  $s_b(t)$  está limitada en frecuencia a  $W/2$ , si la muestreo cada tiempo  $T = 1/W$  se puede escribir por el Teorema de Muestreo :

$$s_b(t) = \sum_k s_b(kT) \operatorname{sinc}(t/T - k)$$

Si se denomina  $s_b[k] = s_b(kT)$  y asumimos por ahora que  $a_i$  y  $\tau_i$  no cambian con el tiempo (mas adelante lo agregaremos)

$$r_b(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib} \sum_k s_b[k] \operatorname{sinc}((t - \tau_i)/T - k)$$

# Canal inalámbrico

## Modelo banda base tiempo discreto

Si la salida se muestrea a la misma frecuencia que la entrada y se denomina  $r_b[n] = r_b(nT)$

$$r_b[n] = \sum_k s_b[k] \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib} \operatorname{sinc}(n - k - \tau_i/T)$$

$$r_b[n] = \sum_j s_b[n - j] \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib} \operatorname{sinc}(j - \tau_i/T)$$

# Canal inalámbrico

## Modelo banda base tiempo discreto

Lo anterior es el producto de convolución de  $s_b$  y un filtro  $h$  cuyo  $j$ -ésimo tap de la respuesta al impulso del canal en banda base se define como :

$$h_j = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib} \operatorname{sinc}(j - \tau_i/T) \quad (11)$$

el tap  $j$  es una función principalmente de los  $a_{ib}$  tales que  $j - \tau_i/T \approx 0$ , es decir aquellos caminos cuyo retardo es próximo a  $jT$ . Si se considera la dependencia del tiempo de  $a_i(t)$  y  $\tau_i(t)$  entonces

$$h_j[n] = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ib}[nT] \operatorname{sinc}(j - \tau_i[nT]/T) \quad (12)$$

# Canal inalámbrico

## Modelo banda base tiempo discreto

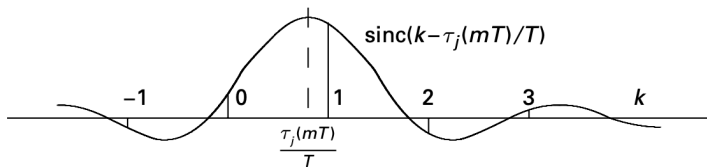


Figure – Modelo bandabase discreto con un camino

# Canal inalámbrico

## Consideraciones sobre los taps del canal

- La cantidad de taps cercanos a varios delays  $DS/T$  y habrá muy pocos más que  $DS/T$  taps con peso.
- En el modelo de banda angosta todos los delays estarán concentrados entre dos taps (ya que  $DS \ll 1/B = T$ ).
- Si reducimos  $B$  ( $T$  aumenta) y teniendo en cuenta el término  $\text{sinc}(l - \frac{\tau_i}{T})$ , el peso de todos los caminos caerá principalmente sobre un tap. Flat fading, la respuesta en frecuencia es plana y la respuesta al impulso se caracteriza por tener un solo tap.
- En el modelo es de banda ancha, a medida que se hace crecer  $B$  en el límite, se tendrá que cada tap estará afectado prácticamente por un solo camino. Este es el caso de fading selectivo en frecuencia.

# Canal inalámbrico

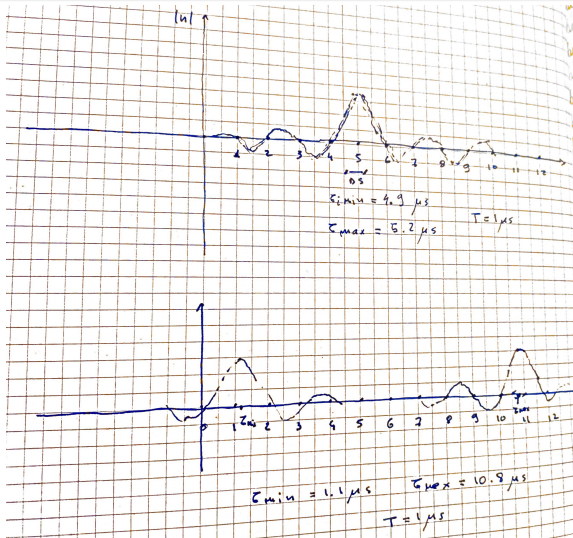
## Consideraciones sobre los taps del canal

Variaciones temporales de los taps.

