3.MÉTODOS DE ESTIMACIÓN CLÁSICOS :TEST DE BAARDA

➢ CONCEPTOS BÁSICOS

En este primer apartado se tratará de hacer un repaso de todos aquellos conceptos que permitirán, posteriormente, llevar a cabo el estudio sobre las técnicas de estimación robusta aplicadas a un conjunto de datos clásicos obtenidos de la observación de una red topográfica.

- **ANÁLISIS ESTADÍSTICO**

La *estadística* es la herramienta fundamental que permite llevar a cabo el proceso relacionado con la investigación científica y que estudia la captura, organización, análisis y presentación de un conjunto de datos, tanto para la deducción de conclusiones como para la toma de decisiones.

Tal conjunto de datos se denomina *población*, que puede ser finita o infinita, y de ella se observa una pequeña parte que es la *muestra*. Como en dicha muestra no se estudia el total de datos recopilados, no se puede estar seguro de las conclusiones obtenidas a partir de ella, por lo que a menudo se emplea el término de *probabilidad*. Constituyen una rama de las matemáticas que se ocupa de medir o determinar cuantitativamente la posibilidad de que un suceso o experimento produzca un determinado resultado.

En estadística descriptiva sólo se describe y analiza una muestra de datos, sin sacar conclusiones de la población de donde se extrae, pues de ello se encarga la estadística inferencial.

Cuando se dispone de gran número de datos es útil distribuirlos en clases o categorías y determinar la cantidad de datos que pertenecen a cada clase; esta cantidad se llama *frecuencia de clase*. Una ordenación tabular de los datos en clases asociadas a sus frecuencias se llama ***distribución de frecuencia***.

- ***Distribuciones de frecuencia relativa***: La frecuencia relativa de una clase es la frecuencia de la clase dividida por el total de frecuencias de todas las clases y se expresa como porcentaje.

- **DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD**

Se considera un *suceso aleatorio* un evento cuya frecuencia relativa de ocurrencia se aproxima a un límite estable cuando el número de observaciones del espacio muestral se incrementa hasta infinito. Es, precisamente, dicho límite lo que en estadística se considera la ***probabilidad*** de dicho suceso

- Para su aplicación en observaciones topográficas, es más conveniente describir la probabilidad de un suceso aleatorio como una función algebraica, que constituirá el modelo de probabilidad del evento.

- Siendo X una *variable aleatoria*; es decir, una variable estadística cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio, y p(x) su función de probabilidad, se podrá construir el modelo de probabilidad de dicho experimento.

$F(x) = P[\, X \leq x] \;;$ Para todo x

Esta es la función de distribución de la probabilidad de X, o simplemente la ***función de distribución***.

En caso de tratarse de un de un modelo de probabilidad cuya función de distribución es continua, la correspondiente función de probabilidad p(x) valdrá 0 en todos los puntos. Es por ello que se utiliza otra función en lugar de p(x). Esta función se llama función de densidad de probabilidad f(x).

Como F(x) es no decreciente, su pendiente debe ser no negativa. Por tanto:

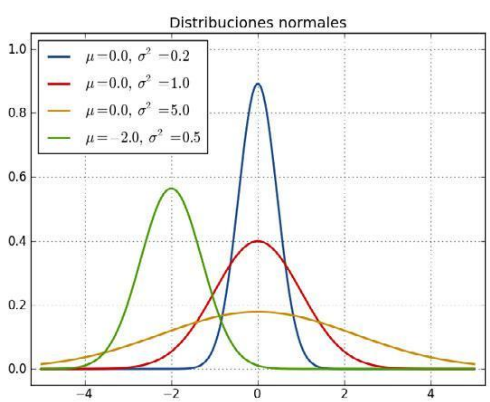
$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}\,;$ Para todo x: $f(x) \geq 0$

- DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL

La distribución normal anteriormente citada, se caracteriza por ser una de las distribuciones de probabilidad que más puede aparecer relacionada con fenómenos reales, ya sean naturales, sociales o psicológicos. Tales fenómenos están influenciados por una enorme cantidad de variables incontrolables, por lo que el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene con la suma de unas pocas causas independientes.

