Lunes 02 de Septiembre.

n	$a_n = \frac{1}{n}$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
1	$1 = 1.0$	1.0
2	$\frac{1}{2} = 0.5$	1.5
3	$\frac{1}{3} = 0.3333$	1.8333
4	$\frac{1}{4} = 0.25$	2.0833
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	2.2833
6	$\frac{1}{6} = 0.1667$	2.45
7	$\frac{1}{7} = 0.1429$	2.5929
8	$\frac{1}{8} = 0.125$	2.7179
9	$\frac{1}{9} = 0.1111$	2.8289
10	$\frac{1}{10} = 0.1$	2.9289

TABLE 2. Comparación de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ con la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1 Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando sus suma en caso de serlo

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Esta es una serie geométrica de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

donde $a = 1$ (el primer término de la serie) y $r = \frac{1}{3}$ (la razón común).
Una serie geométrica es converge si y sólo si $|r| < 1$. En este caso, $r = \frac{1}{3}$, y $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, por lo que la serie es convergente.

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Sustituyendo los valores $a = 1$ y $r = \frac{1}{3}$, obtenemos:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Consideremos una serie geométrica infinita de la forma:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

donde a es el primer término y r es la razón común.
Primero, consideremos la suma parcial de los primeros $N + 1$ términos de la serie:

$$S_N = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^N$$

Esta suma parcial se puede escribir como:

$$S_N = a\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^N\right)$$

Multipliquemos la suma parcial S_N por r:

$$rS_N = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{N+1}$$

Restamos rS_N de S_N:

$$S_N - rS_N = \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^N\right) - \left(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{N+1}\right)$$

Al realizar la resta, todos los términos se cancelan excepto el primero y el último:

$$S_N(1 - r) = a - ar^{N+1}$$

Por lo tanto, la suma parcial se puede expresar como:

$$S_N = \frac{a(1 - r^{N+1})}{1 - r}$$

Ahora, para obtener la suma de la serie infinita, tomamos el límite de S_N cuando N tiende a infinito:

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{a(1 - r^{N+1})}{1 - r}$$

Si $|r| < 1$, entonces $r^{N+1} \to 0$ cuando N tiende a infinito, por lo que:

$$S = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$$

Podemos reescribir la serie como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta que la serie empienza en $n = 1$, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} = \frac{1}{9 - 3\sqrt{3}}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+1}.$$

Recordemos la Proposición 3.36 de las notas: *Condición necesaria de convergencia.* Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Notamos que $\lim_{n\to\infty} 5^{n+1} = +\infty$. Por lo tanto, la serie diverge.

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}.$$

Descomponemos la fracción $\frac{3}{n(n+3)}$ en fracciones parciales:

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}.$$

Entonces:

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}.$$

La serie se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Entonces la suma de los primeros n términos es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right).$$

Esta es una suma telescópica. Expandiendo algunos términos:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Los términos intermedios se cancelan, dejando:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right).$$

Para encontrar la suma infinita, tomamos el límite de S_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \right].$$

A medida que $n \to \infty$, los términos $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, y $\frac{1}{n+3}$ tienden a 0. Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) = 0.$$

Entonces la suma infinita es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Calculando la suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}.$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right).$$

Usamos la propiedad de los logaritmos $\log(a^b) = b\log(a)$:

$$\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = 2\log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Luego:

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n).$$

Entonces:

$$\log\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = 2(\log(n+1) - \log(n)).$$

Observamos que esta es una serie telescópica. Expandiendo algunos términos:

$$2\left[(\log(2) - \log(1)) + (\log(3) - \log(2)) + (\log(4) - \log(3)) + \cdots\right].$$

Vemos que todos los términos intermedios se cancelan. La suma parcial de los primeros n términos es:

$$S_n = 2\left[\log(n+1) - \log(1)\right].$$

Ya que $\log(1) = 0$, esto simplifica a:

$$S_n = 2\log(n+1).$$

Para encontrar la suma de la serie infinita, tomamos el límite cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\log(n+1).$$

Dado que $\log(n+1) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, el límite también tiende a ∞.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)$$

es divergente, ya que su suma parcial tiende a infinito.

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Proponemos:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}.$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $(n+1)(n+2)(n+3)$:

$$n = A(n+2)(n+3) + B(n+1)(n+3) + C(n+1)(n+2).$$

Expandiendo y agrupando términos:

$$n = (A+B+C)n^2 + (5A+4B+3C)n + (6A+3B+2C).$$

Igualamos los coeficientes:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=1 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 2, \quad C = -\frac{3}{2}.$$

Entonces:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3}.$$

La serie original ahora es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3} \right).$$

Reescribimos el termino general de la siguiente forma:

$$\frac{-1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3}{2(n+3)} = \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{4}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)}$$

$$\frac{-1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3}{2(n+3)} = \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{3}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)}$$

Agrupamos

$$\frac{-1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3}{2(n+3)} = (\frac{-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}) + (\frac{3}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)})$$

Al tomar el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}.$$