Ejercicio 2 (Lagrange)**.** Se considera la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos de abscisas $x_0 = 1/2, x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 2$. Calcular el polinomio interpolador de f de orden 3 los puntos $(x_i, f(x_i))$ usando la forma de Lagrange. Realizar un bosquejo de las 4 funciones de interpolación de Lagrange asociadas a estos puntos. Evaluar el polinomio interpolador en $x = 2/3$. ¿Cuál es el valor del error cometido (respecto a $f(2/3)$)?

Ejercicio 4 (Función interpolante)**.** Escribir una función `w = interpolante(x,y,v)` que tome vectores `x` e `y` de largo $n+1$ y un vector `v` y devuelva un vector `w` del mismo tamaño que `v` y tal que `w(j) = p(v(j))`, donde `p` denota al polinomio interpolante (de grado n) por los puntos `(x,y)`.

Evitar usar la forma de Vandermonde. La función `interpolante` puede ser útil en varios de los ejercicios restantes del práctico.

Ejercicio 6 (Interpolación de la función seno)**.** Recordar que el error en la interpolación polinómica vale

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \qquad \text{(I)}$$

donde c es una abscisa que pertenece al menor intervalo que contiene a $x_0, x_1, \dots, x_n$. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y los puntos de interpolación $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$.

a) Calcular el polinomio de interpolación de tercer grado en este caso.

b) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}},$$

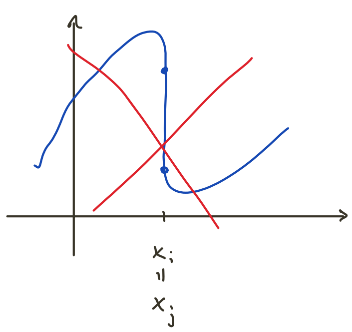
calcular exactamente $\operatorname{sen}(\pi/8)$.

c) Proporcionar una cota del error cometido utilizando (I). Comparar con el error real y verificar que el signo del error concuerda. Se pueden utilizar el valor de π y la función `sqrt` de Octave.

Repaso: Interpolación.

Tengo $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ Quiero $p(x)$ que pase por esos puntos. → tenga menor grado posible → grado n para $n+1$ puntos.

$x_i \neq x_j$ si $i \neq j$



Formulitas: $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$ → $\{(x_i, y_i)\}$ (Se saben)

Vandermonde (Sistema matricial)

Matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Lagrange: Elegí una base de polinomios mejor que $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y^k L_n^k(x)$$

$$L_n^k(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \rightsquigarrow L_n^i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Método de Newton: $P_n(x) = P_{n-1}(x) + (y_n - P_{n-1}(x_n))\, L_n^n(x)$.

$$P_n(x_n) = \cancel{P_{n-1}(x_n)} + (y_n - \cancel{P_{n-1}(x_n)})\underbrace{L_n^n(x_n)}_{1}$$

$$= y_n.$$

Forma fácil: Algoritmo de Horner.

$$P_n(x) = a_0 + (x - x_0)\left[a_1 + (x - x_1)\left[a_2 + (x - x_2)[\dots]\right]\right]$$

Ejercicio 2 (Lagrange)**.** Se considera la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos de abscisas $x_0 = 1/2, x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 2$. Calcular el polinomio interpolador de f de orden 3 los puntos $(x_i, f(x_i))$ usando la forma de Lagrange. Realizar un bosquejo de las 4 funciones de interpolación de Lagrange asociadas a estos puntos. Evaluar el polinomio interpolador en $x = 2/3$. ¿Cuál es el valor del error cometido (respecto a $f(2/3)$)?

Paso 1: Consigo los puntos
Salen de $f(x)$

	x	y
$x_0 \to$	$\frac{1}{2}$	2
$x_1 \to$	1	1
$x_2 \to$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
$x_3 \to$	2	$\frac{1}{2}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y^k L_n^k(x) = 2L_3^0(x) + 1 L_n^1(x) + \frac{2}{3} L_n^2(x) + \frac{1}{2} L_n^3(x)$$

$$L_n^k(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$L_3^0(x) = \prod_{i \neq 0} \frac{(x - x_i)}{(x_0 - x_i)} = \frac{(x-1)}{\underbrace{(\frac{1}{2} - 1)}_{-\frac{1}{2}}} \frac{(x - \frac{3}{2})}{\underbrace{(\frac{1}{2} - \frac{3}{2})}_{-1}} \frac{(x-2)}{\underbrace{(\frac{1}{2} - 2)}_{-\frac{3}{2}}} . \quad = -\frac{3}{4}$$

$$= -\frac{4}{3}(x-1)(x - \tfrac{3}{2})(x-2).$$

x	y
$\frac{1}{2}$	2
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{2}$

en x_1.

