

La distribución normal

Los errores en las observaciones se pueden clasificar como sistemáticos o aleatorios. Los errores sistemáticos son errores que siguen leyes físicas y pueden corregirse o eliminarse matemáticamente siguiendo procedimientos de campo adecuados con instrumentos. Por ejemplo, la expansión o contracción de una cinta de acero provocada por temperaturas que difieren de la temperatura estándar de la cinta es un error sistemático que se puede corregir matemáticamente. A menudo, en topografía, corregimos los errores sistemáticos utilizando el principio de reversión. Por ejemplo, podemos compensar el hecho de que el eje vertical de un teodolito no sea perpendicular al eje horizontal promediando los ángulos observados en las posiciones de la cara I (directa) y la cara II (inversa). Eliminamos los efectos de la curvatura terrestre y la refracción y el error de colimación en la nivelación diferencial al mantener nuestras distancias de visión trasera y delantera equilibradas entre los puntos de referencia.

Por supuesto, los errores (también llamados errores garrafales) son un hecho de la vida desde que somos humanos. De hecho, un hombre sabio me dijo una vez que las únicas personas que nunca cometen un error son las personas que nunca hacen nada. Los errores no son errores, pero deben eliminarse de nuestros datos. Estos pueden variar desde simples errores de transcripción hasta la identificación errónea de estaciones y procedimientos de campo inadecuados. Los errores se pueden evitar siguiendo cuidadosamente los procedimientos de campo adecuados. Sin embargo, no existe una teoría sobre cómo eliminar un error de transcripción que no sea detectarlo en el momento en que ocurre o, con suerte, más adelante en un análisis posterior al ajuste. De hecho, más adelante en artículos posteriores, analizaré métodos para descubrir errores y grandes errores aleatorios, que se conocen como valores atípicos, en los datos.

Los errores aleatorios son todos los errores que quedan después de eliminar los errores sistemáticos de las observaciones. Los errores aleatorios ocurren debido a nuestras propias limitaciones humanas, limitaciones instrumentales y condiciones ambientales variables que afectan nuestras observaciones. Por ejemplo, nuestra capacidad para apuntar con precisión a un objetivo depende del instrumento, nuestra vista personal, la trayectoria de nuestra línea de visión en la atmósfera y nuestra destreza manual para enfocar el instrumento y apuntar al objetivo. Como otro ejemplo, la observación de un ángulo depende de la capacidad del instrumento para leer sus círculos en esta era digital y la capacidad del operador para señalar el objetivo.

De hecho, todos los fabricantes tienen especificaciones técnicas para sus instrumentos que indican la repetibilidad del instrumento en una observación. Como ejemplo, la norma 17123-3 de la Organización Internacional de Normalización (ISO), que reemplazó a la norma DIN 18723, expresa la repetibilidad de una estación total basada en procedimientos específicos de la norma. Estos estándares fueron ideados para ayudar a los compradores a diferenciar entre las calidades de los instrumentos. No estaban destinados a indicar la habilidad personal de alguien con un instrumento, ya que el error de puntería es un error personal. Como ejemplo, todos los años hice que los estudiantes de segundo año replicaran el estándar DIN para determinar su valor personal para una estación total en particular. Algunos estudiantes obtendrían valores mejores que el valor publicado para el instrumento, otros obtendrían valores muy cercanos al valor publicado y algunos obtendrían valores superiores al valor publicado. Estas variaciones eran dependientes en sus diferencias personales.

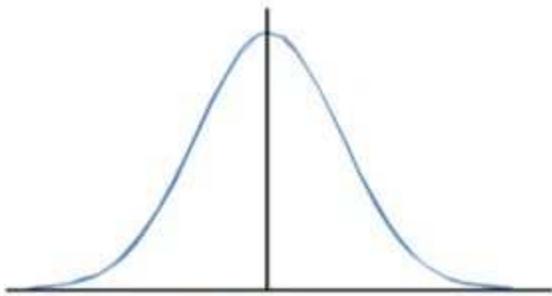


Figure 1 Normal distribution curve.

No importa si estamos usando estaciones totales, niveles automáticos o digitales, o receptores GNSS, los errores aleatorios de las observaciones que recopilamos seguirán la curva de distribución normal. La distribución normal se basa en una cantidad infinita de datos. Por lo tanto, no es apropiado para encuestas realizadas para funcionarios electos, ya que el público votante es un número finito. Sin embargo, en la topografía, podríamos pasar toda nuestra vida midiendo una distancia, seguido por la vida de nuestros descendientes, y la vida de sus descendientes, y así sucesivamente tratando de determinar esta longitud única. Por supuesto, nadie está sugiriendo que hagamos esto. Sin embargo, cuando tomamos una muestra de datos para una observación, la muestra proviene de un número infinito de observaciones posibles y sigue la distribución normal y sus propiedades. De hecho, los errores de observación en astronomía fueron la razón de la creación de la distribución normal y los mínimos cuadrados.

Como se muestra en la Figura 1, los datos normalmente distribuidos son simétricos con respecto al centro de los datos. La ordenada (coordenada y) de la distribución está definida por la ecuación (1) donde σ es el error estándar de la población y x es el tamaño del error.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

De este modo x representa los residuos de cada observación con el centro de la curva en cero. Como se puede ver en la Figura 1, la mayoría de los errores se agrupan alrededor del centro, pero pueden ocurrir y ocurrirán algunos errores aleatorios grandes. Lo que debemos hacer como topógrafos es encontrar estos grandes errores aleatorios y eliminarlos del conjunto de observaciones. Esto puede suceder en el campo, antes del ajuste o en un análisis posterior al ajuste. De hecho, una de las ventajas de usar el ajuste por mínimos cuadrados es el hecho de que es posible analizar estadísticamente los residuos y determinar cuándo un residuo es demasiado grande.

Los errores en las observaciones se pueden clasificar como sistemáticos o aleatorios.

Los errores sistemáticos siguen leyes físicas y pueden corregirse o eliminarse matemáticamente siguiendo los procedimientos de campo adecuados con instrumentos. Por ejemplo, la expansión o contracción de una cinta de acero provocada por temperaturas que difieren de la temperatura estándar de la cinta es un error sistemático que se puede corregir matemáticamente.

A menudo, en la topografía, corregimos los errores sistemáticos utilizando el principio de reversión. Por ejemplo, podemos compensar el hecho de que el eje vertical de un teodolito no sea perpendicular al eje horizontal promediando los ángulos observados en las posiciones de la cara I (directa) y la cara II (inversa). Eliminamos los efectos de la curvatura de la Tierra y el error de refracción y colimación en la nivelación diferencial al mantener nuestras distancias de visión trasera y delantera equilibradas entre los puntos de referencia.

Por supuesto, los errores (también llamados errores garrafales) son un hecho de la vida porque somos humanos. (Un hombre sabio me dijo una vez que las únicas personas que nunca cometen un error son las personas que nunca hacen nada). Los errores no son errores, pero deben eliminarse de nuestros datos. Estos pueden variar desde simples errores de transcripción hasta la identificación errónea de estaciones y procedimientos de campo

inadecuados. Los errores se pueden evitar siguiendo cuidadosamente los procedimientos de campo adecuados.

No existe una teoría sobre cómo eliminar un error de transcripción que no sea detectarlo en el momento en que ocurre o, con suerte, más adelante en un análisis posterior al ajuste.

Los errores aleatorios son todos los errores que quedan después de eliminar los errores sistemáticos de las observaciones. Los errores aleatorios ocurren debido a nuestras propias limitaciones humanas, limitaciones instrumentales y condiciones ambientales variables que afectan nuestras observaciones. Por ejemplo, nuestra capacidad para apuntar con precisión a un objetivo depende del instrumento, nuestra vista personal, la trayectoria de nuestra línea de visión en la atmósfera y nuestra destreza manual para enfocar el instrumento y apuntar al objetivo. Como otro ejemplo, la observación de un ángulo depende de la capacidad del instrumento para leer sus círculos en esta era digital y la capacidad del operador para señalar el objetivo.

De hecho, todos los fabricantes tienen especificaciones técnicas para sus instrumentos que indican la repetibilidad del instrumento en una observación. Por ejemplo, el estándar 17123-3 de la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), que reemplazó al estándar DIN 18723, expresa la repetibilidad de una estación total basada en procedimientos específicos en el estándar. Estos estándares fueron ideados para ayudar a los compradores a diferenciar entre las calidades de los instrumentos. No estaban destinados a indicar la habilidad personal de alguien con un instrumento porque el error de puntería es un error personal.

Como ejemplo, todos los años hice que los estudiantes de segundo año replicaran el estándar DIN para determinar su valor personal para una estación total en particular. Algunos estudiantes obtendrían valores mejores que el valor publicado para el instrumento, otros obtendrían valores muy cercanos al valor publicado y algunos obtendrían valores superiores al valor publicado. Estas variaciones dependen de sus diferencias personales.

No importa si estamos usando estaciones totales, niveles automáticos o digitales, o receptores GNSS, los errores aleatorios de las observaciones que recopilamos seguirán la curva de distribución normal. La distribución normal se basa en una cantidad infinita de datos. Por lo tanto, no es apropiado para encuestas realizadas para funcionarios electos porque el público votante es un número finito.

Sin embargo, al hacer topografía, podríamos pasar toda nuestra vida midiendo una distancia, seguida por la vida de nuestros hijos y la vida de sus hijos, y así sucesivamente para siempre tratando de determinar esta longitud única. Nadie está sugiriendo que hagamos esto. Sin embargo, cuando tomamos una muestra de datos para una observación, la muestra es de un número infinito de posibles observaciones y sigue la distribución normal y sus propiedades. De hecho, los errores de observación en astronomía fueron la razón de la creación de la distribución normal y los mínimos cuadrados.

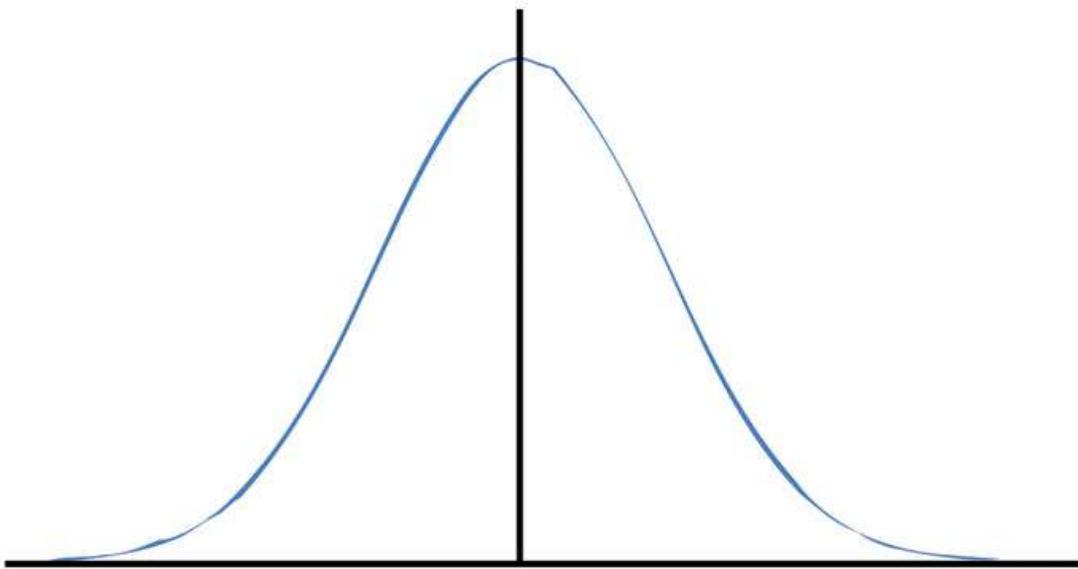


Figura 1

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Ecuación 1

Como se muestra en **la Figura 1** , los datos normalmente distribuidos son simétricos con respecto al centro de los datos. La ordenada (coordenada y) de la distribución está definida por la **Ecuación (1)** donde σ es el error estándar de la población y x es el tamaño del error. De este modo x representa los residuos de cada observación con el centro de la curva en cero.

Como se puede ver en esta figura, la mayoría de los errores se agrupan alrededor del centro, pero pueden ocurrir y ocurrirán algunos errores aleatorios grandes. Lo que debemos hacer como topógrafos es encontrar estos grandes errores aleatorios y eliminarlos del conjunto de observaciones. Esto puede suceder en el campo, antes del ajuste o en un análisis posterior al ajuste. De hecho, una de las ventajas de usar el ajuste por mínimos cuadrados es el hecho de que es posible analizar estadísticamente los residuos y determinar cuándo un residuo es demasiado grande.

Aislamiento de errores y valores atípicos

El área bajo la curva de distribución normal que se muestra en la Figura 1 siempre es igual a 1. Esta curva es asintótica (se acerca pero nunca toca) el eje x .

Lo que significa la primera afirmación es que el 100 % de los datos se encuentran debajo de la curva. Lo que significa la segunda afirmación es que pueden ocurrir grandes errores aleatorios, pero rara vez lo hacen. Además, debe haber tantas observaciones con residuos negativos como con residuos positivos.

Otro hecho de la distribución normal es que un poco más del 68% de los residuos deben estar dentro de una desviación estándar de la media que está en el centro de la curva. Es decir, alrededor del 68 % de los residuos deben estar entre $y^- - S$ y $y^- + S$ donde y^- es la media de los datos y S su desviación estándar.

$$S = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}$$

ecuación 2

La desviación estándar se calcula como se muestra en **la Ecuación (2)**, donde v representa el residuo de una sola observación, que se define como $v = y - \bar{y}$ *observación*, y $\sum v^2$ es la suma de todos los cuadrados de los residuos observacionales. Si te preguntas por qué al cuadrado, es porque la suma simple de todos los residuos siempre es cero, excepto por errores de redondeo. Por lo tanto, el intervalo $\bar{y} \pm S$ debería contener alrededor del 68% de las observaciones cuando hacemos observaciones repetidas.

Si estuviéramos dispuestos a llamar al 32 % de las observaciones como errores garrafales o valores atípicos (recuerde que los valores atípicos son grandes errores aleatorios), podríamos descartar o volver a observar todas las observaciones que caen fuera de este intervalo del 68 %. Sin embargo, si hiciéramos esto, pronto estaríamos fuera del negocio. La mayoría de los estándares topográficos se basan en un intervalo del 95%. En la detección de errores, a menudo se utiliza el 99% o más. La razón es que estamos dispuestos a aceptar que un error que está fuera de este intervalo es más probable que sea un error garrafal (error) que un gran error aleatorio (valor atípico).

$$\bar{y} \pm E \cdot S$$

Ecuación 3

Para determinar el intervalo de confianza del 95% necesitamos un multiplicador. Es decir, el intervalo del 95 % para un conjunto de datos se da como se muestra en **la Ecuación (3)**, donde el multiplicador es E . **La Tabla 1** muestra varios multiplicadores para probabilidades seleccionadas. En la práctica, es común usar un intervalo de dos veces la desviación estándar para determinar aquellas observaciones que se consideran errores garrafales. Este valor de 2, que debería ser 1.9599, proviene de la distribución normal donde el 95% de los residuos están centrados en cero en la distribución normal.

