Ejercicio 10 (Otra recurrencia inestable)**.** Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos la integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x}\,dx.$$

a) Verificar que $I_0 = \log(6/5)$ y que, para todo $n \geq 1$, se tiene $I_n \geq 0$ y se cumple la relación

$$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

b) Escribir un programa de Octave que implemente la fórmula de recurrencia de la parte anterior y utilizarlo para calcular I_{30}. Analizar el resultado obtenido. ¿Es confiable? Justificar realizando un análisis de error hacia adelante.

c) Como alternativa, se propone comenzar aproximando $I_{100} = 0$ y utilizar la fórmula de recurrencia hacia atrás. Computar I_{30} de esta manera. Probar con otras aproximaciones iniciales para I_{100}, como por ejemplo $I_{100} = 0{,}1$, $I_{100} = 1$. Explicar qué ocurre y por qué.

Ejercicio 14 (Serie exponencial)**.** Se desea calcular los valores de la función exponencial a partir de su desarrollo en serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

a) Usar el siguiente programa para efectuar la suma anterior hasta $n = 100$, para un rango de valores de x:

```
x=-20:20;
sum=ones(size(x));
t=x; n=1;
while n<100
    sum=sum+t;
    n=n+1;
    t=t.*x/n;
end
```

b) Investigar qué sucede con el error relativo en los resultados numéricos obtenidos. Usar la función `exp` y grafique con `semilogy`. ¿Dónde se dan los peores resultados? Justificar por qué ocurre esto.

c) Buscar una forma alternativa y más precisa de hacer el cálculo en los valores de x problemáticos en la parte anterior.

Ejercicio 10 (Otra recurrencia inestable)**.** Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos la integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x}\,dx.$$

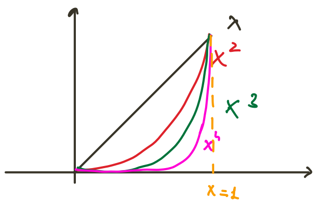
a) Verificar que $I_0 = \log(6/5)$ y que, para todo $n \geq 1$, se tiene $I_n \geq 0$ y se cumple la relación

$$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

b) Escribir un programa de Octave que implemente la fórmula de recurrencia de la parte anterior y utilizarlo para calcular I_{30}. Analizar el resultado obtenido. ¿Es confiable? Justificar realizando un análisis de error hacia adelante.

c) Como alternativa, se propone comenzar aproximando $I_{100} = 0$ y utilizar la fórmula de recurrencia hacia atrás. Computar I_{30} de esta manera. Probar con otras aproximaciones iniciales para I_{100}, como por ejemplo $I_{100} = 0{,}1$, $I_{100} = 1$. Explicar qué ocurre y por qué.

$\frac{x^n}{\text{algo}} \sim (0,1)$ algo $= x+5$



$$\frac{1}{6}\int_0^1 x^n\,dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx < \frac{1}{5}\int_0^1 x^n\,dx$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{x+5}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+5}\,dx = \log(x+5)\Big|_0^1 = \log(6) - \log(5) = \log(6/5).$$

$$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+5} = x^n \log(x+5)\Big|_0^1 - (n-1)\int x^{n-1}\log(x+5)\,dx$$

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x}\,dx + 5\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{5+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x} + \frac{5x^{n-1}}{5+x}\,dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{5+x}(x^n + 5x^{n-1})\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\frac{\cancel{(x+5)}}{\cancel{x+5}}\,dx.$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^n\Big|_0^1 = \frac{1}{n}$$ ✓.

b)
```
function retval = recurrenciaf(n)
  init = log(6/5);
  i_1 = 1 - 5*init;
  res = i_1;
  i = 2;
  while i<n
    res = 1/n - 5*res;
    i = i+1;
  endwhile
  retval = res;
endfunction
```

(Lo hacemos con los primeros pasos por separado, no es necesario.)

Para analizar el error, usar $e_{x+y} \leq \left|\frac{x}{x+y}\right| e_x + \left|\frac{y}{x+y}\right| e_y$

$x+y = \underset{x}{\frac{1}{n}} - \underset{y}{5I_{n-1}}$ error en x despreciable.

$+\left|\frac{y}{x+y}\right| e_y \leq 5\left(\frac{I_{n-1}}{I_n}\right) e_{I_{n-1}} \lessapprox 5\, e_{I_{n-1}} \lessapprox 25\, e_{I_{n-2}}$ → el error se propaga con 5^n. (la cota!)

~ 1 si n grande

mismo argumento.

⇒ no podemos afirmar que es confiable.

(no asegura que $e^n \sim 5^n e_0$) solo que nuestra cota es mala.

c)
```
function retval = recurrenciab(n,m)
  i_100 = m;
  res = i_100;
  i = 100;
  while i>n
    res = 1/5n - (1/5)*res;
    i = i-1;
  endwhile
  retval = res;
endfunction.
```

⇝ error como antes, pero ahora es $\frac{1}{5n} - \frac{1}{5} I_{n+1}$

Si afirmo que $\frac{I_n}{I_{n+1}} \sim 1 \Rightarrow e^k \lessapprox \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

⇒ debería ser más confiable.

Obs: si cambio el valor de m y bajo a n=30, el resultado casi no cambia. por qué?

14) b) al graficar el error entre la función de la letra y exp(-20:20), el error se nota mayor en los negativos. Esto es porque al correr el programa, en los x negativos tenemos $x^k = (-1)^k |x|^k$.
$\Rightarrow$ hay cancelaciones catastróficas.

c) Alternativa: usar que si $x < 0 \Rightarrow x = -|x| \Rightarrow e^x = e^{-|x|} = 1/e^{|x|}$

$\Rightarrow$ calculo $e^{|x|}$ y luego hago $1/e^{|x|}$. $\Rightarrow$ No hay cancelaciones catastróficas.
(es decir e^x, $x = 0:20$) (nos da e^x, $x = -20:0$).