A la distribución normal, se le asocian dos funciones:

- La *función densidad de probabilidad*



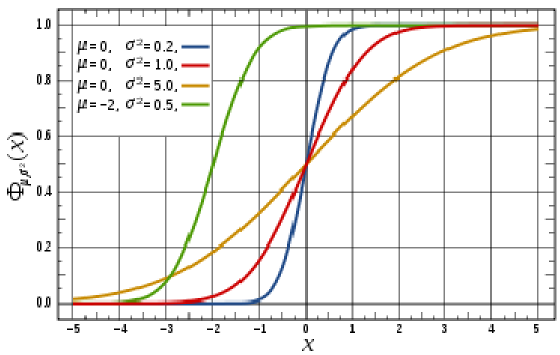
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

Imagen 3.1.1. Gráfico de la función densidad en una distribución normal.

Las cantidades μ, σ son los parámetros de la distribución y se llaman media y desviación estándar, respectivamente.

- La *función distribución de probabilidad*



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} * dx$$

$$-\infty < x < \infty$$

Imagen 3.1.2. Gráfico de la función distribución de probabilidad en una distribución normal.

La función densidad que representa a la distribución normal es muy característica, debido a que en su representación gráfica presenta una forma acampanada y una clara simetría respecto a un *parámetro estadístico* que, en este caso, es la media (μ). Ver figura 3.1.1.

La teoría de errores está muy relacionada con la distribución normal. De hecho, esta distribución se usa como modelo de probabilidad para un error que se considera una variable aleatoria y que tiene varias componentes.

- *PROPIEDAD: Si el error resultante en una medida es la suma de varias componentes y cada una tiene su propia distribución de probabilidad, se puede demostrar que el error total también sigue una distribución normal, estén o no sus componentes distribuidas normalmente.*

- **TEORÍA Y PROPAGACIÓN DE ERRORES**

En todas las ciencias experimentales se opera con valores numéricos obtenidos por observación, los cuales siempre estarán afectados de una serie de errores que hacen que en distintas observaciones de una misma magnitud se obtengan resultados diferentes.

Como todos los datos están sujetos a variaciones, ninguna cantidad medida es completamente determinable, aunque sí se puede considerar un valor fijo para una cantidad que se considerará el ***valor verdadero***, pero lo que en realidad se tiene es una ***estimación*** de ese valor.

Como existe variación en la medida de una cantidad, existirán diferencias entre dicho valor medido y el valor verdadero fijado. Esta diferencia se llama ***error verdadero*** en el valor medido.

- Como el valor verdadero no se conoce, pero sí una estimación, no se puede decir que se pueda obtener el valor del error verdadero, aunque sí una estimación de dicho error; es lo que se conoce como ***residuo***.

Es por ello que se establece una *teoría de errores* que permita decidir el valor final que se va a asignar a cada magnitud y con qué precisión se hace.

➢ <u>**CLASIFICACIÓN DE ERRORES:**</u>

Existen tres tipos de errores que se pueden encontrar en las observaciones:

I) *SISTEMÁTICOS:* Son aquellos errores que siempre que se realice una observación de una misma magnitud, en idénticas condiciones, se presenta con el mismo valor y mismo sentido; en este caso, se trataría de un error constante.
Vienen dados por alguna relación establecida de antemano, en función de alguna de las variables que intervienen en la observación; siguen una determinada ley matemática.

II) *ACCIDENTALES:* Son errores de los cuales no se conoce su sistema o relación funcional. Después de haber detectado y eliminado los errores groseros y se han corregido las medidas de errores sistemáticos, todavía queda alguna variación. Esta variación se debe a errores aleatorios, porque incluye algunos componentes de error que tienen comportamiento aleatorio. Así, los propios errores aleatorios, han de considerarse variables aleatorias, y estás deben estudiarse usando modelos de probabilidad.