Probability	Multiplier	Name
90%	1.645S	90% confidence interval
95%	1.960S	2-sigma error
99.7%	2.968S	3-sigma error

tabla 1

Esto trae a colación otro hecho interesante en estadística: está bien decir que el multiplicador del 95 % es 2 en lugar de 1,9599 o 1,96 porque en estadística esto hará poca diferencia en el análisis real. De hecho, me gusta decir que las estadísticas son un poco confusas.

Como ejemplo, **la Tabla 2** muestra 15 observaciones de distancia (Obs.) para el mismo curso. La media de estos datos se muestra en **la Ecuación (4)** . Usando esta media, los residuos calculados para las observaciones están en las columnas que siguen a cada observación. La suma de los residuos al cuadrado es 0,077735. Al sustituir este valor en la ecuación para calcular S, se obtiene una desviación estándar para una sola observación de aproximadamente $\pm 0,074$. El intervalo del 95 % para el conjunto de observaciones es $212,237 \pm 1,96 (0,074)$, lo que da como resultado un rango del 95 % entre 212,091 y 212,383.

Obs.	v	Obs.	v	Obs.	v	Obs.	v	Obs.	v
212.22	0.017	212.25	-0.013	212.23	0.007	212.15	0.087	212.23	0.007
212.11	0.127	212.29	-0.053	212.45	-0.213	212.22	0.017	212.24	-0.003
212.19	0.047	212.25	-0.013	212.27	-0.033	212.20	0.037	212.25	-0.013

Tabla 2

Mirando los datos en la Tabla 2, vemos que la distancia 212.45 está fuera de este intervalo. También estaría fuera del rango del 95% si se hubiera utilizado un multiplicador de 2. Por lo tanto, esta observación se puede descartar del conjunto como un gran error aleatorio o como un error. Al hacer esto, hemos utilizado una de las propiedades de la distribución normal para aislar una observación para eliminarla de un conjunto de datos.

$$\bar{y} = \frac{\sum d_i}{15} = \frac{3183.55}{15} = 212.237$$

ecuación 4

Es interesante notar que incluso en este conjunto de observaciones, hay 7 residuos negativos y 8 residuos positivos. Dado que el conjunto de datos tiene 15 elementos, estos datos se adhieren a uno de los principios básicos de los datos distribuidos normalmente en

el sentido de que las observaciones se distribuyen uniformemente sobre la media, o incluso como pueden ser 15 observaciones.

Sin embargo, algunos de ustedes pueden darse cuenta en el ejemplo anterior de que solo hay 15 observaciones y que la distribución normal se basa en una población de datos con un número infinito de observaciones. Aún así, 15 observaciones para una sola distancia es más de lo que cualquier topógrafo recopilará normalmente. Si bien los principios derivados de la distribución normal son ciertos, nunca recopilamos un conjunto infinito de datos y rara vez más de 30.

La distribución t

Es importante recordar que cuando realizamos levantamientos, generalmente recolectamos muestras muy pequeñas para nuestras observaciones. Así, las medias muestrales y las desviaciones estándar tienen niveles de incertidumbre más altos que los derivados de la distribución normal, que proviene de toda una población de observaciones. A menos que recolectemos más de 30 muestras de un solo valor, realmente deberíamos usar los valores críticos y los multiplicadores de la distribución *t* y no la distribución normal.

En mi artículo anterior, discuto [la distribución normal](#) y cómo se pueden usar sus propiedades para aislar errores en las observaciones. Recuerde que la distribución normal se basa en un número infinito de observaciones.

Sin embargo, en la práctica nunca recopilamos una población de datos, sino una pequeña muestra de la población. Si esta muestra tiene una gran cantidad de observaciones, es probable que la media y la desviación estándar calculadas a partir de esta muestra coincidan estrechamente con los valores de la población. Si la muestra es pequeña, es posible que la media y la desviación estándar de la muestra no coincidan con los valores de la población.

A POPULATION OF 20 VALUES				
22.0	20.9	23.8	14.6	29.4
21.6	14.8	21.8	28.3	26.0
28.6	19.9	20.7	25.0	24.9
18.8	31.2	18.4	19.4	25.7

tabla 1

Por ejemplo, suponga que la población tiene 20 valores como se muestra en la **Tabla 1**. Ahora, suponga además que observamos solo cuatro valores de esta población como se muestra en la **Tabla 2**.

Observe cómo la media, \bar{y} y la varianza, S^2 , varían de una muestra a otra y, además, cómo ninguna muestra tiene la media poblacional de 22.79 o su varianza de 21.29. Tenga en cuenta que la varianza es simplemente el cuadrado de la desviación estándar.

A principios del siglo XX, los estadísticos reconocieron esta discrepancia entre una población y las muestras de observaciones de la población y comenzaron a desarrollar distribuciones de muestreo. De hecho, la razón por la que la distribución t a veces se denomina distribución t de *Student* se debe a su origen.

(El propietario de la cerveza Guinness contrató a estadísticos para analizar los resultados de las pruebas de sabor a fin de determinar la receta preferida para su cerveza. A partir de este análisis, uno de sus empleados desarrolló la distribución t . El estadístico *quería* publicar sus resultados al mundo, pero El propietario de Guinness no quería que otros fabricantes de cerveza supieran que estaba usando estadísticos, por lo que hizo que la persona publicara los resultados bajo el seudónimo de *Student*. El nombre del estadístico era William Sealy Gosset. Publicó la distribución en 1908. Esto explica por qué la distribución a veces se denomina distribución t de *Student*).

SAMPLE SETS FROM TABLE 1						
SAMPLE					MEAN \bar{y}	VARIANCE S^2
1	20.90	21.80	25.00	31.20	26.00	22.84
2	18.80	20.70	21.80	26.00	21.83	9.28
3	14.60	28.30	25.00	19.40	21.83	36.70
4	19.40	31.20	21.60	28.30	25.13	30.73

Tabla 2

Las distribuciones de muestreo permiten que alguien cree un rango en el que la media o la varianza de la población residirá en un porcentaje específico del tiempo. También le permiten probar errores y valores atípicos en conjuntos de datos de muestra. Estos rangos se basan en el tamaño de las muestras, las medias de las muestras y las varianzas.

Debido a que en las encuestas normalmente recolectamos una pequeña muestra de observaciones, realmente deberíamos usar los *valores críticos* (es decir, multiplicadores) de las distribuciones de muestreo para crear rangos para los errores permitidos y no los de la distribución normal.

Los valores críticos son los multiplicadores que usamos para determinar, por ejemplo, intervalos de confianza del 95 % en un conjunto de datos. Un ejemplo específico de esto son los estándares ALTA/ACSM para los errores de posicionamiento relativo permisibles que son una elipse de error del 95 %. La excepción a esta afirmación son los levantamientos GNSS en los que las muestras superan las 30 observaciones en todos los levantamientos menos cinemáticos.

Los estadísticos han declarado que los valores críticos de la distribución normal son aceptables para desarrollar intervalos de confianza cuando el número de observaciones redundantes es superior a 30.

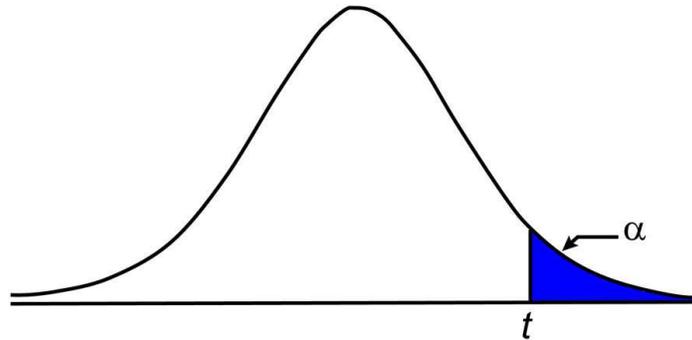


Figura 1

Las distribuciones de muestreo se derivan de datos normalmente distribuidos. Se basan en el tamaño de la muestra y el nivel de confianza deseado. Por ejemplo, la distribución t permite que alguien determine un rango para la media de la población o una muestra de datos. Su *valor crítico*, que es el valor de t en el eje x de la distribución t , se tabula en varios niveles de confianza y grados de libertad.

Es importante señalar que los valores críticos se tabulan desde el infinito hasta α puntos porcentuales y que no se centran en la media. Por lo tanto, si queremos crear un intervalo de confianza del 95 %, esto significa que estamos comprobando con 0,05 ($1 - 0,95$) puntos porcentuales o lo que se conoce como un *nivel de significancia de 0,05*.

Como se muestra en **la Figura 1**, usamos 0,05 puntos porcentuales porque los valores tabulares se determinan comenzando en infinito positivo y retrocediendo hasta el porcentaje de datos seleccionado. Dado que la distribución t es simétrica, lo que también es cierto para la distribución normal, los valores de la cola inferior en un nivel específico de confianza tienen el signo opuesto a los valores de la cola superior.

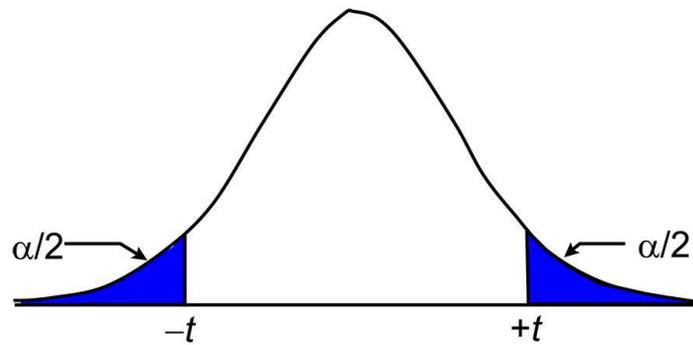


Figura 2

Como se muestra en **la Figura 2**, podemos crear un intervalo de confianza específico dividiendo el nivel de significación por 2. Por ejemplo, para crear un intervalo de confianza del 95 %, necesitaríamos determinar el valor crítico para 0,025 con los grados de libertad *apropiados*.

Esto significaría que el 2,5 % de la distribución está en el extremo negativo del gráfico y otro 2,5 % en el extremo positivo, dejando el 95 % de los datos entre estos dos valores. Debido a la simetría, este rango ocurre desde $-t$ hasta $+t$.

Las otras distribuciones de muestreo de importancia en la topografía son las distribuciones χ^2 (chi-cuadrado), F (Fisher), τ (tau).

En [el artículo anterior](#) (julio de 2015), introduje el concepto de distribuciones muestrales y la necesidad de utilizar estas distribuciones para analizar pequeñas muestras de datos. En topografía, la observación de muestras pequeñas es típica donde los ángulos a menudo se observan solo dos o cuatro veces, y las observaciones de distancia repetidas simplemente significan presionar el botón de medición más de una vez. Las distribuciones de muestreo se basan en la media y la varianza de una muestra, así como en el número de observaciones redundantes conocidas como sus *grados de libertad*.

Los grados de libertad son todas las observaciones realizadas más allá de lo necesario para determinar un valor. Entonces, por ejemplo, si hicimos cuatro observaciones de un ángulo, cualquiera de estos valores podría usarse para indicar el tamaño del ángulo. Las tres observaciones adicionales restantes se consideran observaciones *redundantes* y representan los grados de libertad de la observación.

Obviamente, estas observaciones adicionales se usan para eliminar errores sistemáticos, verificar la primera observación y crear una media y una desviación estándar para el ángulo. Se dice que esta muestra tiene tres grados de libertad que representan estas observaciones adicionales.

A medida que aumenta el número de observaciones redundantes, los valores críticos de la distribución de muestreo se aproximan a los valores para el mismo nivel de confianza de la distribución normal.

Por ejemplo, a 30 grados de libertad, el valor crítico de la distribución t es 2,04, que no está lejos de su valor de distribución normal de 1,96. Tenga en cuenta que la distribución t se convierte en la distribución normal con un número infinito de observaciones.

En el pasado, la única forma de determinar los valores críticos para una distribución era tener acceso a una tabla estadística. Sin embargo, hoy en día las hojas de cálculo brindan esta capacidad con funciones integradas.

Por ejemplo, en Excel la función para determinar un valor crítico para la distribución t es $tinv(\alpha, v)$ donde α representa el nivel de confianza y v representa los grados de libertad. Entonces, en el escenario mencionado anteriormente, sería $tinv(0.05, 3)$ donde α es 0.05 (nivel de probabilidad del 95%) y 3 es el número de grados de libertad en la muestra de cuatro observaciones como se discutió anteriormente. [Tenga en cuenta que Microsoft Excel requiere la entrada de 0,05 para el valor t crítico ($t_{0,025,v}$). Este no es el caso con otras distribuciones.]

En este caso el valor crítico, nuestro multiplicador para un intervalo de confianza del 95%, es 3,182... Este valor es muy diferente al valor de 1,96 derivado de la distribución normal. Este valor es mayor simplemente porque el tamaño de nuestra muestra es pequeño y, por lo tanto, hay más incertidumbre en la media y la desviación estándar que la que se determinó a partir de la muestra de observaciones.

Recuerde que en un artículo anterior sobre la [distribución normal](#) (junio de 2015) afirmo que los multiplicadores de esta distribución son válidos solo si observamos más de 30 observaciones repetidas. Dado que esto rara vez sucede en la topografía, necesitamos la distribución t para analizar nuestros datos en busca de valores atípicos y errores garrafales.

A POPULATION OF 20 VALUES			
22.0	14.8	20.7	19.4
21.6	19.9	18.4	29.4
28.6	31.2	14.6	26.0
18.8	23.8	28.3	24.9
20.9	21.8	25.0	25.7

tabla 1

Aquí miro cómo se puede usar la distribución t para realizar este análisis. Para mostrar esto, se repiten aquí las Tablas 1 y 2 del artículo anterior.

Como ejemplo, usando la línea 1 en la **Tabla 2**, podemos afirmar que el 95 % del tiempo la media de la población estará entre lo que se muestra en la **Ecuación 1**, donde \bar{y} es la media de la muestra, S la desviación estándar de la muestra, n la número de observaciones realizadas, y t el valor crítico de la distribución t para α puntos porcentuales con base en una muestra con ν grados de libertad.

Tenga en cuenta en esta ecuación que S/\sqrt{n} representa la desviación estándar en la media, que se utiliza para determinar un rango para la media de la población. Si deseáramos determinar un rango específico para una sola observación, lo reemplazaríamos con la desviación estándar para una sola observación, S .

SAMPLE SETS FROM TABLE 1						
SAMPLE					MEAN \bar{y}	VARIANCE S^2
1	20.90	21.80	25.00	31.20	26.00	22.84
2	18.80	20.70	21.80	26.00	21.83	9.28
3	14.60	28.30	25.00	19.40	21.83	36.70
4	19.40	31.20	21.60	28.30	25.13	30.73

Tabla 2

En este ejemplo, la media es 26,00, la desviación estándar es $\sqrt{22,84}$, n es 4, α es 0,05, que es $1 - 0,95$, y ν es 3, que es el número de observaciones redundantes. Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95 % para la media de la población basada en los valores de estas muestras es como se muestra en la **Ecuación 2**.

El valor t para una muestra con 3 grados de libertad es 3,183, que es considerablemente mayor que el multiplicador de 1,96 (o 2) que se usaría de la distribución normal. Este multiplicador más grande representa la incertidumbre que tenemos en la media y la desviación estándar de la muestra debido al número limitado de observaciones utilizadas para determinar estos valores.

