Lunes 09 Septiembre

1.1. **Series Alternadas.** Decimos que una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si y solo si $\sum |a_n|$ es convergente.

[Teorema 3.47] Toda serie absolutamente convergente es convergente.

[Proposición 3.49 (Criterio de la Serie Altenante-Leibnitz)] Si a_n es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

7. Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

   Convergencia absoluta. Para estudiar si la serie es absolutamente convergente, consideramos la serie de términos absolutos:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n.$$
   Esta es una serie geométrica con razón $r = \frac{1}{3}$, que es menor que 1, por lo que esta serie converge.
   Dado que la serie de términos absolutos converge, podemos concluir que la serie original es también convergente por el Teorema 3.47.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$

   Convergencia absoluta. Para estudiar la convergencia absoluta, consideramos la serie de términos absolutos:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$
   Esta serie no es absolutamente convergente porque $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ para n grande. La serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente. Por lo tanto, la serie no es absolutamente convergente.

   Para estudiar la convergencia de esta serie, aplicamos el Criterio de la Serie Altenante (Leibnitz). El criterio establece que una serie alternada de la forma $\sum(-1)^n a_n$ es convergente si:
   (i) La sucesión $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ es monótona decreciente para n suficientemente grande.
   (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   Primero, observamos que la función
   $$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$
   es decreciente para $x > 1$. Lo que garantiza la monotonía decreciente de la sucesión.
   Además, evaluamos el límite de a_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0.$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$ es convergente.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{6n-5}$.

Convergencia Absoluta-Límite de la sucesión a_n. Evaluemos el límite de a_n cuando $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6-\frac{5}{n}}=\frac{1}{6}.$$

Dado que el límite no es cero, la serie no puede ser convergente. Por lo tanto, no es absolutamente convergente.

Convergencia-Límite de la sucesión a_n. Evaluemos el límite de a_n cuando $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{6n-5}$$

Este límite no existe, la serie no es convergente.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15}$.

Convergencia absoluta. Para estudiar la convergencia absoluta, consideramos la serie de términos absolutos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(n^3+2n^2+8n+5\right)}{n^5+4n^3+15}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n^2+8n+5}{n^5+4n^3+15}.$$

La serie es comparable a la serie $\sum\frac{1}{n^2}$, que es una serie convergente.
Dado que la serie de términos absolutos converge, podemos concluir por el Teorema 3.47 que la serie original es convergente.

1. **(Primer parcial segundo semestre 2022)** Considere las siguientes afirmaciones sobre series:
   1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ es convergente.
   2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$ es absolutamente convergente.
   3. La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(2)\cdot\log(3)\cdot\dots\cdot\log(n)}{n!}$ es convergente.

   Entonces: Entonces:
   - (A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
   - (B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.
   - (C) Todas las afirmaciones son verdaderas.
   - (D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
   - (E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

   Solución:

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 \neq 0.$$
Por lo tanto, la serie no es convergente.

2. Para determinar si la serie es absolutamente convergente, consideramos la serie de términos absolutos:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$
Para estudiar esta serie, podemos usar el Criterio del cociente o criterio de D'Alambert
Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos, tal que existe
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$
Entonces:
   - Si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty$ (la serie converge).
   - Si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^n 3}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1.$$
Por lo tanto, la serie converge absolutamente.

3. Calculamos la razón de términos consecutivos:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{n+1}.$$
Tomamos el límite cuando $n \to \infty$:
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n+1} = 0.$$
Como $L = 0 < 1$, por el criterio de la razón, la serie es **convergente**.
Por lo tanto, la opción correcta es la B.