III) *GRAVES o de TIPO I:* Son el resultado de imperfecciones debidas a la falta de cuidado del observador.

Estos errores no pertenecen a la muestra aleatoria, por lo que no seguirán una distribución de tipo normal. Deben detectarse y eliminarse de las medidas antes de que éstas sean usadas.

Este tipo de errores serán, posteriormente, el objeto de nuestro estudio.

➢ INTRODUCCIÓN:

Actualmente, el estudio de la fiabilidad es uno de los temas con más aplicación y utilidad en la Fotogrametría, Geodesia y muchas otras Ciencias en general. El motivo de su importancia radica en la necesidad de trabajar con grandes cálculos computacionales en los cuales se manejan multitud de datos. Debido a este gran volumen de datos a manejar, se hace indispensable poder llevar a cabo (de forma automática) un control de los posibles errores en las observaciones, suceso bastante habitual.

Para poder materializar nuestras investigaciones en el simulador, se hizo imprescindible desarrollar un ***algoritmo que simulara errores groseros en los puntos***. Posteriormente, la detección de estos errores groseros se realizó programando los algoritmos de los distintos métodos: Procedimientos Clásicos, que se apoyan en diferentes tests estadísticos (Test de Baarda, Test de Pope, Test Global del Modelo), y los Procedimientos Robustos, los cuales no se apoyan en la estadística y surgen cuando un determinado conjunto de observaciones se desvía del Modelo Normal propuesto por Gauss a causa de errores groseros. Se trata pues, de investigar acerca del comportamiento de las distintas metodologías en el contexto de Fotogrametría Terrestre, ayudados por el simulador. En definitiva, buscar métodos alternativos de ajuste que actúen de modo eficiente independientemente de la distribución que sigan sus errores.

➢ MÉTODOS CLÁSICOS

Los Procedimientos Clásicos implementados en el simulador se apoyan en el principio de los MMCC establecido por Gauss, consistente en imponer el criterio de que la función f, definida de la forma $f = V^TPV$, ha de ser mínima, siendo P la matriz formada por los pesos de las observaciones.

El cálculo de la fiabilidad en el simulador de fotogrametría terrestre mediante los procedimientos clásicos, consistirá en aplicar los siguientes tests estadísticos:

- Test Global del Modelo.
- Test de Baarda.
- Test de Pope.

En este proyecto se estudiará el Test de Baarda.

➢ MÉTODO DE BAARDA O DATA SNOOPING

Se denomina fiabilidad de una red geodésica a su resistencia a los errores groseros o equivocaciones, o dicho en otras palabras, a la facilidad para la detección de los errores groseros. Evidentemente, cuanto más precisas sean las observaciones y homogéneas, óptima la configuración de la red, un error grosero será más fácilmente detectable. En la literatura geodésica se han dado varios métodos para la detección de errores groseros, ahora se va a resumir el denominado Test de Baarda.

➢ TEORÍA DE BAARDA

El método fue desarrollado por Baarda (1967-1968) y más tarde (1980) fue aplicado en problemas fotogramétricos.

V=Ax-L l $\rightarrow observación$

↓

Ajuste ⟶ V, x, Î; $Q_{vv}, Q_{xx}, Q_{\hat{l}\hat{l}}$

-La relación entre el vector de residuos y los errores de observación "dl" es:

$$V = -Q_{vv}Pdl$$

Siendo P la matriz de pesos.