Así, podemos afirmar con un 95% de certeza que la media de la población está entre 18,39 y 33,60, lo que también significa que el 5% de las veces la media de la población estará fuera de este rango.

$$\bar{y} \pm t_{(\alpha/2, v)}$$

Ecuación 1

Un uso más común para esta distribución es determinar el rango en el que debe estar el 95% de las observaciones. Esto se usa típicamente para identificar y eliminar *valores atípicos* o *errores garrafales* de las observaciones. Por lo tanto, cuando hacemos esto estamos afirmando que estamos dispuestos a descartar el 5 % de nuestras observaciones como posibles errores garrafales, razón por la cual a veces se usa el 99,7 %.

Por ejemplo, suponga que una distancia se observó cuatro veces y tenía una media de 293,56 pies con una desviación estándar de $\pm 0,023$ pies. En este caso, el 95 % de las observaciones deberían estar entre $293,56 \pm t_{0,025,3} (0,023)$. Dado que el multiplicador t es nuevamente 3,183, esto significa que el 95% de las observaciones deben estar entre 293,487 y 293,633.

$$26.00 \pm t_{0.025,3} \frac{\sqrt{22.84}}{\sqrt{4}}$$

ecuación 2

Si alguna observación está fuera de este rango, podría considerarse un error o un valor atípico y descartarse de la muestra. Nuevamente, esto significa que estamos dispuestos a descartar el 5% de nuestras observaciones para eliminar posibles errores.

A menudo, el controlador topográfico mostrará la media, su desviación estándar y los residuos cuando se realizan múltiples observaciones sobre una cantidad. En este caso, el producto del valor t y la desviación estándar de la observación proporciona el rango/intervalo de confianza para los residuos. Utilizando el ejemplo anterior, el 95 % de los residuos debe estar entre 3,183 (0,023) o $\pm 0,073$ pies.

Es importante recordar que cuando realizamos levantamientos, generalmente recolectamos muestras muy pequeñas para nuestras observaciones. Así, las medias muestrales y las desviaciones estándar tienen niveles de incertidumbre más altos que los derivados de la distribución normal, que proviene de toda una población de observaciones. A menos que recolectemos más de 30 muestras de un solo valor, realmente deberíamos usar los valores críticos y los multiplicadores de la distribución t y no la distribución normal.

En la siguiente entrega, exploro el uso de la distribución Chi-cuadrado (χ^2), que se utiliza para desarrollar la prueba de "bondad de ajuste" en los ajustes de mínimos cuadrados. En particular, observo el uso de la distribución, lo que significa "no pasar la prueba" y qué mirar cuando la prueba falla.

La distribución de chi-cuadrado

En mi artículo más reciente (agosto de 2015) , discuto la distribución *t de Student* y cómo se pueden usar sus propiedades para aislar errores en las observaciones. Otra distribución de muestreo que se usa comúnmente en los ajustes de mínimos cuadrados es la distribución χ^2 (chi-cuadrado). Aparece en la forma de lo que normalmente se llama la prueba de "bondad de ajuste". Para comprender el valor de esta prueba, debemos comprender los conceptos básicos sobre la ponderación de las observaciones en un ajuste por mínimos cuadrados (**Figura 1**).

El menos Cuadrícula Ajustamiento

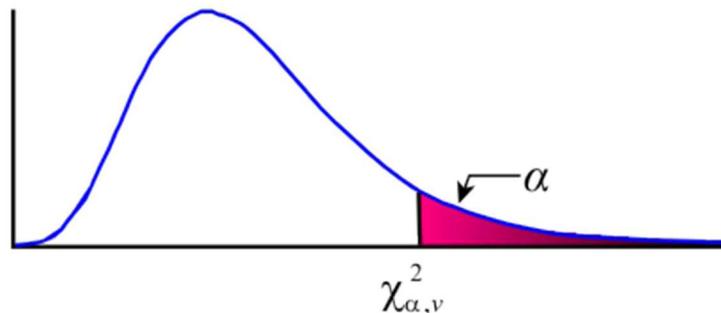


Figura 1

Una de las muchas ventajas que tiene un ajuste de mínimos cuadrados sobre la regla de la brújula o cualquier otro método de ajuste es que podemos aplicar pesos a nuestras observaciones, que controlan el tamaño de las correcciones a las observaciones. Los fabricantes de instrumentos electrónicos como los EDM y los teodolitos digitales establecen las precisiones de sus instrumentos en términos de estándares de precisión. Por ejemplo, puede tener una estación total con un estándar ISO 17123-3 para ángulos de 3" y una precisión de distancia de 3 mm + 3 ppm. Sin embargo, esto es solo una parte de lo que determina la precisión final de sus ángulos y distancias.

Otras cosas que controlan la precisión de sus observaciones son las habilidades del usuario para señalar el objetivo y colocar el instrumento y el objetivo sobre un punto, el estado de calibración de los niveles y las plomadas ópticas o láser, el número de repeticiones de las observaciones, Etcétera. (En el próximo artículo, discutiré cómo se combinan todos estos

elementos para permitirle estimar la precisión de cada observación). También sabemos que las distancias de visión más largas darán como resultado observaciones más precisas si todo lo demás es igual.

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

Ecuación 1

Los ajustes de mínimos cuadrados permiten al usuario ponderar individualmente las observaciones de acuerdo con la incertidumbre estimada de cada observación. Por lo tanto, un ángulo con una incertidumbre estimada más alta recibirá más error de cierre angular que uno con una incertidumbre estimada más baja. Este no es el caso con el ajuste de la regla de la brújula, ya que normalmente distribuimos el error de cierre en ángulos por igual a todas las observaciones de ángulo sin importar cómo se observó el ángulo.

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

ecuación 2

Los pesos de las observaciones se determinan como en **la Ecuación (1)**, donde w_i es el peso de la observación, σ_i la desviación estándar estimada de la observación y σ_0 un factor de escala, al que normalmente se le asigna un valor de 1. Por lo tanto, los pesos de las observaciones generalmente se determinan como en **la Ecuación (2)** donde a σ_0 se le asignó un valor de uno y se conoce como la *desviación estándar a priori de la unidad de peso*.

Determinación de la desviación estándar a posteriori de la unidad de peso

Después de un ajuste por mínimos cuadrados, se determinan los residuos para cada observación. Estos residuos representan los errores en las observaciones que deben crearse para satisfacer las restricciones geométricas del levantamiento. Se combinan con los pesos

asignados a las observaciones antes del ajuste para determinar la *desviación estándar a posteriori del peso unitario*, S_0 .

$$S_0^2 = \frac{\sum w_i v_i^2}{\text{redundancias}}$$

Ecuación 3

En la **Ecuación (3)**, S_0 es la *varianza de referencia del ajuste*, w_i el peso de cada observación, v_i el residual de cada observación, $\sum w_i v_i^2$ la suma del producto de los pesos de cada observación por su residual al cuadrado, y *redundancias* el número de observaciones redundantes en el sistema.

Tenga en cuenta que el número de observaciones redundantes también se denomina a veces los grados de libertad del ajuste. Por ejemplo, si una observación de distancia tiene un peso, w , de 1000 y un residuo, v , de 0,02 pies, entonces su contribución a la varianza de referencia está relacionada con $1000(0,02)^2$ o 0,4.

La clave aquí no es cómo se calculan estos valores, sino el hecho de que al final del ajuste, la varianza de referencia calculada debería coincidir estadísticamente con el valor asignado a priori de 1, estadísticamente hablando $\sigma_0^2 = S_0^2$. Si este no es el caso, hay dos causas posibles.

Primero, podría haber una o más observaciones en el ajuste que contengan errores. En este caso, sus residuos serán mayores de lo esperado. Técnicamente hablando, esto significa que la desviación estándar estimada, σ_0 , es demasiado pequeña para la observación.

Por ejemplo, supongamos que una observación de distancia tiene un error de 1 pie pero se le asigna una desviación estándar, σ_0 , de $\pm 0,02$ pies. La desviación estándar es demasiado pequeña para la calidad de la observación y, por lo tanto, resulta en una contribución a la varianza de referencia que es demasiado grande. Bajo estas condiciones, la contribución de esta única observación a la varianza de referencia mostrada en la Ecuación (3) es $1/0,02^2 = 2500$, que es igual a 2500. Si a esta observación se le diera una desviación estándar, σ_0 , de ± 1 , entonces su contribución a la varianza de referencia sería solo $1/1^2 = 1$, que es 1.

La segunda razón por la que σ_{20} no es estadísticamente igual a S_{20} es que los pesos para una observación o un conjunto completo de observaciones son incorrectos donde las precisiones de las observaciones están por encima o por debajo de lo estimado.

Prueba de bondad de ajuste

El método estadístico para comprobar si $\sigma_{20} = S_{20}$ se conoce como prueba de bondad de ajuste que utiliza la distribución χ^2 . La distribución χ^2 le permite comparar una varianza de muestra con una varianza de población.

En este caso, la varianza de la muestra es la varianza de referencia S_{20} determinada a partir del ajuste por mínimos cuadrados. La varianza de la población σ_{20} es el escalar utilizado para determinar los pesos de las observaciones, al que normalmente se le asigna un valor de 1. Nuevamente, si la prueba falla, significa que puede haber ocurrido una de dos cosas o, en algunos casos, ambas. La primera posibilidad es la presencia de errores garrafales en las observaciones, lo que provocó grandes residuos, y la segunda es que las observaciones se ponderaron incorrectamente.

La prueba de bondad de ajuste se puede considerar como una bandera de advertencia cuando el ajuste no pasa la prueba. Significa que algo no está bien en el ajuste, pero no te dice qué es específicamente. Es en este punto que el topógrafo primero debe observar los residuos para ver si alguno es mayor que $t_{\alpha/2, v} S$, donde t es el valor crítico de la distribución t con un nivel de significancia α y v el número de observaciones redundantes en el ajuste.

Mi artículo anterior analiza la distribución t y su uso para identificar errores graves en un conjunto de datos. Si no hay errores identificables, entonces el topógrafo debe realizar una comparación superficial de las desviaciones estándar asignadas para las observaciones contra sus residuos.

Por ejemplo, suponga que las desviaciones estándar de los ángulos en el ajuste están entre 2" y 3", pero el valor absoluto de los residuales angulares está entre 4" y 6". En este caso, las observaciones están sobreponderadas; es decir, las desviaciones estándar de las observaciones utilizadas para calcular los pesos en la Ecuación (2) fueron demasiado bajas, lo que resultó en un peso demasiado alto. Cuando estos pesos más altos se multiplicaron por sus respectivos residuos observacionales, se obtiene una varianza de referencia de la Ecuación (3) que es demasiado grande.

Alternativamente, también es posible subestimar las observaciones. Este es el escenario opuesto. Es decir, las desviaciones estándar de las observaciones son demasiado altas en comparación con sus residuos. La varianza de referencia resultante será menor que uno y puede ser demasiado baja. En este caso, las desviaciones estándar de las observaciones deben reducirse para lograr un ajuste por mínimos cuadrados correctamente ponderado.

El escenario anterior ocurre típicamente cuando se utilizan las desviaciones estándar de los procedimientos de observación. Dado que las desviaciones estándar de la muestra calculada para ángulos y distancias provienen de observaciones que no son verdaderamente independientes, estos valores calculados a menudo son engañosos y suelen ser más bajos de lo que se garantiza con el instrumento y los procedimientos de campo.

Si todo esto parece abrumador, considere el hecho de que las elipses de error del 95 % determinadas para un levantamiento ALTA/ACSM deben determinarse a partir de un “ajuste por mínimos cuadrados correctamente ponderado”, y por lo tanto su comprensión es esencial si se va a realizar un levantamiento ALTA/ACSM. encuesta ACSM.

En el siguiente artículo, analizo la teoría detrás de las ecuaciones que permite estimar correctamente la desviación estándar de una observación y, por lo tanto, simplificar el proceso de ponderación correcta de un ajuste por mínimos cuadrados. Reconozca que, si el ajuste se pondera correctamente, los errores en los datos volverán a las observaciones que crearon estos errores en primer lugar. El resultado son mejores coordenadas y observaciones ajustadas de su levantamiento.

Problemas derivados del uso de desviaciones estándar calculadas.

De acuerdo con los requisitos mínimos estándar detallados de 2011 para levantamientos de títulos de propiedad de tierras de ALTA/ACSM, “Precisión posicional relativa’ significa la longitud del semieje mayor, expresada en pies o metros, de la elipse de error que representa la incertidumbre debida a errores aleatorios en mediciones en la ubicación del monumento, o testigo, marcando cualquier esquina de la propiedad topográfica en relación con el monumento, o testigo, marcando cualquier otra esquina de la propiedad topográfica al nivel de confianza del 95 por ciento (dos desviaciones estándar). La precisión posicional relativa se estima mediante los resultados de un ajuste de mínimos cuadrados correctamente ponderado de la encuesta”. (ALTA/ACSM, 2011)

En futuros artículos describo las elipses de error y su significado como indicador de calidad de las observaciones topográficas. En este artículo me enfoco en la declaración, “ajuste de la encuesta por mínimos cuadrados correctamente ponderados”. [En el artículo anterior](#) (noviembre de 2015), discuto el uso de la distribución χ^2 para determinar si el ajuste está ponderado correctamente o contiene un error garrafal.

El problema real al que se enfrenta cualquier topógrafo es decidir cómo asignar errores estándar de σ a sus observaciones de modo que los pesos w_i de las observaciones sean apropiados para los errores presentes en las observaciones. Recuerde del artículo anterior que los pesos para las observaciones independientes se calculan como en la Ecuación (1) donde σ^2 es la varianza de la observación y σ el error estándar de la observación.

En la mayoría de las muestras de software comercial, las desviaciones estándar, S , se utilizan a menudo como sustitutos del error estándar en la Ecuación (1) porque son estimaciones del error estándar. Pero las desviaciones estándar se determinan a partir de una muestra de datos y no de la población. Como se mostró en un artículo anterior (noviembre de 2015), las desviaciones estándar de la muestra o sus varianzas pueden variar significativamente del error estándar y las varianzas de la población. Este artículo demuestra el problema que puede ocurrir al usar desviaciones estándar calculadas.

Equation 1

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Equation 2

$$\frac{vS^2}{\chi_{a/2,v}^2} < \sigma^2 < \frac{vS^2}{\chi_{1-a/2,v}^2}$$

Equation 3

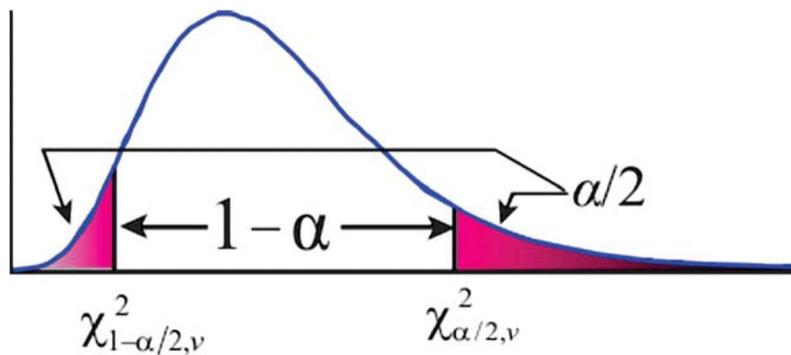
$$\frac{3(7.3)}{5.191} = 4.2$$

Equation 4

$$\frac{3(7.3)}{0.833} = 26.3$$

¿Problema?

