Lunes 19 Agosto.

8 Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

(a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
(b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
(c) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
(d) $y'' + y = 3x^2 - 5x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
(e) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
(f) $y'' + y = (1 + x)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
(g) $y'' + 2y' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(h) $y'' + y = \cos(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Solución: Recordemos que la solución general de una ecuación no homogénea se obtiene como la suma de la solución general de la ecuación homogénea, más una solución particular.

Notemos lo siguiente:

- La ecuación diferencial homogénea asociada a los casos a, b y c es la misma: $y'' + 2y' + 2y = 0$. El polinomio característico en este caso es
$$p(r) = r^2 + 2r + 2.$$
Para encontrar las raíces, resolvemos la ecuación cuadrática:
$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$
Entonces, las raíces son complejas: $r_1 = -1 + i$ y $r_2 = -1 - i$.
La solución general de la ecuación homogénea es:
$$y_h(x) = e^{-x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)),$$
donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.
- La ecuación diferencial homogénea asociada a los casos d, f y h es la misma: $y'' + y' = 0$. El polinomio característico en este caso es
$$p(r) = r^2 + r = r(r + 1).$$
Para encontrar las raíces, resolvemos la ecuación cuadrática:
$$r(r + 1) = 0.$$
Las raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$.
La solución general de la ecuación homogénea es:
$$y_h(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x},$$
donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.
- La ecuación diferencial homogénea asociada al caso e es: $y'' + 4y' + 3y = 0$. El polinomio característico en este caso es
$$p(r) = r^2 + 4r + 3.$$
Para encontrar las raíces, resolvemos la ecuación cuadrática:
$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}.$$

Las raíces son:
$$r_1 = \frac{-4+2}{2} = -1, \quad r_2 = \frac{-4-2}{2} = -3.$$
Por lo tanto, las raíces son reales y distintas: $r_1 = -1$ y $r_2 = -3$.
La solución general de la ecuación homogénea es:
$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x},$$
donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

- La ecuación diferencial homogénea asociada al caso e es: $y'' + 2y' + y = 0$. El polinomio característico en este caso es
$$p(r) = r^2 + 2r + 1.$$
Para encontrar las raíces, resolvemos la ecuación cuadrática:
$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$
La raíz es doble: $r_1 = r_2 = -1$.
Dado que la raíz es doble, la solución general de la ecuación homogénea es:
$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x},$$
donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Resumen:

Dada la ecuación característica
$$p(x) = x^2 + cx + d = 0,$$
donde k_1 y k_2 son las raíces, la solución general de la ecuación diferencial asociada se puede escribir en una de las siguientes tres formas:
(a) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, si k_1 y k_2 son reales y distintos.
(b) $y = e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x)$, si $k_1 = k_2 = \alpha$.
(c) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$, si $k_1 = \alpha + \beta i$ y $k_2 = \alpha - \beta i$.

Solución General de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

La solución general de la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden
$$y'' + cy' + dy = f(x)$$
se puede expresar como la suma de:
$$y = y_H + y_P,$$
donde y_H es la solución general de la ecuación homogénea asociada
$$y'' + cy' + dy = 0,$$
la cual se determina utilizando las fórmulas correspondientes en función de las raíces de la ecuación característica. Y_P es una solución particular de la ecuación dada.

La función Y_P se puede hallar mediante el método de los coeficientes indeterminados en los siguientes casos simples:

1. Cuando $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n:
- Si a **no es raíz** de la ecuación característica, es decir, $p(a) \neq 0$, consideramos

$$Y_P = e^{ax}Q_n(x),$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes indeterminados.
- Si a **es raíz** de la ecuación característica, es decir, $p(a) = 0$, consideramos

$$Y_P = x^r e^{ax}Q_n(x),$$

donde r es el grado de multiplicidad de la raíz a.

2. Cuando $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx)\right]$:
- Si $p(a \pm bi) \neq 0$, consideramos

$$Y_P = e^{ax}\left[R_t(x)\cos(bx) + S_t(x)\sin(bx)\right],$$

donde $R_t(x)$ y $S_t(x)$ son polinomios de grado $t = \max\{\text{n,m}\}$
- Si, por el contrario, $p(a \pm bi) = 0$, consideramos

$$Y_P = x^r e^{ax}\left[R_t(x)\cos(bx) + S_t(x)\sin(bx)\right],$$

donde r es el grado de multiplicidad de la raíz $a \pm bi$ (para una ecuación de segundo orden, $r = 1$ si la raíz es doble).

Observación: Dada la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad \text{(NH)} \tag{1}$$

donde $r(x)$ es una función conocida que puede descomponerse como suma $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$.

Se consideran las ecuaciones diferenciales auxiliares:

$$y'' + ay' + by = r_1(x) \quad \text{(NH1)} \tag{2}$$

$$y'' + ay' + by = r_2(x) \quad \text{(NH2)} \tag{3}$$

Sean $y_{1,P}(x)$ y $y_{2,P}(x)$ soluciones particulares de (NH1) y de (NH2), respectivamente. Entonces:

$$y_P(x) = y_{1,P}(x) + y_{2,P}(x) \tag{4}$$

es una solución particular de la ecuación diferencial dada (NH).

