Lunes 26 de Agosto.

11. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en α. Entonces, la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $b_n = f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.

Demostración:
Dado un $\varepsilon > 0$, queremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla

$$|f(a_n) - f(\alpha)| < \varepsilon.$$

Como f es continua en α, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - \alpha| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon.$$

Ahora, dado que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, por la definición de convergencia de sucesiones, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$|a_n - \alpha| < \delta.$$

Obtenemos que para estos mismos valores de n, se cumple

$$|f(a_n) - f(\alpha)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.

3 Encontrar los límites de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

e)

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n).$$

Utilizaremos el hecho de que el producto de una sucesión acotada por una sucesión que tiende a cero, también tiende a cero.

Consideremos los dos factores de a_n:

(i) El primer factor es $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Sabemos que $\sin(x)$ es una función continua. Como $\frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, tenemos que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to \sin(0) = 0$. Por lo tanto, $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es una sucesión que tiende a cero.

(ii) El segundo factor es $\cos(n)$. La función $\cos(x)$ es acotada, es decir, $|\cos(n)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Concluimos que

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

d)

$$a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.
Vamos a estudiar la convergencia de esta sucesión en dos casos: cuando $\alpha = \beta$ y cuando $\alpha \neq \beta$.

Caso 1: $\alpha = \beta$.
Entonces, la sucesión se convierte en:

$$a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \alpha^n} = \sqrt[n]{2\alpha^n}.$$

Podemos simplificar esto utilizando propiedades de las potencias y raíces:

$$a_n = \sqrt[n]{2} \cdot \alpha.$$

Observemos que $\sqrt[n]{2}$ es una sucesión que tiende a 1 cuando $n \to \infty$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

En el caso en que $\alpha = \beta$, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.

Caso 2: $\alpha \neq \beta$
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha > \beta$. En este caso, la sucesión se puede reescribir como:

$$a_n = \sqrt[n]{\alpha^n \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}.$$

Podemos simplificar esto de la siguiente manera:

$$a_n = \alpha \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}.$$

Dado que $\frac{\beta}{\alpha} < 1$, tenemos que $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, el término dentro de la raíz converge a 1:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = 1.$$

Por lo tanto, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

De manera similar, si $\beta > \alpha$, podemos llegar a la conclusión de que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a β.
En todos los casos, hemos demostrado que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y que su límite es el máximo entre α y β. En otras palabras:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \max(\alpha, \beta).$$

Subsucesión de una Sucesión de Números Reales.

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Una **subsucesión** de $\{a_n\}$ es una sucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente de índices naturales, es decir:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

y $n_k \in \mathbb{N}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, una subsucesión se obtiene seleccionando ciertos términos de la sucesión original $\{a_n\}$, preservando el orden pero omitiendo algunos términos.

Resumen.

(a) **Convergencia de Subsucesiones:** Si una sucesión $\{a_n\}$ converge a un límite L, entonces todas sus subsucesiones también convergen a L.
(b) **Subsucesión Convergente de una Sucesión Acotada:** Toda sucesión acotada de números reales tiene al menos una subsucesión convergente. Este es un corolario del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.
   b. $a_n = (-1)^n n$
   Podemos observar que la sucesión alterna entre términos positivos y negativos:
$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ -n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$
   Como n crece indefinidamente, los valores absolutos de los términos de la sucesión también crecen indefinidamente. Es decir,
$$|a_n| = n \to \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$
   Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ no es acotada, y por lo tanto no es convergente.

   Consideremos la subsucesión de índices pares $\{a_{2n}\}$:
$$a_{2n} = (-1)^{2n} \cdot 2n = 2n.$$
   Esta subsucesión es $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, y claramente no converge, ya que $2n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
   Ahora, consideremos la subsucesión de índices impares $\{a_{2n+1}\}$:
$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot (2n+1) = -(2n+1).$$
   Esta subsucesión es $\{-1, -3, -5, -7, \dots\}$, y tampoco converge, ya que $-(2n+1) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.
   c) $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$

   Podemos observar que la sucesión alterna entre dos valores constantes. Recordemos que:
$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$
   Por lo tanto, la sucesión se puede escribir como:
$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$
   Aunque la sucesión $\{a_n\}$ no converge, podemos identificar subsucesiones que sí lo hacen.
   Consideremos la subsucesión de índices pares $\{a_{2n}\}$:
$$a_{2n} = 3^{\cos(2n\pi)} = 3.$$

Esta subsucesión es constante y siempre igual a 3, es decir:

$$a_{2n} = 3 \quad \text{para todo } n.$$

Por lo tanto, la subsucesión $\{a_{2n}\}$ converge, y su límite es 3.
Ahora, consideremos la subsucesión de índices impares $\{a_{2n+1}\}$:

$$a_{2n+1} = 3^{\cos((2n+1)\pi)} = \frac{1}{3}.$$

Esta subsucesión también es constante y siempre igual a $\frac{1}{3}$, es decir:

$$a_{2n+1} = \frac{1}{3} \quad \text{para todo } n.$$

Por lo tanto, la subsucesión $\{a_{2n+1}\}$ converge, y su límite es $\frac{1}{3}$.

7. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que sus subsucesiones $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes. Entonces, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

Demostración:

Denotemos por L_1, L_2 y L_3 los límites de las subsucesiones $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$ y $\{a_{3n}\}$, respectivamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L_1, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L_2, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_{3n} = L_3.$$

Para probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge, primero debemos mostrar que las tres subsucesiones convergen al mismo límite.

Paso 1: Igualdad de L_1, L_2 y L_3

Consideremos la subsucesión $\{a_{2n}\}$, que converge a L_1. Entre los términos de esta subsucesión también se encuentran términos de la subsucesión $\{a_{3n}\}$, ya que para ciertos valores de n, $3n$ es par. Por lo tanto, existe una subsucesión común a ambas, por ejemplo, $\{a_{6n}\}$, que converge a L_1 y a L_3. Dado que $\{a_{3n}\}$ converge a L_3, se sigue que $L_1 = L_3$.

De manera similar, consideremos la subsucesión $\{a_{2n+1}\}$, que converge a L_2. De nuevo, hay términos comunes con la subsucesión $\{a_{3n}\}$, en particular, la subsucesión $\{a_{6n-3}\}$, que converge a L_2 y a L_3. Como $\{a_{3n}\}$ converge a L_3, se sigue que $L_2 = L_3$.

De estos resultados, tenemos que:

$$L_1 = L_3 \quad \text{y} \quad L_2 = L_3,$$

lo que implica que $L_1 = L_2 = L_3$. Denotaremos este valor común por L.

Paso 2: Convergencia de la Sucesión $\{a_n\}$.

Resta probar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a L. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que las subsucesiones $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n+1}\}$ convergen a L, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

$$|a_{2n+1} - L| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_2.$$

Tomemos $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Entonces, para todo $n \geq n_0$:

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |a_{2n+1} - L| < \varepsilon.$$

Esto implica que para todo $m \geq 2n_0$, se tiene que $|a_m - L| < \varepsilon$, ya que cada índice m es de la forma $2n$ o $2n+1$ para algún $n \geq n_0$. Por lo tanto, $\{a_n\}$ converge a L.