Muchos topógrafos repetirán las observaciones en el campo y su software utilizará las desviaciones estándar determinadas a partir de las observaciones para calcular los pesos utilizando la Ecuación (1). Sin embargo, los topógrafos rara vez toman más de cuatro observaciones repetidas con un ángulo y, a menudo, incluso menos al observar una distancia. Debido a que estos son valores calculados a partir de muestras, es posible que no proporcionen estimaciones confiables de los valores de su población.



La distribución χ^2 .

Afortunadamente, la distribución de χ^2 nos permite calcular el rango en el que residirá la varianza de la población en un nivel de confianza seleccionado y brindar una idea de la confiabilidad de las desviaciones estándar de la muestra (Figura 1).

Por ejemplo, suponga que un ángulo observado tiene una varianza de muestra de 7,3 ($\pm 2,7''^2$), que se calcula a partir de cuatro observaciones de ángulo repetidas. El rango en el que se puede determinar la varianza de la población usando valores críticos de la distribución χ^2 está en la Ecuación (2) donde v es el número de observaciones redundantes (que es tres en este ejemplo), S^2 es la varianza de la muestra (que es 7.3 en este ejemplo), y $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ son los valores críticos determinados a partir de la distribución de χ^2 .

Como podemos ver en la Figura 1, la distribución χ^2 no es simétrica como las distribuciones normal y t . Por lo tanto, necesitamos determinar los valores críticos para ambas colas de la distribución para obtener un rango para la varianza de la población con una probabilidad particular ($1 - \alpha$).

Podemos obtener los valores críticos de la distribución de χ^2 usando tablas estadísticas o usando las funciones `chisq.inv()` o `chiinv()` en hojas de cálculo. Por ejemplo, si quisiéramos el intervalo de confianza de $(1 - \alpha)\%$, podríamos usar `chisq.inv($\alpha/2, v$)` para el valor crítico del lado izquierdo y `chisq.inv.rt($\alpha/2, v$)` para el valor crítico del lado derecho en Excel.

En este ejemplo, al 68,3 % o una desviación estándar, $\alpha/2$ es aproximadamente 0,158, $\chi^2_{0,158,3}$ determinado usando `chisq.inv(0,158,3)` es 0,833 y $\chi^2_{0,158,3}$ determinado usando `chisq.inv.rt(0,158,3)` es 5.191. Por lo tanto, el rango de la varianza de la población, σ^2 con un intervalo de confianza del 68,3 % está entre 4,2 (consulte la Ecuación 3) y 26,3 (consulte la Ecuación 4). Esto significa que el peso adecuado para la observación está entre 0,0014 y 0,56 si se utilizan unidades de segundos o entre 61 486 928 y 2 390 368 806 si se utilizan unidades de radianes.

Debo señalar aquí que normalmente, en un ajuste de mínimos cuadrados de un levantamiento horizontal o tridimensional, las unidades de radianes se utilizan para todos los valores angulares para evitar la inconsistencia de unidades con las observaciones de distancia que están en inglés observaciones de distancia que están en unidades inglesas o SI de medida

No solo es un amplio rango para la varianza de la población y, por lo tanto, el peso que posiblemente podría usarse en el ajuste, sino que la varianza de la muestra no proviene de un conjunto de observaciones verdaderamente independiente. Para obtener este valor, el topógrafo necesitaría restablecer el instrumento y los objetivos entre cada observación de ángulo o puntería.

Dicho de otra manera: lo que falta en la varianza de la muestra es el error de centrado del instrumento, el error de centrado del objetivo y el error de nivelación del instrumento. Si bien el error de nivelación generalmente solo es significativo en los casos en que la línea de visión es pronunciada, los errores de centrado del instrumento y del objetivo tienden a ser los que más contribuyen a la incertidumbre angular con los instrumentos actuales.

Por ejemplo, cuando estaba enseñando, hice que los estudiantes de segundo año realizaran ocho repeticiones de cada ángulo en un cuadrilátero reforzado. A veces, los estudiantes no podían completar todo el conjunto de ángulos en una estación específica en un solo período de clase. Por lo tanto, regresarían la próxima semana y restablecerían el instrumento y los objetivos sobre las estaciones y completarían su conjunto de

observaciones para los ángulos. Esto significaba que tenían que restablecer sus objetivos e instrumentos sobre las estaciones. Luego calcularían las medias angulares y las desviaciones estándar para cada conjunto de observaciones. Cuando tuvieron que romper su conjunto de observaciones entre períodos de clase, encontraron que estas desviaciones estándar eran mucho peores que las calculadas a partir de una sola configuración. A menudo les preocupaba esta falta de precisión y creían que habían hecho algo mal.

Sin embargo, quisiera señalar que este valor más alto para la desviación estándar se debió a que tenían errores de configuración incluidos en sus valores y que estos valores eran más representativos de las incertidumbres reales en sus observaciones. Los topógrafos de límites a menudo ven estos mismos errores en la nueva medición de una propiedad cuando comparan sus valores de observación con los valores registrados.

Como se indicó anteriormente, todavía es común hoy en día utilizar las desviaciones estándar de la muestra como estimaciones de los errores estándar de la población cuando se ponderan las observaciones en un ajuste. De hecho, la mayoría de los paquetes de software brindan a los usuarios una entrada de valor predeterminado para cubrir la posibilidad de que la desviación estándar sea cero. Esto sucede cuando todas las observaciones repetidas son iguales y da como resultado un cálculo no válido cuando se ingresa en la Ecuación (1).

Por lo tanto, es posible que se esté preguntando: ¿Cómo se obtienen valores razonables para los errores estándar a fin de "ponderar correctamente" el ajuste? Bueno, la respuesta está en estimar los errores de configuración y de nivelación e incluirlos en la determinación de los errores estándar de las observaciones. Comienzo este análisis en el siguiente artículo de esta serie. Hasta entonces feliz _ agrimensura _

Estimación de incertidumbres

En el artículo anterior (enero de 2016), señalé la falta de confiabilidad de las desviaciones estándar de la muestra como estimaciones de los errores estándar de la población cuando el número de observaciones repetidas es muy pequeño, que suele ser el problema en las encuestas.

En este artículo, analizo cómo podemos estimar los errores estándar para las observaciones en función de las estimaciones de errores de configuración, errores de nivelación y precisiones específicas del instrumento utilizando principios de propagación de errores. Tenga en cuenta que este método de estimación de incertidumbres en las observaciones no es nuevo, ya que R. Ben Buckner, Edward Mikhail y Gordon Gracie publicaron estos conceptos a principios de la década de 1980.

Estimación de errores de centrado

Cuando se realiza un levantamiento, el topógrafo intenta matemáticamente determinar las coordenadas de un punto matemático. En la vida real, este punto puede definir el centro de un muro de piedra o una marca de punzón en una barra de refuerzo.

Suponga que se coloca una tachuela en un centro para representar físicamente el punto en el suelo. Nuestra habilidad para centrarnos sobre la tachuela varía según nuestras habilidades individuales, el cuidado que se tenga en el proceso de configuración del instrumento, el ajuste de una plomada óptica y una burbuja circular, y el ancho de la depresión en la tachuela. Por ejemplo, una depresión en una tachuela tiene aproximadamente 0,01 pies de diámetro, mientras que un orificio perforado de un dieciseisavo de pulgada en una barra de refuerzo tiene aproximadamente 0,005 pies de diámetro. Con una plomada óptica que está en ajuste, podemos observar lo que parece ser el centro de un monumento físico.

Sin embargo, nuestra capacidad para centrarnos con precisión en el punto se ve limitada por el tamaño del punto y nuestras propias limitaciones físicas. Por ejemplo, nuestros errores de centrado serán mayores en un tubo de hierro de 1 pulgada que en una depresión en un monumento o en un clavo de concreto. Por supuesto, también estamos limitados por el estado de calibración de los niveles, las plomadas ópticas y las burbujas circulares de los

instrumentos, así como por nuestra paciencia para lograr realmente lo que parece estar centrado.

punto bien definido, deberíamos poder lograr un error de centrado de $\pm 0,005$ pies en una tachuela o $\pm 0,003$ pies en el orificio pequeño.

Ahora suponga que la varilla está sostenida por un miembro de la tripulación que tiene frío o está distraído, dejando la burbuja circular 5 minutos fuera de nivel en una altura de mira de 6 pies. Esto produciría un objetivo que está a 0,009 pies adicional del centro del punto.

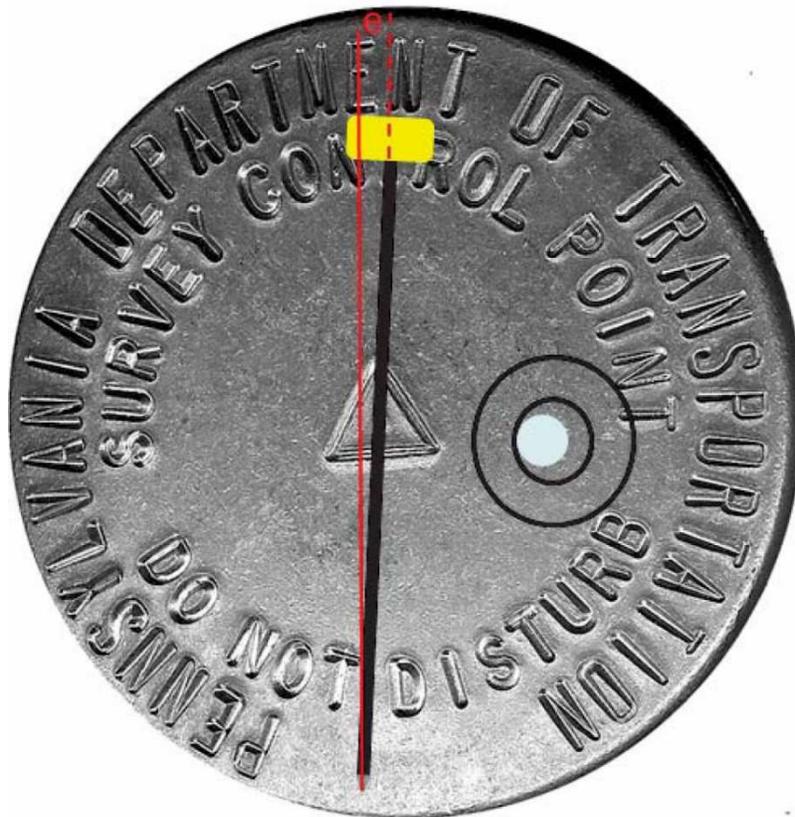


Figura 1: Fuentes de errores de centrado con un punto bien definido.

Hay dos fuentes principales de errores cuando se establece en un punto bien definido, que se muestra en la Figura 1. La primera es la ubicación de la plomada óptica, el punto de la plomada o el punto de la varilla con respecto al centro de la depresión en el Monumento. Dado que un punto bien definido tiene una depresión que normalmente tiene un ancho de 2 mm, podemos suponer que una varilla colocada en esta depresión estará dentro de la mitad de su ancho o dentro de ± 1 mm o $\pm 0,003$ pies.

Sin embargo, si se utiliza una plomada óptica, la capacidad del usuario para centrar un instrumento sobre la depresión del monumento depende de sus propias limitaciones físicas y del estado de calibración de la plomada óptica. Estos errores pueden ser, por lo tanto, mucho mayores que los obtenidos para una barra colocada en la depresión. Por ahora asumiremos que son iguales, pero esto habla de la necesidad de revisar las plomadas ópticas de sus instrumentos con frecuencia y calibrarlos cuando estén desajustados.

La otra gran fuente de error es la altura del instrumento o reflector sobre el monumento. Por ejemplo, una varilla reflectora tiene una burbuja circular de 40', mientras que los viales de nivel de los instrumentos están típicamente en el rango de 20" a 30". Suponga que la burbuja está desfasada en 0,2 divisiones u 8' para la varilla y 6" para el instrumento.

El error de centrado del instrumento se determina utilizando la conocida fórmula que se muestra en la Ecuación (1), donde S es el error de centrado del reflector/instrumento sobre el punto, R es la altura del reflector/instrumento sobre el punto, el punto, y θ es la cantidad de error de nivelación en radianes. Suponiendo una altura de 5,6 pies del objetivo y el instrumento sobre el punto, podemos calcular el error de centrado en el objetivo en aproximadamente $\pm 0,013$ pies para el reflector y 0,0016 pies para el instrumento.

Para determinar el error de centrado general en el instrumento o el objetivo sobre el punto, necesitamos aplicar una propagación de error simple donde el error general es la raíz cuadrada de la suma de los errores individuales al cuadrado, o como se ve en la Ecuación (2).

Por lo tanto, utilizando los números anteriores, vemos que el error de centrado del instrumento es de aproximadamente $\pm 0,003$ pies para el instrumento y $\pm 0,013$ pies para el objetivo, suponiendo que tenemos un punto bien definido y que los niveles, ya sean reales o electrónicos, —están en calibración. Nuevamente, esto habla de la importancia de mantener sus instrumentos calibrados.

Análisis de errores en observaciones de distancia

No todas las observaciones de distancia tienen la misma incertidumbre. Por ejemplo, los fabricantes de EDM nos dicen que la precisión de las observaciones repetidas de sus instrumentos es un error constante a (por ejemplo, 3 mm) y un error escalar b (por ejemplo, 3 ppm). La porción escalar de la precisión nos dice que la incertidumbre de una distancia observada depende de su longitud. La porción constante del error nos dice que el error es

más significativo para distancias cortas, lo que resulta en precisiones de distancia más bajas para estas observaciones.

$$\text{Equation 1} \quad S = R\theta$$

$$\text{Equation 2} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots}$$

$$\text{Equation 3} \quad \sigma_{AB} = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_r^2 + a^2 + \left(\frac{b}{10^6} AB\right)^2}$$

$$\text{Equation 4} \quad \sigma_{AB} = \sqrt{0.003^2 + 0.013^2 + 0.01^2 + \left(\frac{3}{10^6} 232.45\right)^2} = \pm 0.017 \text{ ft}$$

Sin embargo, como se indicó anteriormente, los errores de centrado también contribuyen a la incertidumbre general de una observación. Independientemente del tamaño del error que estime, estos errores contribuyen al error general en la distancia usando la Ecuación (2) o como se muestra en la Ecuación (3) donde σ_{AB} es el error estándar estimado en la longitud observada entre A y B; σ_i y σ_r son las incertidumbres estimadas en la configuración del instrumento y el reflector, respectivamente; y b es el error escalar en partes por millón; por ejemplo, b es el 3 en 3 ppm.

Por lo tanto, si practicamos la diligencia debida al instalar la estación total y el reflector sobre un punto bien definido para una distancia de 232,45 pies de largo con un EDM que tenga las especificaciones del fabricante de 3 mm (0,01 pies) + 3 ppm, el error estimado en el la distancia observada es como en la Ecuación (4).

Tenga en cuenta que el error en cada distancia será diferente y depende de la longitud de la distancia y el estado de calibración y el cuidado en el uso del equipo. Si no se tuvo cuidado al sostener el reflector sobre el punto y estimamos que el error de centrado es de $\pm 0,01$ pies tanto para el instrumento como para el reflector, entonces el error en la distancia sería de $\pm 0,019$ pies. Tenga en cuenta también que si la plomada óptica de el instrumento está apagado por 5 minutos en una configuración de 5,6 pies, entonces el error de configuración sobre un punto bien definido será de $\pm 0,008$ pies.