Regresando al ejercicio 8, tenemos:

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$
En este caso, el término no homogéneo es $f(x) = \cos(2x)$. Por lo tanto, proponemos como candidata a solución particular una función de la forma:

$$y_P(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

donde A y B son constantes que determinaremos.
Primero, calculamos las derivadas de $y_P(x)$:

$$y_P'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y_P''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

Sustituyendo $y_P(x)$, $y_P'(x)$, y $y_P''(x)$ en la ecuación diferencial dada:

$$(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)) + 2(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) + 2(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = \cos(2x)$$

Simplificando:

$$(-4A + 4B + 2A)\cos(2x) + (-4B - 4A + 2B)\sin(2x) = \cos(2x)$$

Agrupando términos:

$$(-2A + 4B)\cos(2x) + (-4A - 2B)\sin(2x) = \cos(2x)$$

Igualando coeficientes de $\cos(2x)$ y $\sin(2x)$ con los términos en el lado derecho de la ecuación, obtenemos:

$$-2A + 4B = 1$$
$$-4A - 2B = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos:
$A = \frac{-1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$.
Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_P(x) = -\frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales a determinar, usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x)$

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$$

Proponemos como solución particular una función de la forma:

$$y_P(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

Calculamos sus derivadas:

$$y_P'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y_P''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$(-4A + 4B + 2A)\cos(2x) + (-4B - 4A + 2B)\sin(2x) = \sin(2x)$$

Esto nos lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2A + 4B &= 0 \quad \text{(coeficiente de } \cos(2x)) \\ -4B - 4A &= 1 \quad \text{(coeficiente de } \sin(2x)) \end{aligned}$$

De donde $A = \dfrac{-1}{5}$ y $B = \dfrac{-1}{10}$
Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_P(x) = -\frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = C_1e^{-x}\cos(x) + C_2e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales a determinar, usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores.

(a) **(Primer parcial segundo semestre 2023)** Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencialConsideremos la ecuación diferencial:

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 2$. Entonces:
(A) $y(1) = e^2 - e^{-1}$
(B) $y(1) = \frac{e^2+e^{-1}}{2}$
(C) $y(1) = e^{-1} - e^2 + 1$
(D) $y(1) = \frac{e^2-e^{-1}}{e^2+e^{-1}}$
(E) $y(1) = e^2 - 1$

1. Ecuación homogénea asociada:
Primero, resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$$

El polinomio característico es:

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Resolvemos para r:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Las raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$, por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$$

2. Solución particular:
Ahora, buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea. Proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Sustituyendo $y_p(x)$ en la ecuación diferencial:

$$y_p''(x) - y_p'(x) - 2y_p(x) = -2x^2 + 3$$

Calculamos las derivadas:

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = -2x^2 + 3$$

Simplificando:

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - B - 2C) = -2x^2 + 3$$

Igualando coeficientes:

$$-2A = -2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$-2A - 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$2A - B - 2C = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2C = 3 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p(x) = x^2 - x$$

3. Solución general:
La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + x^2 - x$$

4. Condiciones iniciales:
Usamos las condiciones iniciales para encontrar C_1 y C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + 2x - 1$$

$$y'(0) = 2C_1 - C_2 - 1 = 2$$

Sustituyendo $C_2 = -C_1$ en la segunda condición:

$$3C_1 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

Por lo tanto, $C_2 = -1$.
5. Solución final:

La solución final es:

$$y(x) = e^{2x} - e^{-x} + x^2 - x$$

Finalmente, al evaluar en $x = 1$ obtenemos $y(1) = e^2 - \frac{1}{e}$. Por lo tanto, la opción correcta es la A.

(b) (**Examen febrero 2023**) Consideremos la siguiente ecuación diferencial (E) dependiendo de una función $r(x)$:

$$y'' + 4y' + 4y = r(x)$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) Si $e^{-2x} + x^2$ es solución de (E) entonces $r(x) = 4x^2 + 8x + 2$.

(II) Si $r(x) = x^2$ entonces $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + x^2$ es la única solución de (E) que verifica que $y(0) = y'(0) = 1$.

(III) Si $r(x) = 0$ entonces todas las soluciones son de la forma $y(x) = ae^{-2x} + be^{-2x}x$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces:

A. Todas las afirmaciones son verdaderas.
B. Solamente (III) es verdadera.
C. Solamente (I) es verdadera.
D. Solamente (I) y (III) son verdaderas.

Solución: Veamos las afirmaciones en orden:

(I) Si $y(x) = e^{-2x} + x^2$ es solución, debe verificar la ecuación diferencial dada, $y'' + 4y' + 4y = r(x)$. Para encontrar $r(x)$, sustituimos $y(x)$ en la ecuación y operamos. Para eso, notemos que

$$y'(x) = -2e^{-2x} + 2x, \quad y''(x) = 4e^{-2x} + 2.$$

Luego,

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x} + 2 + 4(-2e^{-2x} + 2x) + 4(e^{-2x} + x^2) = 4x^2 + 8x + 2.$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

(II) Si $r(x) = x^2$, la ecuación diferencial resulta

$$y'' + 4y' + 4y = x^2.$$

Verifiquemos primero si $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + x^2$ es solución:

$$y'(x) = e^{-2x}(1 - 6x) + 2x, \quad y''(x) = 2e^{-2x}(-4 + e^{2x} + 6x).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, vemos que la solución propuesta no la verifica. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

(III) Ahora veamos qué ocurre si $r(x) = 0$:
Debemos resolver la ecuación homogénea

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Planteamos soluciones proporcionales a $e^{\lambda x}$, por lo que investigamos una ecuación de la forma

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$