- Si el modelo es de banda ancha suficiente como para que cada tap sea afectado por un solo camino, se tendrán pocas variaciones en el tiempo del valor del modulo de los taps.
- Aquellos taps que provengan de la suma de varios caminos con cierto peso, tendrán variaciones temporales en el valor de su módulo dadas por el doppler spread de esos caminos.

# Canal inalámbrico

## Consideraciones sobre los taps del canal



# Canal inalámbrico

## Repasando los modelos vistos

La señal banda base viene dada por

$$r_b(t) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j2\pi f_c \tau_i} s_b(t - \tau_i) \quad (13)$$

y en banda pasante

$$r(t) = \Re \left[ \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j2\pi f_c \tau_i} s_b(t - \tau_i) e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (14)$$

Tengo dos efectos del canal en la señal de salida.



# Canal inalámbrico

## Sistemas de banda angosta

### Sistemas de Banda Angosta $B \ll \mathcal{F}_{coh} = 1/DS$

$T \gg DS = \tau_{max} - \tau_{min}$ ,

Estamos pidiendo que  $s_b(t - \tau_i) \approx s_b(t) \forall i$ .

$$r_b(t) = s_b(t) \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j2\pi f_c \tau_i} \quad (15)$$

$$r(t) = \Re \left[ s_b(t) e^{j2\pi f_c t} \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j2\pi f_c \tau_i} \right] \quad (16)$$

es decir que en ambos casos las señales de salida son las señales de entradas multiplicadas por  $\sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j2\pi f_c \tau_i}$ .

# Canal inalámbrico

## Sistemas de Banda Ancha

### Sistemas de Banda Ancha $B \approx \mathcal{F}_{coh} = 1/DS$

En ese caso conviene utilizar el modelo de tiempo discreto en banda base del canal.

$$h_l = \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j2\pi f_c \tau_i} \text{sinc}\left(l - \frac{\tau_i}{T}\right) \quad (17)$$

La ecuación del tap es la misma que la del factor multiplicativo que se mencionó antes (a menos del  $\text{sinc}\left(l - \frac{\tau_i}{T}\right)$  )

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

- No hay línea de vista (LOS).
- La fase y la magnitud de los caminos serán variables aleatorias.
- Se asume que  $\phi_i(t) = 2\pi d_i(t)/\lambda_c$  tiene distribución uniforme en  $[-\pi, \pi]$ . Esto se debe a que  $d_i$  es típicamente mucho mayor que  $\lambda_c$  y pequeñas variaciones en la distancia, del orden de una longitud de onda generarán fases muy diferentes.
- Por esta razón se asume que la fase tiene distribución uniforme, ya que no hay un rango de fases mas probable que otro y puede variar en todo el rango de  $[-\pi, \pi]$ .
- Este mismo razonamiento sobre la variación de la fase permite razonablemente asumir que las variables aleatorias  $\phi_i$  y el de  $a_i$  son independientes.

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

Sean  $X$  e  $Y$

$$X - jY = \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j\phi_i} = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \cos(\phi_i) - j \sum_{i=0}^{M-1} a_i \sin(\phi_i) \quad (18)$$

Usando el TCL,  $X$  e  $Y$  tendrán en el limite una distribución Gaussiana. Además,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{M-1} a_i \cos(\phi_i)\right) = \quad (19)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{E}(a_i) \mathbf{E}(\cos(\phi_i)) = 0 \quad (20)$$

Análogamente,  $\mathbf{E}(Y) = 0$ .

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

Por otro lado,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} a_i a_k \cos(\phi_i) \cos(\phi_k)\right) = \quad (21)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{E}(a_i^2) \mathbf{E}(\cos(\phi_i)^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{E}(a_i^2) = \sigma_r^2 \quad (22)$$

Se denominará  $\sigma_r^2$  al valor de  $\mathbf{E}(X^2)$ . Análogamente se puede ver que  $\mathbf{E}(Y^2) = \sigma_r^2$ .

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

Por último, se puede ver que  $X$  e  $Y$  son independientes. Para esto calculamos :

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} a_i a_k \cos(\phi_i) \sin(\phi_k)\right) = \quad (23)$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{E}(a_i^2) \mathbf{E}(\cos(\phi_i) \sin(\phi_i)) = 0 \quad (24)$$

Por lo tanto  $X$  e  $Y$  son variables Gaussianas no correlacionadas y por lo tanto son independientes.