Estas diferencias son pequeñas para cada escenario, pero recuerde que el objetivo es estimar correctamente el error estándar de la observación para que su error de observación se devuelva durante el ajuste y no se extienda a otras observaciones. Por lo tanto, el peso de la distancia con un error estándar estimado de ± 0.013 es aproximadamente 3500, mientras que el peso de la distancia con un error estándar estimado de ± 0.019 sería

aproximadamente 2700. Ahora imagine o calcule la cantidad de error en una distancia cuando sobre un tubo de hierro de 1 pulgada o el centro de un muro de piedra de 6 pies de ancho.

Estimación de errores estándar en observaciones angulares

En los artículos anteriores ([enero](#) y [febrero](#) de 2016) discuto la falta de confiabilidad de las desviaciones estándar cuando se calculan a partir de una pequeña muestra de observaciones, así como también cómo estimar los errores al centrar un instrumento sobre un punto bien definido y cómo estimar la error estándar para distancias medidas electrónicamente.

Aquí miro el problema más complicado de estimar errores estándar en observaciones angulares.

La incertidumbre en un ángulo observado es una función de varios errores menores, pero primero debemos comprender el método que utilizan los fabricantes para clasificar sus teodolitos digitales y estaciones totales.

Cuando se crearon los primeros teodolitos digitales, se dieron cuenta de que el usuario ya no podía distinguir entre las cualidades de los instrumentos mirando los círculos a través de sus visores de lectura. (Lo siento, jóvenes, esto es mucho antes de su tiempo). Por lo tanto, los fabricantes alemanes crearon el estándar DIN18723 para teodolitos digitales.

Luego, todos los fabricantes comenzaron a proporcionar un estándar DIN18723 para cada instrumento que vendían, lo que indicaba la capacidad del instrumento para apuntar y leer en una sola dirección. Desde entonces, la Organización Internacional de Normalización ha publicado la norma ISO 17123-3, que cumple esta misma función.

Es importante comprender que estos estándares se crearon para proporcionar un medio de diferenciar entre las cualidades de los instrumentos y no son una medida real de la capacidad de una persona para girar un ángulo con el instrumento. Sin embargo, muestra que diferentes instrumentos proporcionarán ángulos de diferentes precisiones.

Además de esto, los topógrafos experimentados se dan cuenta de que las distancias de visión más largas dan como resultado mejores observaciones de ángulo. Además, la topografía en propiedades donde hay grandes ángulos de altitud da como resultado errores de cierre

angular más grandes, por lo general. Por lo tanto, no todos los ángulos observados tienen la misma precisión. Así que echemos un vistazo a cada error individualmente.

Primeros ángulos

Estos consisten en observaciones bidireccionales de los círculos horizontales. Además, diferentes empresas topográficas observan ángulos utilizando un número diferente de conjuntos. Los más comunes entre estos son uno (1DR) y dos (2DR) conjuntos de ángulos, que dan como resultado un promedio para la observación del ángulo.

Tenga en cuenta que si está girando un ángulo solo 1D, entonces no está compensando los errores sistemáticos presentes en su instrumento. Esto puede ser aceptable en levantamientos cartográficos y de construcción, pero no es una práctica aceptable en levantamientos de límites o en muchos otros tipos de levantamientos.

Ángulos horizontales

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{a_{pr}}^2 + \sigma_{a_i}^2 + \sigma_{a_t}^2 + \sigma_{a_l}^2}$$

Ecuación 1

Las principales fuentes de errores en un ángulo horizontal consisten en la calidad del instrumento, que es:

- los errores de puntería y lectura , $\sigma_{a_{pr}}$,
- número de veces que se observa el ángulo, n ,
- el error de centrado del instrumento y el objetivo sobre sus estaciones, σ_{a_1} , σ_{a_t} ,
- y el error de nivelación del instrumento, σ_{a_l} .

Cada una de estas fuentes de error contribuye al error general en un ángulo observado. Debido a que estas fuentes de error son independientes entre sí, la Ecuación 1 muestra el error general en una observación de ángulo utilizando la propagación del error .

$$\sigma_{a_{pr}} = \frac{2 \cdot ISO}{\sqrt{n}}$$

ecuación 2

Como se dijo anteriormente, los estándares se basan en la observación de una sola dirección en ambas caras. A medida que repetimos nuestras medidas, este error de compensación también se repite para cada punto. La contribución de este error a la incertidumbre general en el ángulo se muestra en **la Ecuación 2** , donde n es el número de veces que se repite un ángulo e ISO el estándar ISO para el instrumento.

Ahora, si algunos de ustedes están diciendo: "Espera, ¿no acabas de decir que el estándar ISO no era una medida real de la capacidad de un individuo para girar y orientarse con el instrumento?" la respuesta sería sí, pero además de determinar el estándar ISO personal de cada individuo con un instrumento en particular, esta es la mejor estimación que tenemos para el instrumento.

Cabe señalar que hice que nuestros estudiantes de segundo año determinaran su ISO personal y noté con el tiempo que algunos serán ligeramente mejores que el estándar del instrumento, algunos coincidirán con el estándar y otros serán ligeramente peores que el estándar. publicado para su instrumento. De hecho, el estándar ISO coincide con sus habilidades de observación y, por lo tanto, es un valor válido para sus habilidades personales, estadísticamente hablando. Por lo tanto, las normas DIN o ISO son una buena estimación de esta contribución al error.

$$\sigma_{a_{pr}} = \frac{2(3)}{\sqrt{2}} = \pm 4.2''$$

Ecuación 3

Entonces, si un ángulo se mide 1DR (n = 2) con una estación total de 3", la contribución resultante al error angular general es como se muestra en la **Ecuación 3**.

Este mismo ángulo observado 2DR (n = 4) tiene un error por puntería y lectura de ±3", observado 3DR (n=6) tiene un error de ±2.4", y observado 4DR (n=8) tiene un error de ±2.1". Es interesante notar que el aumento en la precisión angular comienza a estabilizarse después de ocho repeticiones o 4DR.

El error de descentrado del objetivo es una función de la longitud de las miras. Él es calculado como en la **Ecuación 4** donde :

- DBS es la longitud de la referencia,
- DFS la longitud de la previsión,
- σ_t el error estimado en el centrado de los objetivos, y
- ρ la conversión de radianes a segundos, que es 206264.8".

$$\sigma_{a_t} = \frac{\sqrt{D_{BS}^2 + D_{FS}^2}}{D_{BS}D_{FS}} \sigma_t \rho$$

ecuación 4

Para un ángulo con ambas distancias de visibilidad de 100 pies, la cantidad de error que contribuye al ángulo con un objetivo descentrado de solo ±0,005 pies es ±14,6". Si ambas

distancias de visibilidad son de 200 pies, es de $\pm 7,3''$; para distancias de visibilidad de 400 pies es de $\pm 3,6''$.

A partir de esto, podemos ver que las distancias de visión cortas dan como resultado errores generales más grandes en los ángulos, aunque el error de descentrado sea el mismo. Es decir: en términos de las coordenadas del punto, las distancias de visión más cortas tienen poco efecto sobre las coordenadas de las estaciones pero efectos más grandes sobre los errores estándar de los ángulos, lo que significa que los ángulos observados con distancias de visión cortas están sujetos a más errores y deben ser ponderado como tal.

De manera similar, el error de descentrado del instrumento puede ser significativo cuando las distancias de visibilidad son cortas. La ecuación para determinar su contribución a la incertidumbre angular general se muestra en **la Ecuación 5** , donde:

- D_3 es la longitud de la distancia que conecta las estaciones de vista trasera y delantera, que se puede calcular usando la ley de los cosenos, σ_i ,
- el error estimado en el descentrado del instrumento , y
- otros términos como se definió previamente.

$$\sigma_{a_i} = \frac{D_3}{D_{BS} D_{FS}} \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \rho$$

Ecuación 5

Este error es interesante porque también depende del tamaño del ángulo, que afecta a D_3 . De nuevo, suponiendo un error de descentrado del instrumento de $\pm 0,005$ pies con un ángulo observado de 90° , la incertidumbre en el ángulo debido al descentrado del instrumento es de $\pm 10,3''$ para una longitud de mira de 100 pies, $\pm 5,2''$ para una longitud de mira de 200 pies, y $\pm 2,6''$ para una mira de 400 pies de largo. Una vez más, las distancias de visión cortas dan como resultado mayores incertidumbres en los ángulos observados, y estos ángulos deben ponderarse en consecuencia.

Si el instrumento está ligeramente desnivelado, esto significa que no se está observando un ángulo horizontal real. La contribución de este error al error angular general depende de la cantidad de desnivelación, que es una función de la sensibilidad del vial de nivel, y la división fraccionaria en la que el instrumento está fuera de nivel. También es una función del ángulo cenital al objetivo.

El error en el ángulo debido al desnivel del instrumento se muestra en **la Ecuación 6** donde:

$$\sigma_{a_i} = \frac{f_d \mu \sqrt{(\cot z_{BS})^2 + (\cot z_{FS})^2}}{\sqrt{n}}$$

Ecuación 6

f_d es la división fraccionaria que el instrumento está fuera de nivel,

- μ la sensibilidad del nivel de ampolla/nivel electrónico,
- z_{BS} el ángulo cenital de la referencia,
- z_{FS} el ángulo cenital de la mira, y
- n el número de veces que se observa el ángulo.

Si los ángulos cenitales son de 90° , la contribución de la desnivelación al error angular es de $0''$. A medida que el ángulo cenital aumenta o disminuye, la σ_{a_i} aumenta. **La Tabla 1** muestra el error angular para ángulos cenitales que van de 90° a 45° con un instrumento que está $7,5''$ fuera de nivel ($1/4$ de una división de burbuja de $30''$) para varios números de repeticiones, n .

Como puede verse en la **Tabla 1**, la contribución de este error a los ángulos horizontales es pequeña para los ángulos cenitales dentro de los 15° de la horizontal. Sin embargo, a medida que sus líneas de visión aumentan o disminuyen en elevación, la nivelación incorrecta se vuelve más significativa y la nivelación precisa se vuelve más importante.

Table 1 Angular error for various repetitions of the angle and zenith angles with a misleveling of $\pm 7.5''$.

z	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$
90	$\pm 0.0\gg$	$\pm 0.0\gg$	$\pm 0.0\gg$	$\pm 0.0\gg$
85	$\pm 0.7\gg$	$\pm 0.5\gg$	$\pm 0.4\gg$	$\pm 0.3\gg$
80	$\pm 1.3\gg$	$\pm 0.9\gg$	$\pm 0.8\gg$	$\pm 0.7\gg$
75	$\pm 2.0\gg$	$\pm 1.4\gg$	$\pm 1.2\gg$	$\pm 1.0\gg$
70	$\pm 2.7\gg$	$\pm 1.9\gg$	$\pm 1.6\gg$	$\pm 1.4\gg$
65	$\pm 3.5\gg$	$\pm 2.5\gg$	$\pm 2.0\gg$	$\pm 1.7\gg$
60	$\pm 4.3\gg$	$\pm 3.1\gg$	$\pm 2.5\gg$	$\pm 2.2\gg$
55	$\pm 5.3\gg$	$\pm 3.7\gg$	$\pm 3.0\gg$	$\pm 2.6\gg$
50	$\pm 6.3\gg$	$\pm 4.4\gg$	$\pm 3.6\gg$	$\pm 3.1\gg$
45	$\pm 7.5\gg$	$\pm 5.3\gg$	$\pm 4.3\gg$	$\pm 3.8\gg$

tabla 1

Esto explica por qué las poligonales que suben y bajan pendientes empinadas a menudo tienen errores de cierre angulares más grandes que los que se encuentran en regiones relativamente planas. Para aquellos de ustedes que piensan: "Esperen, mi instrumento tiene compensación de doble eje", les pregunto cuándo fue la última vez que verificaron su calibración y con qué frecuencia calibran el instrumento.

Pesos correctos

En artículos anteriores ([enero](#), [febrero](#) y [abril de 2016](#)) discuto la falta de confiabilidad de las desviaciones estándar cuando se calculan a partir de una pequeña muestra de observaciones y su uso en el desarrollo del modelo estocástico (peso) para un ajuste de mínimos cuadrados. A esto le sigue cómo: (1) estimar errores al centrar un instrumento sobre un punto bien definido, (2) calcular un error estándar estimado para distancias medidas electrónicamente y (3) usar la teoría de propagación de errores para estimar errores en observaciones angulares. .

En este artículo, muestro un ejemplo de cómo determinar el error estimado general en una observación angular y analizo el uso de este error estándar estimado para aislar los errores graves en los datos.

Estimación de la incertidumbre general en un ángulo observado

Suponga que se observa un ángulo de 120° con una estación total que tiene una especificación ISO de $3''$. Se observa 1DR con una distancia de vista trasera de 150 pies y una distancia de vista delantera de 300 pies. El ángulo cenital a la vista delantera era de 93° y la vista trasera de 88° . El ángulo se observó 1DR ($n = 2$). La burbuja de nivel de $30''$ se mantuvo dentro de $\frac{1}{4}$ de una división.

¿Cuál es la incertidumbre estimada en el ángulo si se supone que los errores de configuración están dentro de ± 0.005 pies? ¿Cuál es el peso estimado de la observación? (Consulte [la Parte 3](#) de esta serie de artículos para conocer las definiciones de las variables).

$$\text{Equation 1} \quad \sigma_{a_{pr}} = \frac{2(DIN)}{\sqrt{n}} = \frac{2(3'')}{\sqrt{2}} = \pm 4.2''$$

$$\text{Equation 2} \quad \sigma_{a_i} = \frac{D_3}{D_1 D_2} \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \rho = \frac{396.86}{150(300)} \frac{0.005}{\sqrt{2}} 206264.8 = \pm 6.4''$$

$$\text{Equation 3} \quad \sigma_{a_t} = \frac{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}{D_1 D_2} \sigma_t \rho = \frac{\sqrt{150^2 + 300^2}}{150(300)} 0.005(206264.8) = \pm 7.7''$$

$$\text{Equation 4} \quad \sigma_{a_l} = \frac{f_d \mu \sqrt{(\cot z_{BS})^2 + (\cot z_{FS})^2}}{\sqrt{n}} = \frac{30''}{4} \frac{\sqrt{\cot(93)^2 + \cot(88)^2}}{\sqrt{2}} = \pm 0.3''$$

$$\text{Equation 5} \quad \sigma = \sqrt{4.2^2 + 6.4^2 + 7.7^2 + 0.3^2} = \pm 10.9''$$

$$\text{Equation 6} \quad w = \frac{1}{10.9^2} = 0.00843$$

$$\text{Equation 7} \quad w = \left(\frac{\sigma}{10.9}\right)^2 = 358,094,165$$

Solución

Error por apuntar y leer: como en la Ecuación (1).

Error debido al descentrado del instrumento : como en la Ecuación (2).

Error debido al descentramiento del blanco : como en la Ecuación (3).

Error por desnivel del instrumento : como en la Ecuación (4).

Tenga en cuenta que el error de nivelación del instrumento es insignificante para la mayoría de las encuestas y, por lo tanto, normalmente se ignora. Solo debe tenerse en cuenta cuando los ángulos verticales se vuelven grandes.

El error estándar estimado para el ángulo es: como en la Ecuación (5).

El peso de esta observación de ángulo en particular está en la Ecuación (6) en unidades de segundos o como en la Ecuación (7) en unidades de radianes.