-Por tanto, el efecto de un error grosero Δl_i en el residuo $V_i$de la observación l_i será:

$$\Delta V_i = -\sigma_i \Delta l_i$$

Donde σ_i es el elemento de la diagonal de la matriz $Q_{vv}\ P$

σ_{vi} es la desviación estándar del residuo V_i

$$\sigma_{vi} = \hat{\sigma}_o \sqrt{q_i}$$

q_i es un elemento iésimo de la diagonal de Q_{vv}

-En el test de Baarda se utiliza el residuo estandarizado $\left(\frac{V_i}{\sigma_{vi}}\right)$

$$W_i = \frac{V_i}{\sigma_{vi}} \cong Normal\ tipificada$$

- Dentro de la inferencia estadística, un contraste de hipótesis (también denominado test de hipótesis o prueba de significación) es un procedimiento para juzgar si una propiedad que se supone en una población estadística es compatible con lo observado en una muestra de dicha población. Fue iniciada por Ronald Fisher y fundamentada posteriormente por Jerzy Neyman y Karl Pearson.

Mediante esta teoría, se aborda el problema estadístico considerando una hipótesis determinada Ho y una hipótesis alternativa H_1, y se intenta dirimir cuál de las dos es la hipótesis verdadera, tras aplicar el problema estadístico a un cierto número de experimentos.

Está fuertemente asociada a los considerados errores de tipo I y II en estadística, que definen respectivamente, la posibilidad de tomar un suceso falso como verdadero, o uno verdadero como falso.

Existen diversos métodos para desarrollar dicho test, minimizando los errores de tipo I y II, y hallando por tanto con una determinada potencia, la hipótesis con mayor probabilidad de ser correcta. Los tipos más importantes son los test centrados, de hipótesis y alternativa simple, aleatorizados, etc.

-Planteamiento básico del contraste de hipótesis

Se denomina hipótesis nula Ho a la hipótesis que se desea contrastar. El nombre de "nula" significa "sin valor, efecto o consecuencia", lo cual sugiere que Ho debe identificarse con la hipótesis de no cambio (a partir de la opinión actual); no diferencia, no mejora, etc. Ho representa la hipótesis que mantendremos a no ser que los datos indiquen su falsedad, y puede entenderse, por tanto, en el sentido de "neutra". La hipótesis Ho nunca se considera probada, aunque puede ser rechazada por los datos. Por ejemplo, la hipótesis de que dos poblaciones tienen la misma media puede ser rechazada fácilmente cuando ambas difieren mucho, analizando muestras suficientemente grandes de ambas poblaciones, pero no puede ser "demostrada" mediante muestreo, puesto que siempre cabe la posibilidad de que las medias difieran en una cantidad δ lo suficientemente pequeña para que no pueda ser detectada, aunque la muestra sea muy grande.

A partir de una muestra de la población en estudio, se extrae un estadístico (esto es, una valor que es función de la muestra) cuya distribución de probabilidad esté relacionada con la hipótesis en estudio y sea conocida. Se toma entonces como región de rechazo al conjunto de valores que es más improbable bajo la hipótesis, esto es, el conjunto de valores para el que rechazaremos la hipótesis nula si el valor del estadístico observado entra dentro de él.

Siendo Ho la hipótesis nula (no hay error en la observación l_i) se rechaza si:

$$|W_i| > C$$

Siendo C un valor para un nivel de confianza específico.

La elección de C se hace de tal forma que, la probabilidad α de error tipo I (rechazan Ho cuando es cierta) y la probabilidad β de error tipo II (aceptan Ho si es falsa), sean pequeñas.

$$\alpha = 0{,}1\%$$
$$\beta = 20\%$$

Por lo que:

$$\begin{cases} C = 4.1 \\ C = 329 \text{ (Förstner)} \end{cases}$$

-La estrategia a seguir es:

1. Determinar una solución global utilizando todas las observaciones
2. Aplicar el Test de Hipótesis a los residuos normalizados, que son los residuos de un vector ajustado dividido por el error estimado.
3. Eliminar la observación sospechosa de tener errores según el test anterior
4. Determinar de nuevo una solución global, sin incluir la observación errónea.

Pero existen desventajas: requiere de un proceso iterativo (se eliminan de una en una las observaciones erróneas) y el comportamiento del método empeora si existen muchas observaciones erróneas.