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

- Resumiendo  $X$  e  $Y$  son dos variables Gaussianas independientes y con igual media y varianza, definidas por :

$$X - jY = \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j\phi_i}.$$

- Observar que en el caso de los taps del canal, vale lo mismo definiendo  $X - jY = \sum_{i=0}^{M-1} a_i e^{-j\phi_i} \text{sinc}(l - \frac{\tau_i}{T})$ . En este caso se puede redefinir  $b_i = a_i \text{sinc}(l - \frac{\tau_i}{T})$  y el razonamiento anterior vale con  $b_i$  y  $\phi_i$ .

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

Si definimos  $X - jY = re^{j\psi}$  con  $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , siendo  $X$  e  $Y$  variables Gaussianas independientes e idénticamente distribuidas, se prueba que  $r$  tiene distribución de Rayleigh, cuya densidad de probabilidad es la siguiente :

$$f(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}$$

Un parámetro importante de esta distribución es  $\mathbf{E}(r^2) = 2\sigma_r^2$  ya que representa el valor medio de la potencia recibida.



# Canal inalámbrico

## Modelo de Rayleigh

- El modulo  $r$  de la señal de salida tiene distribución de Rayleigh.
- Los taps del canal tendrán distribución de Rayleigh.
- Banda Angosta : peso en solo un tap y su modulo será una variable aleatoria con distribución de Rayleigh.
- Banda Ancha : habrá varios taps con peso, cada uno con distribución de Rayleigh.
- En el límite, para canales de banda muy ancha  $1/B = T \ll DS$ , puede suceder que cada tap se vea afectado por un único o unos pocos caminos y en ese caso el TCL no sería válido.
- Pero asumir estos modelos simples, aunque no sean muy precisos, hace posible analizar el comportamiento del canal y permite sacar conclusiones generales.

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rice

En el modelo de Rayleigh se asumió que todos los caminos tenían ganancia y fase aleatorias. Sin embargo, si hay línea de vista, LOS, este camino tiene una ganancia y una fase fija.

$$X_1 = A + \sum_{i=1}^{M-1} a_i \cos(\phi_i)$$
$$Y = \sum_{i=1}^{M-1} a_i \sin(\phi_i)$$

En este caso se cumple que  $X_1^2 + Y^2 = (X + A)^2 + Y^2 = r^2$ . Las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  continúan teniendo en el límite distribución normal de media nula y varianza  $\sigma_r^2$ . Se prueba que  $r$  en este caso tiene distribución de Rice,

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rice

Densidad de probabilidad del modelo de Rice es la siguiente :

$$f(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} e^{-\frac{r^2+A^2}{2\sigma_r^2}} \mathbf{I}_0\left(\frac{rA}{\sigma_r^2}\right)$$

donde  $\mathbf{I}_0$  es la función de Bessel. Esta densidad se puede reescribir cambiando las variables  $A$  y  $\sigma_r$  por los siguientes dos parámetros que tienen una interpretación física :

$$K = \frac{A^2}{2\sigma_r^2}$$

$$\hat{P}_r = A^2 + 2\sigma_r^2$$

$K$  es la relación entre la potencia recibida por el rayo principal, LOS, y la recibida por todos los demás rayos.  $\hat{P}_r$  es la potencia total recibida.

# Canal inalámbrico

## Modelo de Rice

En función de estos dos parámetros, la densidad de Rice se puede reescribir de la siguiente forma :

$$f(r) = \frac{2r(K+1)}{\hat{P}_r} e^{-K - \frac{r^2(K+1)}{\hat{P}_r}} \mathbf{I}_0\left(2r\sqrt{\frac{K(K+1)}{\hat{P}_r}}\right)$$

# Canal inalámbrico

## Correlación entre señales recibidas

Dos señales sinusoidales de entrada de diferente frecuencia que se envían separadas en el tiempo.

$$E_{r_1} = \sum_{i=0}^{M-1} a_i(t) e^{jw_1(t-t_1) - jw_1\tau_i(t)} = r_1 e^{-j\phi_1} e^{jw_1 t}$$
$$E_{r_2} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) e^{jw_2(t-t_2) - jw_2\tau_k(t)} = r_2 e^{-j\phi_2} e^{jw_2 t}$$

Se asume el modelo de Rayleigh.

Las variables aleatorias  $r_1$  y  $r_2$  dependen de  $\Delta w = w_1 - w_2$  y de  $\Delta t = t_1 - t_2$ . Lo que se analizará en esta sección, es la correlación de estas variables.