Si desea lograr un "ajuste por mínimos cuadrados correctamente ponderado", puede ver en los artículos anteriores y anteriores que estimar un peso apropiado para sus observaciones no es una tarea fácil. ¿Es esto importante? Definitivamente, y esto va más allá de los estándares ALTA/NSPS.

Cómo llegó esto a mi atención

Empecé por este camino a principios de la década de 1980. Como estudiante de posgrado, escribí gran parte del software utilizado por otros estudiantes de posgrado en sus investigaciones. En mi software había una opción para usar la detección estadística de errores para encontrar errores en los datos (un artículo futuro).

Un amigo que era agrimensor autorizado en Wisconsin se había encontrado con un problema en su proyecto de investigación. Como era la norma en ese entonces, él me trajo este problema. ¡Se notó que el error de cierre lineal de una poligonal que delimitaba dos secciones y media de terrenos públicos era de 10 pies! El teodolito utilizado en ese momento tenía una cuenta mínima de 1 minuto, por lo que estimó que podía leer los ángulos con una precisión de 0,3 'de minuto.

Le había dado a cada ángulo, independientemente de la longitud de las líneas de visión o de su tamaño, una incertidumbre estimada de $\pm 18''$ en el software, pero la detección de errores posteriores al ajuste del software no pudo aislar la observación con el error a pesar de que tenía numerosas comprobaciones observacionales/observaciones redundantes.

En una estación en particular, había observado múltiples ángulos durante varios días diferentes en diversas combinaciones. Implementé el esquema de ponderación estimando los errores estándar para cada observación, y la detección estadística de errores identificó un ángulo en el lado opuesto del curso de cierre.

Aunque mi memoria se está alargando (¡más de 30 años!), creo que difería solo en $6''$ ($0,1''$) de los otros ángulos en esa estación que se habían observado en diversas combinaciones. Tenía distancias de visión extremadamente cortas en comparación con los otros ángulos en la poligonal. Obviamente, su error era de más de $18''$ pero eso es lo que le había dado el modelo de ponderación para una precisión.

Más importante es que muchos de los otros ángulos con largas distancias de visión también tenían un error estimado de $\pm 18''$. Yo no podía creerlo más de lo que él y usted probablemente puedan creer, pero ese ángulo, que tenía un error menor que la cuenta mínima del instrumento, había abierto la poligonal 10 pies en su punto de cierre. La prueba fue que cuando se eliminó el ángulo, la poligonal se cerró extremadamente bien, lo que es un testimonio de sus habilidades de medición.

Unos años más tarde, esto sucedió por segunda vez en una red que cubría una parcela de terreno de 50 ac donde el error angular fue causado por los estudiantes cuando el objetivo ocupaba un punto diferente en el monumento de la esquina de la sección que el ocupado por el instrumento. Las distancias de visión en estos ángulos eran solo de unos 100 pies de largo. Una vez más, el error angular estuvo muy por debajo de las capacidades de lectura del instrumento.

El software identificó la observación, pero cuando los estudiantes repitieron las observaciones, repitieron los mismos trabajos y, por lo tanto, ocurrió el mismo problema. No fue hasta que discutieron sus procedimientos de campo que se dieron cuenta de que habían ocupado dos puntos diferentes en la tapa. Ahora, ¡por qué tenía dos puntos lo dejo para que lo explique el agrimensor que fijó el monumento de la esquina de la sección!

Estos incidentes me demostraron la necesidad de obtener los pesos correctos de las observaciones y el poder de la detección estadística de errores garrafales.

Desde entonces, he usado repetidamente esta técnica en todos mis ajustes, lo cual fue bastante fácil desde que implementé este puñado de ecuaciones de los artículos anteriores de esta serie en mi software. A menos que haya un error en los datos, nunca dejo de pasar la "prueba de bondad de ajuste/ x^2 ". Tampoco uso nunca las desviaciones estándar de la muestra para determinar los pesos.

Además, dado que he estimado los errores estándar para cada observación, a menudo uso el valor crítico de la distribución t y el error estándar estimado para la observación para aislar los errores graves en los datos. Hablo de esta técnica en un artículo anterior, pero la repetiré aquí.

Inténtalo tú mismo

Para ver cómo se hace esto, suponga que el error estándar estimado en un ángulo utilizando las ecuaciones descritas anteriormente es de $\pm 2,7''$. Además, suponga que, después del ajuste por mínimos cuadrados con 15 grados de libertad (observaciones redundantes), tengo un residuo para este ángulo de $-10,8''$. El valor t crítico para este ajuste a un nivel de significancia de 0,003 es $t_{0,0015,15} = 3,54$. Multiplicando $3,54$ y $2,7''$, encuentro que un rango aceptable para el residual de esta observación es $\pm 9,6''$. Dado que el residuo de $-10,8''$ está fuera de este rango, tengo un 99,7 % de probabilidad de que esta observación sea un error garrafal.

Cuando estoy trabajando en problemas de ejemplo para mi libro sobre cálculos de ajuste, a menudo inserto errores intencionados en los datos. La razón por la que hago esto es para permitir que los instructores enseñen no solo las matemáticas de los mínimos cuadrados sino, lo que es más importante, las técnicas adecuadas que se utilizan para construir un modelo estocástico (peso) válido y analizar los datos después de realizar el ajuste.

Por cierto, el manual del instructor que acompaña al libro informa al instructor de la magnitud del error garrafal y de la observación. Tenga en cuenta que este manual solo está disponible para los instructores. Al hacer esto, no puedo recordar un solo caso en el que el valor crítico de la distribución t multiplicado por el error estándar estimado de la observación no identificara el error garrafal que se insertó. Esto es cierto incluso en algunos casos en los que fallaron las técnicas de errores estadísticos posteriores al ajuste.

Pero, aquí está la parte desafortunada. Aunque estas técnicas han sido escritas por R. Ben Buckner, Ed Mikhail, Gordon Gracie y yo mismo, no conozco ningún paquete de software comercial que implemente este método de estimación de errores estándar antes de un ajuste por mínimos cuadrados. La mayoría del software le permite introducir errores de configuración, pero luego muestran de forma predeterminada las desviaciones estándar con valores predeterminados para manejar la situación cuando la desviación estándar de una observación es cero.

Cómo implementar este método

Solo hay dos opciones si desea implementar este método de estimación de errores estándar para sus observaciones. Una es escribir su propio software. Hice que mis alumnos hicieran esto creando una hoja de cálculo de Excel en su tercer semestre. Para aquellos que deseen

hacer esto, mi libro titulado Cálculos de ajuste proporciona el desarrollo de las ecuaciones en el Capítulo 7.

El otro enfoque es comenzar a solicitar que los fabricantes produzcan un software que implemente este método para estimar los errores estándar de sus observaciones.

¿No crees que esto sucederá alguna vez? Estaba dando un taller de mínimos cuadrados en Corvallis, Oregón, hace varios años, y varios de los programadores de TDS estaban en mi clase. En un momento les pregunté a los programadores por qué su software contenía una opción que no tenía antecedentes teóricos. La respuesta fue porque los agrimensores lo habían pedido.

Entonces, no tengas miedo de preguntar. Una solicitud puede caer en oídos sordos, pero cientos de solicitudes no lo harán. Después de todo, ellos están en el negocio para venderle, y usted necesita crear un "ajuste de mínimos cuadrados correctamente ponderado" para satisfacer las encuestas de títulos de propiedad de ALTA/NSPS, así como también para identificar errores garrafales en sus datos.

Usted tiene la necesidad y ellos pueden implementar fácilmente estas ecuaciones en su software donde todo lo que necesita proporcionar es la cantidad de veces que giró el ángulo, estimar los errores de configuración e ingresar las especificaciones del fabricante para los instrumentos utilizados en la encuesta.

Con suerte, ahora se da cuenta de que la desviación estándar de la muestra calculada a partir de dos repeticiones de un ángulo no es estadísticamente lo suficientemente confiable para ponderar su ajuste. El único método para obtener un "ajuste por mínimos cuadrados correctamente ponderado" es calcularlo con base en la teoría de la propagación del error en las mediciones.

La distribución F

Tenga en cuenta que el lenguaje matemático utilizado en esta versión del artículo puede tener un formato incorrecto, por causas ajenas al autor. Consulte los detalles de las Ecuaciones (1) y (2), y verifique con nuestra edición impresa o digital completa si no está seguro.

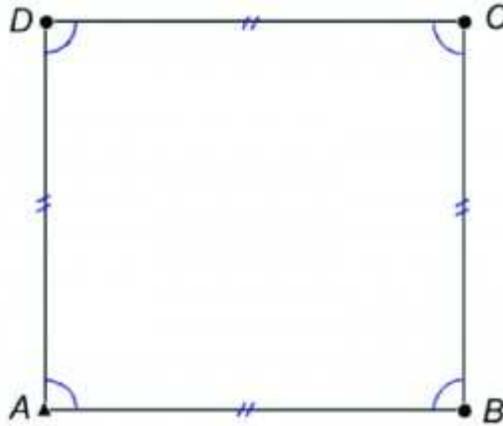
En artículos anteriores sobre estadísticas de muestreo, cubrí la t y *Distribuciones de χ^2* y sus usos en topografía. La última estadística de muestreo que discuto es la distribución F , desarrollada por RA Fisher y GW Snedecor. La distribución F se utiliza para comparar dos varianzas de muestra, que normalmente se presentan como su relación.

En encuestas, usamos esta distribución para comparar la varianza de referencia de un ajuste de mínimos cuadrados con restricciones mínimas con las mismas estadísticas de un ajuste de mínimos cuadrados con restricciones. También utilizamos esta estadística para calcular las elipses de error con un nivel de confianza del 95 %, como se especifica en los requisitos mínimos de detalle estándar para los estándares de estudio de títulos de propiedad de ALTA/NSPS de 2016 (ALTA/NSPS, 2016).

Ajustes restringidos

Es bien sabido en topografía que para comprobar los cierres geométricos de una encuesta, algunas observaciones deben mantenerse fijas. Por ejemplo, en un levantamiento de nivelación diferencial, al menos una estación debe tener un "conocido", que llamamos punto de referencia de control. En los cálculos de la poligonal necesitamos "conocer" las coordenadas de una estación para fijar la poligonal posicionalmente en el espacio y la dirección de un curso para fijar la poligonal rotacionalmente en el espacio. El motivo de las comillas en las dos oraciones anteriores es que también podemos asumir estos valores para que no tengan que conocerse en ningún sistema de coordenadas reconocido.

Sin embargo, sin estas observaciones fijas, cualquier ajuste es imposible. Cuando fijamos el número mínimo de observaciones para verificar los cierres geométricos, esto se conoce como un ajuste con restricciones mínimas. En este ajuste, las observaciones deben coincidir solo entre sí para satisfacer los cierres geométricos.



Una poligonal simple de cuatro lados

Ejemplo: Supongamos que tenemos una poligonal simple de cuatro lados como se muestra en **la Figura 1**. Si asignamos coordenadas (5000, 5000) a la estación A y fijamos el acimut del rumbo AB a 90° , las coordenadas de las estaciones B , C y D se pueden calcular sin requerir los ángulos en A y D o la longitud del rumbo DA . _ Estas tres medidas adicionales, que se denominan observaciones redundantes o grados de libertad, se utilizan para determinar el cierre erróneo de la poligonal.

Por ejemplo, el ángulo en A se usa para calcular el error de cierre angular de la poligonal, mientras que el ángulo en la estación D y la longitud de DA se usan para determinar el error de cierre lineal de la poligonal. Por lo tanto, estos tres cierres erróneos desconocidos se determinan con las tres observaciones adicionales. Con estas observaciones adicionales, podemos ajustar la poligonal por cualquier medio adecuado.

Sin embargo, si se realiza un ajuste por mínimos cuadrados, se determina una varianza de referencia para el ajuste (como se discutió en un artículo anterior). Dado que este ajuste tiene solo un número mínimo de observaciones redundantes, que son necesarias para calcular el cierre erróneo de la poligonal, se dice que está mínimamente restringido. Algunos académicos se refieren a esto como un ajuste gratuito.

Ahora suponga que también conocemos las coordenadas de la estación C en el levantamiento. Esto introduce más control en la forma de un segundo conjunto de coordenadas para la estación C . Este es un ajuste sobre-restringido, que aquí puede llamarse simplemente un ajuste restringido. Se llama así porque la adición de coordenadas para la estación C proporciona más observaciones redundantes que las requeridas para calcular las coordenadas de la poligonal.

Si se realiza un ajuste de mínimos cuadrados con las estaciones A y C fijas en la posición y el rumbo AB fijo en la dirección, nuestras observaciones ahora tienen que ajustarse geoméricamente y coincidir con las coordenadas de las dos estaciones. Esto agrega dos restricciones adicionales a los cálculos, que son las coordenadas de la estación C .

Bien, este es un ejemplo simplista. Pero, ¿cuántas veces se le ha pedido que ajuste su encuesta al control creado por otra encuesta? ¿Cuántas veces te has encontrado con problemas cuando esto ocurre? Experimenta estos problemas porque su encuesta ahora está demasiado restringida, lo cual no es malo. Simplemente significa que tiene más controles en los datos de su encuesta.

Ejemplo con errores . Suponga que está realizando el levantamiento utilizando coordenadas del plano estatal, que comienza en una estación de control con un acimut, pasa por otra estación con coordenadas del plano estatal como en la Figura 1 y finaliza en la primera estación. Si solo se utiliza una estación de control y un azimut, la poligonal se cerrará de acuerdo con la precisión de las observaciones.

Salvo errores en los datos y un modelo de ponderación apropiado para la calidad de las observaciones, un ajuste de mínimos cuadrados de esta encuesta con restricciones mínimas dará como resultado una varianza de referencia que debería pasar la prueba de bondad de ajuste.

Sin embargo, si las distancias no se reducen adecuadamente a la superficie cartográfica, sus observaciones no coincidirán con las coordenadas de las estaciones de control. Por lo tanto, las coordenadas y las observaciones ajustadas para todas las demás estaciones serán incorrectas.

Sin embargo, si ambas coordenadas de la estación de control se incluyen en el ajuste, la varianza de referencia será considerablemente mayor que el ajuste con restricciones mínimas porque las distancias no se reducen a la superficie de mapeo y, por lo tanto, sus residuos correspondientes serán mayores ya que contienen la diferencia entre la distancia horizontal observada y su distancia de cuadrícula equivalente. Es probable que la varianza de referencia en este ajuste no pase la prueba de bondad de ajuste .

Se puede hacer una comparación de los dos ajustes con la distribución F , que verifica si la relación de las dos varianzas de referencia es estadísticamente igual a uno, es decir, si las dos varianzas de referencia son iguales entre sí en un sentido estadístico.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2}$$

$$c = \sqrt{2F_{0.05, 2, v}}$$

Ecuación 1, Ecuación 2

La prueba F es como en la Ecuación (1) donde:

- S_{21} es la mayor de las dos variaciones de referencia de los ajustes
- S_{22} es el más pequeño ,
- $[\alpha]$ es $1 - P$ donde P es la probabilidad de punto porcentual de la prueba, que suele ser 0,95 en encuestas,
- v_1 es el número de observaciones redundantes en el ajuste con S_{21} para su varianza de referencia, y
- v_2 es el número de observaciones redundantes en el ajuste con S_{22} por su varianza de referencia.

