Miércoles 28 de Agosto.

8 Sea A un subconjunto no vacío de los números reales que está acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y sólo si:
(a) $L \geq x$ para todo $x \in A$.
(b) Existe una sucesión $\{x_m\}$ en A tal que $\lim_{m\to\infty} x_m = L$.

Demostración: Supongamos que $L = \sup(A)$.
(a) Esto se cumple trivialmente por definición de supremo.
(b) Dado que L es el supremo de A, para cualquier $\epsilon > 0$, el número $L-\epsilon$ no puede ser una cota superior de A. Por lo tanto, existe al menos un $x \in A$ tal que $L - \epsilon < x \leq L$. En particular, para $\epsilon = \frac{1}{m}$ (donde m es un número natural positivo), podemos encontrar un $x_m \in A$ tal que $L - \frac{1}{m} < x_m \leq L$. La sucesión $\{x_m\}$ así construida cumple que x_m está en A y $\lim_{m\to\infty} x_m = L$, ya que $L - \frac{1}{m} \to L$ cuando $m \to \infty$.

Ahora, supongamos que las condiciones (a) y (b) se cumplen.

Dado que A es un conjunto no vacío y acotado superiormente, el supremo de A existe.
(a) La condición (a) implica que L es una cota superior de A. Por lo tanto, $\sup(A) \leq L$, ya que $\sup(A)$ es el menor número que cumple esta propiedad.
(b) Supongamos que $\sup(A) < L$. Entonces, existe $\epsilon = \frac{L-\sup(A)}{2} > 0$ tal que $\sup(A) < L - \epsilon$. Según la condición (b), existe una sucesión $\{x_m\}$ en A tal que $\lim_{m\to\infty} x_m = L$. Para m suficientemente grande, x_m estará en el intervalo $(L-\epsilon, L]$. En particular, para m suficientemente grande, $x_m > \sup(A)$, lo cual contradice el hecho de que $\sup(A)$ es una cota superior para A y x_m es un elemento de A. Por lo tanto, nuestra suposición de que $\sup(A) < L$ debe ser falsa.

Esto implica que $\sup(A) = L$.

□

Diremos que (x_n) es *equivalente* a (y_n), y escribiremos simbólicamente $(x_n) \sim (y_n)$, si $(x_n/y_n) \to 1$.

Criterio: Sean (x_n) y (y_n) sucesiones equivalentes, y (z_n) una sucesión cualquiera. Se cumple que $(x_n z_n)$ es convergente si y sólo si $(y_n z_n)$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

En particular, (x_n) es convergente si y sólo si (y_n) es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones comparten el mismo límite.

Es importante observar que, en general, en una suma de sucesiones no se puede sustituir una sucesión por otra equivalente. Por ejemplo, si $x_n = n + 1$, $y_n = n + \frac{1}{n}$ y $z_n = -n$, es claro que $(x_n) \sim (y_n)$, pero $(x_n + z_n) = \{1\}$ no es equivalente a $(y_n + z_n) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

4. (Primer parcial segundo semestre 2020 turno vespertino). Sea $a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right) n^\alpha$ con α un real positivo. Entonces:
(a) **(A)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito si y solo si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
(b) **(B)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito si y solo si $\alpha \leq 1$.
(c) **(C)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito para todo α.

(d) **(D)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es finito para ningún α.
(e) **(E)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito si y solo si $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

Consideremos la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:
$$a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right) n^\alpha.$$

Para analizar la convergencia de esta sucesión, primero necesitamos estudiar el comportamiento del término $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1$ a medida que $n \to \infty$.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Para grandes valores de n, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \approx 2\sqrt{n}$. Así que:
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Usamos la expansión de Taylor para la función exponencial cuando x es pequeño:
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Aplicando esto para $x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, tenemos:
$$e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \approx 1 + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Como $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$, tenemos:
$$e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \approx 1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Simplificando, obtenemos:
$$e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1 \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Entonces,
$$a_n \approx \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) n^\alpha = \frac{n^\alpha}{2\sqrt{n}} = \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Por lo tanto, la opción correcta es **(A)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito si y solo si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

□

3. (Primer parcial segundo semestre 2021) Consideremos la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n\geq 0}$ que satisface la relación:
$$a_{n+1} = 2a_n + 5$$
y tal que $a_0 = 0$. Entonces:
A $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es creciente y no es acotada.
B $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es creciente y tiene límite 5.
C $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es creciente y tiene límite -5.
D $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es decreciente y tiene límite -5.
E $\{a_n\}_{n\geq 0}$ no es ni creciente ni decreciente, pero converge a -5.

n	a_n
0	0
1	5
2	15
3	35
4	75
5	155
6	315
7	635
8	1275
9	2555
10	5115

TABLE 1. Valores de la sucesión a_n para n entre 0 y 10.

A continuación, se muestra una tabla con los valores de a_n para n entre 0 y 10:

Queremos mostrar que esta sucesión es monótona creciente estricta, es decir, que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq 0$.

$$a_{n+1} = 2a_n + 5 > a_n \longleftrightarrow a_n + 5 > 0 \longleftrightarrow a_n > -5$$

Usando que $a_0 = 0$, concluimos que que $a_0 < a_1 < a_2 < ...$

Podemos verificar que la sucesion tiene la siguiente forma $a_n = 2^n a_0 + 5(2^n - 1)$. Por lo tanto, no es acotada.