← tapo

uso

$$\mathcal{L}_3^1(x) = \prod_{i \neq 1} \frac{(x - x_i)}{(x_1 - x_i)} = \frac{(x - 1/2)}{(1 - 1/2)} \frac{(x - 3/2)}{(1 - 3/2)} \frac{(x - 2)}{(1 - 2)}$$

$$\mathcal{L}_3^2(x) = \text{---}$$

$$\mathcal{L}_3^3(x) = \text{---}$$

Si junto todo,

$$P_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{26}{6}. \rightarrow P_3(2/3) = \frac{253}{162}.$$

Nota: estas evaluaciones pueden hacerse en matlab directamente

$$f(2/3) = \frac{1}{(2/3)} = \frac{243}{162}$$

$$\rightarrow \text{error} = f(2/3) - P_3(2/3) = \frac{-10}{162}.$$

Ejercicio 4 (Función interpolante). Escribir una función `w = interpolante(x,y,v)` que tome vectores `x` e `y` de largo $n + 1$ y un vector `v` y devuelva un vector `w` del mismo tamaño que `v` y tal que `w(j) = p(v(j))`, donde `p` denota al polinomio interpolante (de grado n) por los puntos `(x,y)`.

Evitar usar la forma de Vandermonde. La función `interpolante` puede ser útil en varios de los ejercicios restantes del práctico.

Idea: hacer un for para los pols de lagrange

$w = \text{interpolante}(x,y,v)$. yo quiero $P_n(v) = \sum y^k \mathcal{L}_n^k(v)$

dato

$$\mathcal{L}_n^k(v) = \prod_{i \neq k} \frac{(v - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

si tengo $\mathcal{L}_n^k(v) \rightarrow w = w + y^k * \mathcal{L}_n^k(v)$.

$y^k \mathcal{L}_n^k(v)$.

```
for k: 1: n
    aux = 1;
    for i [1 : k-1   k+1 : n]
        aux = ((v - x_j)/(x_k - x_j))^α aux.
    endfor        # salgo con L_n^k(v) armado.
    w = w + y^k * aux.
endfor.
```

NOTA: Posible implementación de la función

```
function w = interpolante(x,y,v)

n = length(x);
w = zeros(size(v));
  for k = 1:n
    aux = ones(size(v));
    for j = [1:k-1 k+1:n]
      aux = (v-x(j))./(x(k)-x(j)).*aux;
    end
    w = w + aux*y(k);
  end
end
```

Ejercicio 6 (Interpolación de la función seno)**.** Recordar que el error en la interpolación polinómica vale

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \tag{I}$$

donde c es una abscisa que pertenece al menor intervalo que contiene a $x_0, x_1, \dots, x_n$. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y los puntos de interpolación $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$.

a) Calcular el polinomio de interpolación de tercer grado en este caso.

b) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}},$$

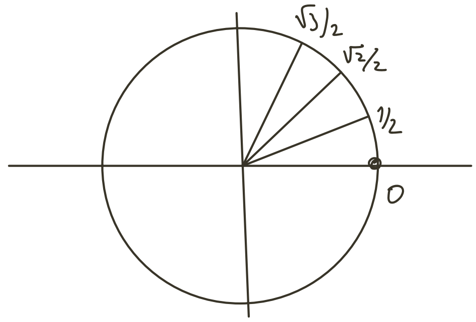
calcular exactamente $\operatorname{sen}(\pi/8)$.

c) Proporcionar una cota del error cometido utilizando (I). Comparar con el error real y verificar que el signo del error concuerda. Se pueden utilizar el valor de π y la función `sqrt` de Octave.

a) Método favorito y luego lo de antes.

1 - puntos -

x	$y = \sin(x)$
0	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$



$$(108\sqrt{3} - 288\sqrt{2} + 216)\frac{x^3}{\pi^3} + (144\sqrt{2} - 45\sqrt{3} - 126)\, x^2/\pi^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} - 16\sqrt{2} + 18\right)\frac{x}{\pi}.$$

b) $$\operatorname{sen}(\pi/8) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

c) Proporcionar una cota del error.

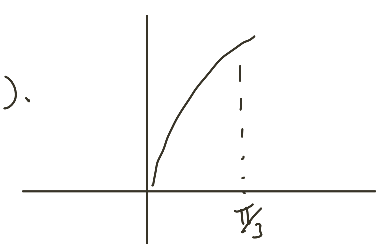
$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) - p_3\left(\frac{\pi}{8}\right) \overset{\text{matlab}}{\longleftrightarrow} \simeq -2{,}8 \times 10^{-4}.$$

para $\sin(x) \to f^{(3+1)}(c) = f^{(4)}(c) = \sin(c).$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) - p_3\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin(\overset{\text{intermedio}}{c})}{(3+1)!}(x-0)(x-\pi/6)(x-\pi/4)(x-\pi/3).$$

$\pi/8$



$c \in [0, \pi/3]$ entre x_0 y x_3. $\quad \sin(c) \leqslant \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$

$$\sin\left(\pi/8\right) - p_3\left(\pi/8\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}\,\frac{\pi}{8}\,\underbrace{\left(\pi/8 - \pi/6\right)}_{= -\pi/24}\,\underbrace{\left(\pi/8 - \pi/4\right)}_{= -\pi/8}\,\underbrace{\left(\pi/8 - \pi/3\right)}_{= -\frac{5\pi}{24}}.$$

$$\approx -5 \cdot \frac{1}{48}\;\frac{\pi^4}{8.24 \cdot 8.24}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sim 4{,}4 \times 10^{-4}.$$