Cuando la ecuación (1) es verdadera, se dice que el ajuste no pasa la prueba y, por lo tanto, la relación de las dos varianzas de referencia no es igual a 1; es decir, $S_{21} \neq S_{22}$. Cabe señalar aquí que S_1 en la Ecuación (1) siempre debe ser la mayor de las dos varianzas de referencia.

¿Por qué no son iguales? Por lo general, esto se debe a que el ajuste restringido (es decir, el ajuste con ambas coordenadas de la estación de control mantenidas fijas) tiene residuos que son muy diferentes del ajuste mínimamente restringido. La razón es que las distancias nunca se redujeron a la superficie cartográfica y, por lo tanto, son más largas o más cortas de lo que deberían ser. Así, la prueba F es un indicador de la presencia de un error sistemático en las observaciones.

También es posible que no pase si la constante EDM/reflector se ingresó incorrectamente en una estación total. Por ejemplo, nuestros estudiantes de segundo año verifican esta constante cada otoño con su equipo asignado. Un año, los estudiantes notaron una

desviación de 30 mm y procedieron a ingresarla en la estación total como 30. Sin embargo, una revisión del manual del instrumento indicó que el fabricante asumió que la desviación siempre es negativa y tenía instrucciones para ingresarla como 30. .

El resultado fue un instrumento con un error de 60 mm, que otros estudiantes usaron durante todo el año escolar. Este error no se descubrió hasta que se calibraron los instrumentos al año siguiente. Si este instrumento hubiera estado involucrado en el estudio, la prueba F podría haber descubierto la presencia de este error sistemático también porque los residuos en el ajuste restringido habrían sido alrededor de 0,2 pies más grandes que el ajuste mínimamente restringido.

Table 1: F Distribution Critical Values and Error Ellipse c Multipliers

v	F	c	v	F	c
1	199.5	20.0	12	3.9	2.8
2	19.0	6.2	14	3.7	2.7
3	9.6	4.4	16	3.6	2.7
4	6.9	3.7	18	3.6	2.7
5	5.8	3.4	20	3.5	2.6
6	5.1	3.2	22	3.4	2.6
7	4.7	3.1	24	3.4	2.6
8	4.5	3.0	26	3.4	2.6
9	4.3	2.9	28	3.3	2.6
10	4.1	2.9	30	3.3	2.6

Puntos suspensivos de error

Otro uso de los valores críticos de la distribución F es crear elipses de error del 95%. La elipse de error estándar de un ajuste de mínimos cuadrados tiene una probabilidad de solo 35% a 39%. Esto está muy por debajo del 95 % exigido por los estándares ALTA/NSPS (ALTA/NSPS, 2016).

Los valores críticos de la distribución F se utilizan para determinar el multiplicador necesario para crear una elipse de error del 95 %. El multiplicador para aumentar la probabilidad de la elipse del error estándar depende del número de observaciones redundantes en el ajuste y está dado por la Ecuación (2) donde v es el *número* de observaciones redundantes en el ajuste, 0.05 son los puntos porcentuales determinados de $1 - 0,95$, y c es el multiplicador utilizado para crear ejes de elipse con un error del 95 %.

Los valores críticos de la distribución F se pueden consultar en la tabla de distribución de 0,05 F o calcularse en la hoja de cálculo de Excel mediante la función $F_{inv} (0,05,2,v)$ donde v es el número de observaciones redundantes en el ajuste.

La Tabla 1 enumera los multiplicadores para los ajustes que tienen varios números de observaciones redundantes, v . Tenga en cuenta que para una poligonal cerrada simple con tres observaciones redundantes, el multiplicador es 4,4. Observe también cómo se estabiliza el multiplicador con 16 o más observaciones redundantes.

LSQA

Los ajustes por mínimos cuadrados tienen sus raíces en la distribución normal, que se muestra en la **Figura 1**. La ecuación para la curva de distribución normal es **la Ecuación (1)** donde:

- v representa el residuo de las observaciones y se grafica en el eje x,
- y la probabilidad de que ocurra el residuo
- σ la varianza de las observaciones, y
- e el número exponencial, que es el número trascendental 2.718281828....

Para maximizar la probabilidad de esta función, la suma de los residuos cuadrados ponderados ($\cdot wv^2$) debe minimizarse.

$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{wv^2}{2\sigma^2}}$ <p>Equation 1</p>	$\sqrt{(n_j - n_i)^2 + (e_j - e_i)^2} = l_{ij} + v_l$ <p>Equation 2</p>
--	--

Este proceso se puede realizar escribiendo ecuaciones para cada observación en términos de sus parámetros desconocidos. Para un levantamiento horizontal, esto significaría un sistema de ecuaciones que representan los ángulos, acimutes y distancias, que se escriben en términos de sus coordenadas de estación desconocidas (n, e).

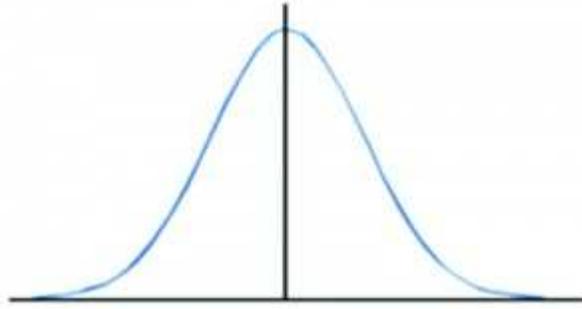


Figura 1: curva de distribución normal

Sin embargo, cada una de estas ecuaciones es no lineal. Para resolver un sistema de ecuaciones no lineales, primero deben linealizarse utilizando una expansión de la serie de Taylor de primer orden. Por ejemplo, la ecuación de distancia no lineal familiar con su residual es **la Ecuación (2)** donde (n, e) son las coordenadas norte y este de las estaciones de punto final i y j para la observación de distancia l_{ij} con un error residual de v_i .

La ecuación linealizada para la ecuación de distancia es **la Ecuación (3)** donde:

(dn, de) son correcciones a valores aproximados para los parámetros desconocidos (n, e) ,

los subíndices cero indican valores determinados usando los valores de coordenadas aproximados,

K es la diferencia entre la longitud observada y calculada de la distancia donde la longitud calculada l_j se determina a partir de los valores de coordenadas aproximados, y

v es el error residual.

En la solución de estas ecuaciones, el residuo v se elimina y la solución se itera aplicando las correcciones dn y de a los parámetros desconocidos aproximados n y e hasta que las correcciones a las coordenadas corregidas se vuelven insignificamente pequeñas (en esencia, hasta que los valores de las coordenadas para las estaciones se resuelven con una precisión inferior a la del levantamiento, que suele ser inferior a 0,005 pies o 0,0005 mm). Las ecuaciones linealizadas se escriben de manera similar para las observaciones de acimut y ángulo.

$\left(\frac{n_j - n_i}{IJ}\right)_0 dn_j + \left(\frac{e_j - e_i}{IJ}\right)_0 de_j + \left(\frac{n_i - n_j}{IJ}\right)_0 dn_i + \left(\frac{e_i - e_j}{IJ}\right)_0 de_i = K + v_l$ <p>Equation 3</p>	$X = (J^T W J)^{-1} J^T W K$ <p>Equation 4</p>
--	---

Realización del ajuste

Para minimizar la suma de los residuos cuadrados ponderados, es decir, para realizar un ajuste por mínimos cuadrados, todas las ecuaciones de observación se escriben en forma de matriz. Sin embargo, como todos sabemos por nuestra clase de Álgebra I en la escuela secundaria, podrían resolverse a mano si no fuera tan lento y difícil. Por lo tanto, fue la disponibilidad de computadoras y su capacidad para programarse para resolver grandes sistemas de ecuaciones lo que hizo que el proceso de mínimos cuadrados estuviera disponible para nosotros.

(La derivación y aplicación del método de los mínimos cuadrados ocurrió a fines del siglo XVIII y se atribuye a Karl Gauss cuando era estudiante de posgrado. Por lo tanto, el método ha estado disponible durante mucho tiempo, pero no fue hasta el advenimiento de la microcomputadora que estuvo disponible para la mayoría de los topógrafos.)

Al formar las matrices como se muestra en **la Ecuación (4)** y luego resolver este sistema de ecuaciones, la solución resultante produce la suma minimizada de los cuadrados de los residuos. Esta afirmación se muestra en mi libro *Cálculos de ajuste: análisis de datos espaciales*.

En la Ecuación (4):

la J es una matriz de coeficientes determinada a partir de las ecuaciones linealizadas; es decir, para una distancia, son los valores entre paréntesis en la Ecuación (3) evaluados en algunos valores de coordenadas aproximados para las estaciones I y J ;

W una matriz de pesos para cada observación;

K un vector de las diferencias entre los valores observados y calculados para cada medición;
y

X una matriz de correcciones a aplicar a las coordenadas aproximadas de las estaciones. Debido a que en un ajuste horizontal las ecuaciones no son lineales, este proceso de

solución debe repetirse hasta que las correcciones a las coordenadas aproximadas se vuelvan insignificanamente pequeñas. Esto también es cierto para un ajuste geodésico. Sin embargo, las ecuaciones para una red de nivelación diferencial y un ajuste de vector de línea de base GNSS son lineales y, por lo tanto, se pueden resolver sin iterar.

Entonces, ¿qué es el método de los mínimos cuadrados?

Es simplemente un método donde las ecuaciones se escriben para cada observación en términos de los parámetros desconocidos. Estas ecuaciones se ponderan de acuerdo con las precisiones de las observaciones para devolver los errores a sus fuentes.

Luego, las ecuaciones ponderadas se resuelven utilizando la Ecuación (4), que minimiza la suma de los residuos cuadrados ponderados y produce la solución más probable para cualquier conjunto de datos. Es un método para resolver un sistema de ecuaciones sobredeterminado que produce los valores más probables para los parámetros desconocidos. Durante este proceso se cumplen todas las restricciones geométricas.

En esencia, el método de los mínimos cuadrados no es más que lo que muchos de nosotros hicimos en una clase de álgebra cuando el instructor nos pidió que resolviéramos un sistema de ecuaciones para los parámetros desconocidos x e y . En aquel entonces, resolvimos estas ecuaciones por el proceso de eliminación.

El método de los mínimos cuadrados arrojará la solución más probable para cualquier conjunto de datos dado.

Sin embargo, para cada estación, tenemos dos x e y desconocidas. Para una encuesta con 10 estaciones, podríamos tener 20 incógnitas. Por lo tanto, el proceso sería difícil de realizar a mano como lo hicimos en la clase de álgebra, pero el hecho de que usemos matrices y computadoras no lo hace más extraño que usar algún otro método como el ajuste de la regla de la brújula.

Es simplemente un proceso de resolución de un sistema de ecuaciones para parámetros desconocidos. Este proceso da como resultado un mínimo para la suma de los residuos cuadrados ponderados cuando seguimos la Ecuación (4) y la solución más probable para el conjunto de datos dado.

El método de mínimos cuadrados no garantiza que la solución sea siempre buena. Al igual que otros métodos de ajuste, el principio básico de basura adentro, basura afuera todavía se aplica. Sin embargo, si se tiene cuidado al recopilar nuestras observaciones y se eliminan todos los errores sistemáticos de las observaciones, siempre se obtendrá la solución más probable para cualquier conjunto de datos dado.

Además, proporciona estadísticas posteriores al ajuste, como desviaciones estándar en las coordenadas y observaciones ajustadas, así como elipses de error para las estaciones que permiten al usuario analizar los resultados y determinar si los resultados están dentro de las tolerancias del proyecto.

Identificar errores con gráficos

Los errores y las meteduras de pata son una parte inevitable del ser humano. De hecho, un sabio me dijo una vez que las únicas personas que no cometen errores son las que no hacen nada.

Debido a que un ajuste de mínimos cuadrados de un levantamiento plano no es lineal, no llegará a una solución si hay un gran error, como una estación mal identificada, en los datos. Entonces, antes de ajustar nuestros datos, primero debemos eliminar cualquier error importante. Estos pueden venir en formas tales como identificaciones erróneas de estaciones o errores de grabación y transcripción.

Como ejemplo, en una de mis primeras clases en Penn State, tenía un grupo de estudiantes que giraban un ángulo ocho veces usando el método de repetición con un teodolito repetido. (Lo siento jóvenes, los teodolitos repetitivos eran anteriores a su tiempo en la Tierra). Mientras hacían esto, también estaban escuchando una estación de radio local con el nombre de *ROCK 107*.

Cuando llegó el momento de promediar la acumulación de los ocho ángulos, procedieron a escribir en su libro de campo que el ángulo era de 107° . Por supuesto, el ángulo no estaba ni cerca de 107° , pero, obviamente, el anotador escuchó el distintivo de llamada de radio de 107 al mismo tiempo que estaba registrando el ángulo promedio.

Este error de transcripción se deslizó hasta el ajuste de mínimos cuadrados donde se identificó y corrigió al revisar las notas de campo. Afortunadamente, el uso de recopiladores de datos hoy en día puede ayudar a evitar este tipo de errores, pero aún pueden ocurrir

muchos otros. Entonces, ¿qué métodos podemos usar para identificar errores en nuestros datos y eliminarlos?

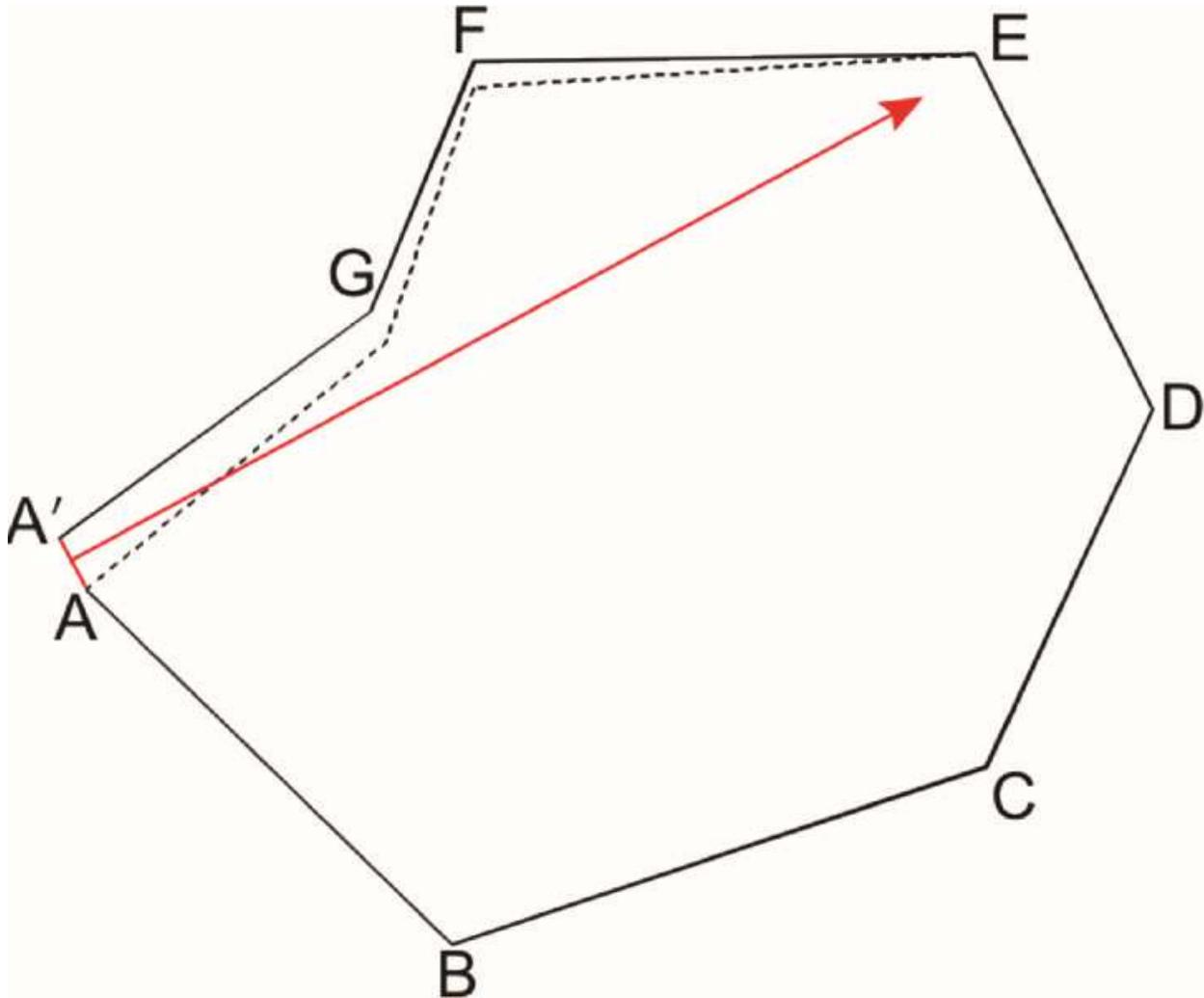


Figura 1: una poligonal con un error de ángulo

Métodos gráficos

Cuando ocurre un error en un levantamiento poligonal, una de las primeras técnicas que se pueden utilizar para identificar el error es gráfica. Para hacer esto, trace la poligonal en un programa CAD utilizando las observaciones sin procesar. La línea de cierre erróneo se puede usar para ayudar a identificar un solo error grande en una poligonal.