# Canal inalámbrico

## Correlación entre señales recibidas

Se calculará la correlación normalizada, esto es :

$$\rho_{r_1, r_2} = \frac{\mathbf{E}(r_1 r_2) - \mathbf{E}(r_1)\mathbf{E}(r_2)}{\sqrt{\mathbf{Var}(\mathbf{r}_1)}\sqrt{\mathbf{Var}(\mathbf{r}_2)}}$$

La dificultad está en el cálculo de la densidad de probabilidad conjunta de  $r_1$  y  $r_2$ . Estos cálculos son bastante tediosos y solo se presentará el resultado final que es lo que interesa analizar.

$$\rho_{r_1, r_2}(\Delta t, \Delta w) = \frac{\mathbf{I}_0(w_{max}\Delta t)}{1 + (\Delta w\hat{T})^2} \quad (25)$$

donde  $\mathbf{I}_0$  es la función de Bessel,  $\hat{T}$  es el valor medio de los delays ( $\tau_i$ ) de los diferentes caminos, y  $w_{max}$  es la frecuencia máxima del Doppler, es decir,  $w_{max} = 2\pi f_{max} = 2\pi \frac{v}{\lambda}$ .

# Canal inalámbrico

## Correlación entre señales recibidas

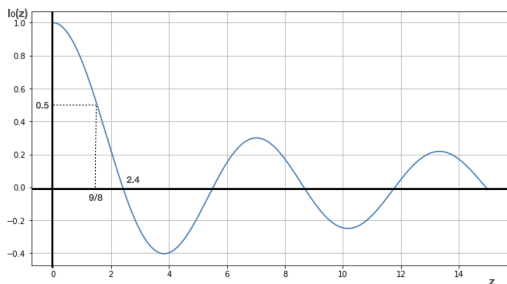


Figure – Función de Bessel

- Para  $\Delta w$  fijo, cuando  $\Delta t$  aumenta la función de Bessel decrece hasta 0 y luego tiene oscilaciones que se van amortiguando
- Para  $\Delta t$  fijo, cuando  $\Delta w$  aumenta, la correlación disminuye.

# Canal inalámbrico

## Tiempo de Coherencia

### Tiempo de Coherencia del Canal.

Se asume que  $\Delta w = 0$ ,

$$\rho_{r_1, r_2}(\Delta t, 0) = \mathbf{I}_0(w_{max}\Delta t) \quad (26)$$

Si se define no correlacionadas cuando su correlación es menor a 0.5,  $\mathbf{I}_0(z) = 0.5$  se da para  $z = 9/8$  :

$$\rho_{r_1, r_2}(T_{coh}, 0) = \mathbf{I}_0(w_{max}T_{coh}) = 0.5$$

$$w_{max}T_{coh} = 9/8$$

$$T_{coh} = \frac{9/8}{2\pi f_{max}} \approx \frac{0.18}{f_{max}}$$

donde  $f_{max} = v/\lambda$  , frecuencia máxima de Doppler. Si se define no correlacionadas cuando su correlación es 0,  $\mathbf{I}_0(z) = 0$  para  $z = 2.4$  :

$$T_{coh} = \frac{0.3}{f_{max}} \quad (27)$$



# Canal inalámbrico

## Distancia de Coherencia

### Distancia de Coherencia del Canal.

Si el receptor se mueve a velocidad  $v$ , ¿a qué distancia las señales dejan de estar correlacionadas?. Esa distancia, denominada distancia de coherencia  $D_{coh} = vT_{coh}$ .

$$D_{coh} = 0.3\lambda \quad (28)$$

Habitualmente es usual decir que para distancias de media longitud de onda o mayores las señales no están correlacionadas.

# Canal inalámbrico

## Ancho de banda de Coherencia

**Ancho de banda de Coherencia del Canal.** La idea es similar a la definición del tiempo de coherencia pero en este caso se analiza la correlación para  $\Delta t = 0$ , es decir :

$$\rho_{r_1, r_2}(0, 2\pi B_{coh}) = \frac{1}{1 + (2\pi B_{coh} \hat{T})^2} = 0.5$$
$$2\pi B_{coh} \hat{T} = 1$$
$$B_{coh} = \frac{1}{2\pi \hat{T}}$$

Además de estas interpretaciones de  $T_{coh}$ ,  $D_{coh}$ ,  $B_{coh}$ , se pueden analizar otras propiedades del fading con estos modelos como el tiempo medio de fading. Es decir cuanto dura en media una situación de deep fading por ejemplo.