Una forma intuitiva de contrastar una red es realizar el examen de los residuales que produce el ajuste de mínimos cuadrados.

-Para aplicar el Test de Baarda una vez hecho el ajuste por mínimos cuadrados, hay que seguir los siguientes pasos:

- Hallar la matriz cofactor de los residuos estimados Q_{vv} , que se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$Q_{vv} = Q - AN^{-1}A^t$$

Siendo:

Q la matriz cofactor a priori de las observaciones

$$Q = P^{-1}$$

y $N = A^tPA$

- La matriz covarianza de los residuos estimados se obtiene multiplicando la varianza de referencia a posteriori(permite analizar la precisión del ajuste y los errores asociados a las incógnitas mediante estadísticos propios del método de los mínimos cuadrados) por la matriz cofactor:

$$\textstyle\sum_{vv} = \hat{\sigma}_o^2 Q_{vv}$$

Esta matriz tiene como diagonal las varianzas de los residuos estimados, que irán de σ_{v1}^2 a σ_{vn}^2.

- Y la distribución de las cantidades (residuos tipificados)

$$w_i = \frac{|V_i|}{\sigma_{vi}} \sim N(0,1)$$

es aproximadamente normal de media cero y varianza unidad.

- Se pueden considerar observaciones erróneas con un 99,9% de confianza aquellas cuyo residuo tipificado supere la cota $w_o = 3{,}29$.

- TEST DE BAARDA APLICADO A LA RED

Lo primero que se ha hecho es aplicar el test de Baarda a la red de nivelación incluyendo todas las observaciones, incluso la que se eliminó para realizar el ajuste, con el fin de observar si la detecta.

Para este caso no valdría la observación del punto N al punto 15, ya que no se pueden realizar los cálculos por dar una raíz negativa, porque resulta un número negativo en la matriz cofactor E_{vv} .
Esto ocurre porque es un número casi exacto, da prácticamente cero en el cálculo, por lo que no valdría para aplicarla en este test.

Para aplicar el test se seguirán los pasos expuestos anteriormente.

Como se puede observar a continuación, en este caso el Test de Baarda sí detecta el error en la observación del punto 9 al punto 3, ya que el resultado del test es mayor que 3,29.

La matriz w_i resultante es la siguiente:

	wo
12 a 13	0,007
14 a 15	0,757
14 a 12	0,310
15 a 16	0,282
15 a 17	0,266
16 a 18	0,050
16 a 17	0,207
12 a 11	0,289
8 a 19	1,580
18 a 19	0,999
10 a 8	0,832
19 a 3	2,622
19 a 2	1,041
2 a 1	0,498
1 a 7	0,210
6 a 7	0,209
5 a 6	0,113
3 a 4	1,041
11 a 13	0,260
10 a 11	0,073
10 a 9	0,759
11 a 9	0,445

wo<3,29

9 a 8	1,681	
14 a 13	0,254	
17 a 18	0,093	
18 a 8	1,140	
17 a 19	0,614	
4 a 5	0,419	
9 a 3	3,871	>wo
4 a 6	0,350	
5 a 7	0,271	
6 a 1	0,276	
7 a 2	0,325	

Ahora se procedería a eliminar la observación y repetir el proceso, y se obtendría:

	w
12 a 13	1,330
14 a 15	2,797
14 a 12	1,515
15 a 16	1,211
15 a 17	0,761
16 a 18	1,008
16 a 17	0,215
12 a 11	2,893
8 a 19	0,626
18 a 19	0,562
10 a 8	1,362
19 a 3	0,257
19 a 2	0,257
2 a 1	1,052
1 a 7	0,470
6 a 7	0,279
5 a 6	0,165
3 a 4	0,257
11 a 13	1,063
10 a 11	1,447
10 a 9	0,073
11 a 9	0,387
9 a 8	0,448
14 a 13	0,505
17 a 18	0,857
18 a 8	1,267
17 a 19	0,024
4 a 5	0,557

wo<3,29