Por ejemplo, suponga que se comete un error angular en la estación E en la poligonal que se muestra en la **Figura 1**. Como se muestra en la figura, la línea punteada representa los

curso transversales restantes, que han sido girados por el error angular, lo que da como resultado una línea de cierre AA' .

Lo que ahora representa la línea de cierre erróneo es la cuerda del círculo que se generó por la rotación con el error angular en E. Por lo tanto, la bisectriz perpendicular de AA' apuntará a la estación con el error angular.

Para verificar que el ángulo en E tiene un error, suponga coordenadas para la estación E y suponga también un acimut para el curso EF.

Al usar este método, es importante usar las observaciones sin procesar y no los ángulos ajustados, porque ajustar los ángulos extendería el error a cada uno de los ángulos de la poligonal.

Proceda a calcular la poligonal como se haría normalmente usando las observaciones sin procesar nuevamente. Al hacer esto, el ángulo en E nunca se usa en los cálculos del cierre incorrecto de la poligonal. Si el cierre erróneo de la poligonal está bien al iniciar los cálculos en la estación E, el ángulo en E definitivamente tiene un error y debe descartarse o volver a observarse.

Debe señalarse que debido a que hay otros errores aleatorios en las observaciones, la bisectriz perpendicular no apuntará con precisión a E, pero parecerá hacerlo en el software de gráficos hasta que se acerque a ella.

Los efectos de un error de distancia se muestran en **la Figura 2**. El error de distancia trasladará la parte restante de la poligonal en la misma dirección que el recorrido que contiene el error. En este caso, ocurrió un error de distancia en la línea DE, que se muestra como una línea roja discontinua cerca de la estación E. Este error tradujo la parte restante de la poligonal de tal manera que la línea de cierre AA' coincide con la dirección de DE y su longitud coincide con el error de cerca.

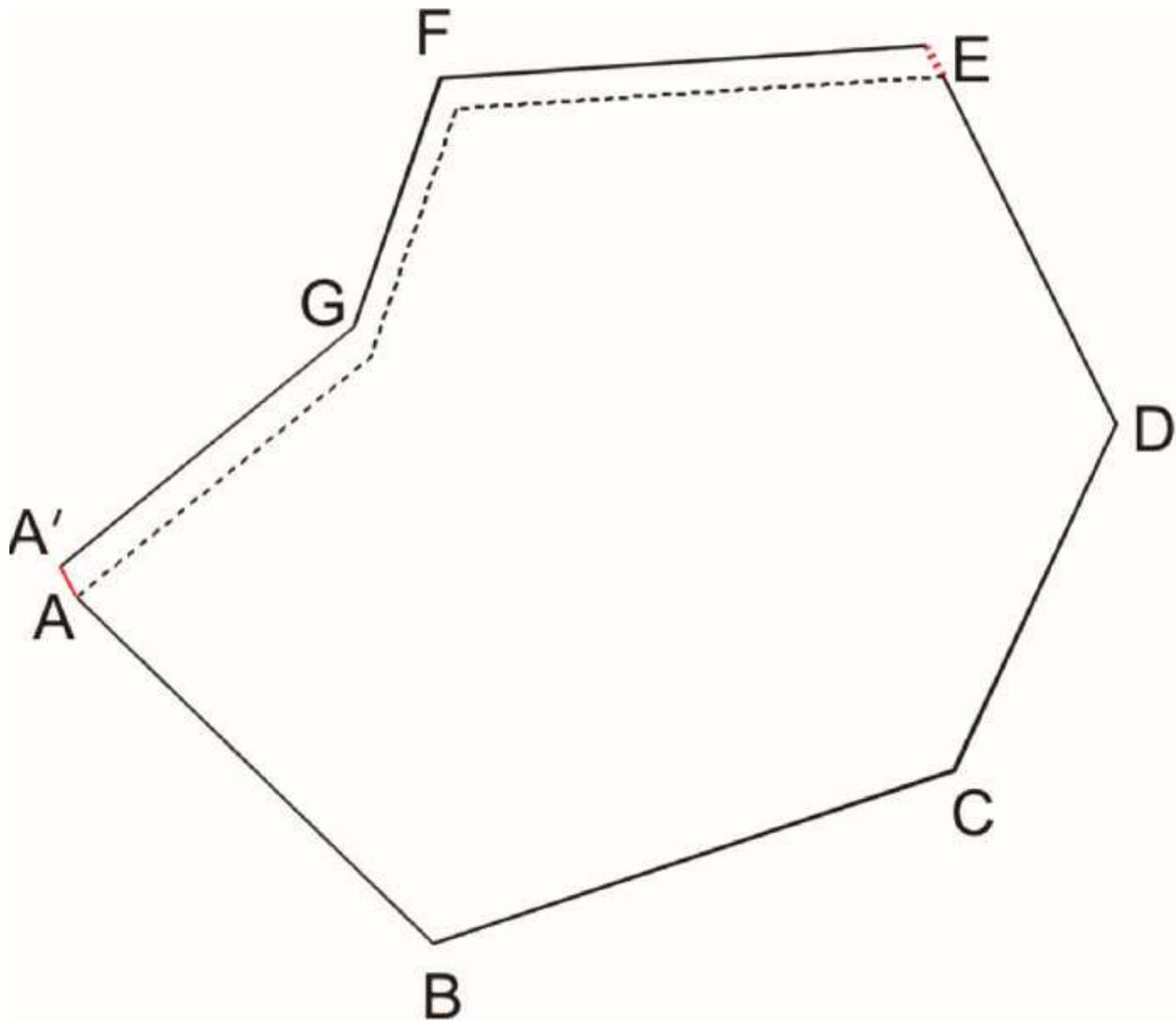


Figura 2: una poligonal con un error de distancia

Por lo tanto, para identificar el rumbo con un error de distancia, busque el rumbo que más se aproxime al azimut delantero o trasero de la línea de error de cierre. Una vez más, debido a errores aleatorios en otras observaciones, la dirección y la longitud de la línea de error de cierre no coincidirán exactamente con el error en el curso, pero estarán muy cerca.

Desafortunadamente, en este caso, el recorrido con el error de distancia debe volver a observarse para verificar que se trata de un error. A diferencia de los ángulos, no existe un procedimiento matemático para verificar el error en la oficina con una poligonal cerrada simple.

Esto habla de la necesidad de medir la distancia de cada rumbo tanto en la vista delantera como en la vista trasera a medida que realiza el levantamiento poligonal y realizar un seguimiento de estas observaciones por separado para que se pueda identificar un error garrafal. Los controladores topográficos actuales brindan opciones para este procedimiento y verifican las referencias en cada configuración de instrumento para que dichos errores puedan identificarse y eliminarse en el momento en que ocurren en el campo.

Para aquellos de ustedes que creen que los errores de distancia rara vez ocurren, les relaciono la siguiente evidencia de lo contrario. En el campus antes de que se construyera nuestro edificio Academic Commons, se veía un pin de esquina de propiedad a una distancia de aproximadamente 400 pies de un monumento de segundo orden de NGS, Hayfield SW.

Entre la esquina de la propiedad y el monumento NGS había dos hileras de manzanos silvestres. Las ramas más bajas de estos árboles impedían la visibilidad de una varilla normal con un prisma en el pasador, por lo que los estudiantes generalmente invertían el prisma en la esquina de la propiedad y observaban la distancia. En esta posición, la disposición del suelo era tal que la línea de visión entre las dos estaciones estaba justo por encima de la hierba.

Todos debemos saber que dentro de un pie o dos, el suelo tiene un microclima que refracta la línea de visión.

Año tras año, los estudiantes procedieron de esta manera y terminaron con distancias que normalmente estaban desviadas por alrededor de un pie. Los enviaría de regreso donde repetirían el proceso, obtendrían una duración diferente debido a los cambios en las condiciones atmosféricas y nuevamente tendrían una duración incorrecta para el curso.

No fue hasta que les recordé el problema del microclima que reconocieron lo que habían hecho mal. Tenga en cuenta que habían oído hablar del microclima en cursos anteriores, pero la información nunca pareció asimilarse hasta que la experimentaron.

Esto puede parecer un escenario único, pero he visto a estudiantes hacer lo mismo cerca de vehículos y edificios estacionados. En este caso, la línea de visión está cerca del lado del objeto y nuevamente pasa por un microclima que refracta la línea de visión.

De hecho, mi experiencia durante los últimos 30 años enseñando topografía es que los errores de distancia ocurren con más frecuencia que los errores de ángulo debido a la falta de verificaciones de campo. Debido a que de todos modos necesita hacer una referencia de su instrumento, verifique siempre su distancia en la referencia, regístrela y utilícela más tarde como una segunda observación en un ajuste de mínimos cuadrados.

Este artículo analiza los métodos gráficos que se pueden usar para aislar los errores graves en las observaciones.

Procedimientos Estadísticos Elementales ERROR DATA SNOOPING MODIFICADO

En este artículo, asumo que se ha realizado un ajuste por mínimos cuadrados.

Desafortunadamente, muchos novatos creen que su trabajo está hecho porque ahora tienen una solución para las coordenadas de la estación desconocida. Sin embargo, nada más lejos de la realidad. Es en este punto que comienza el verdadero trabajo de analizar los resultados del ajuste y verificar los datos en busca de errores garrafales. En este artículo y en el próximo, presento métodos estadísticos que se pueden usar para ayudar a identificar errores en los datos.

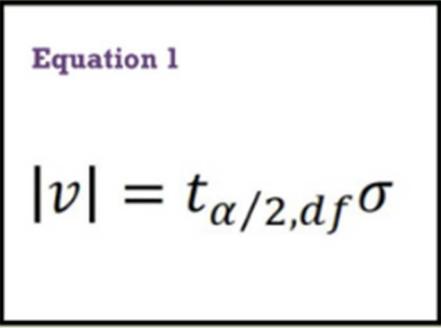
Uno de los métodos estadísticos más sencillos que se utilizan para identificar posibles errores en las observaciones es comprobar el rango aceptable de los residuos mediante la distribución t. Sin embargo, este método requiere errores estándar válidos a priori (antes del ajuste) para las observaciones.

Analizo cómo obtener estas estimaciones en una serie anterior de artículos titulada “Ajuste por mínimos cuadrados correctamente ponderados” (consulte $xyHt$ de enero, febrero y abril de 2016). Si se usa este método, entonces el valor crítico de la distribución t se puede usar para determinar un rango aceptable para los residuos después del ajuste.

Si bien este método puede llevar mucho tiempo, se puede simplificar usando el error estándar estimado más grande o el error estándar estimado promedio para un conjunto particular de observaciones. Esto es cierto porque por experiencia he notado que a menudo los errores estándar estimados para ángulos y distancias en un levantamiento se encuentran en un rango pequeño. También se puede usar en el campo cuando se trata de determinar si se debe aceptar una localización GNSS.

Como ejemplo de un ajuste de mínimos cuadrados horizontales, suponga que el mayor error estándar estimado en una observación de ángulo es de $\pm 4,0''$, donde todos los errores estándar estimados para los ángulos se encuentran en un rango de $\pm 2,9''$ a $\pm 4,0''$. Además, suponga que el ajuste por mínimos cuadrados tiene nueve observaciones redundantes o grados de libertad. El residual para una observación de ángulo particular es $9,8''$. Normalmente, la detección de errores estadísticos se realiza con un nivel de confianza del 95 % al 99,9 %.

Usando la distribución t, se puede calcular un rango para los residuos con esta observación como se muestra en la Ecuación (1).



Equation 1

$$|v| = t_{\alpha/2, df} \sigma$$

En la Ecuación (1),

- v es el residuo después del ajuste,
- $t / 2, df$ el valor t crítico de la distribución t basada en los puntos porcentuales de la cola superior,
- df representa los grados de libertad u observaciones redundantes en el ajuste, que es 9 en este ejemplo, y
- el mayor error estándar estimado para la observación del ángulo.

Primero realizaré esta prueba a un nivel de confianza del 95% con un valor igual a $\pm 4,0''$ y t 0.025,9 de 2.26, con un valor crítico de dos colas para t a un nivel de significancia de 0.05 o (1 \pm 0.95).

Dado que el residuo de la observación es $9,8''$, podemos ver en la Ecuación (1) que $|9,8''| > 2,26(\pm 4,0'') = \pm 9,0''$. Por lo tanto, vemos que el residuo de $9,8''$ es mayor que el estimado con un nivel de confianza del 95 % dado el mayor error estándar estimado de $\pm 4,0''$. Es posible que hayamos descubierto un error de observación, pero se necesita más discusión.

Ahora es el momento de utilizar el error estándar estimado real para la observación, que es de $\pm 2,9''$. Nuevamente usando la Ecuación (1) encontramos un rango aceptable para el residual pero esta vez en un nivel de significancia de 0.01, lo que representa un nivel de confianza del 99%.

Equation 2

$$\pm 4.7 \text{ mm} = \left(\pm 0.1 \frac{8 \cdot 60}{206,264.8} 2000 \text{ mm} \right)$$

Equation 3

$$\pm 8.9 \text{ mm} = \sqrt{2(0.5^2) + 2(4.7^2) + 3^2 + \left(\frac{0.5}{10^6} 10,000,000 \right)^2}$$

Usando la Ecuación (1) y un valor t crítico de $t_{0.005,9} = 3.25$, encontramos que el rango del 99% para el residual es $\pm 9.4'' = 3.25(\pm 2.9'')$. Con un nivel de confianza del 99%, el residuo de la observación de $9,8''$ está fuera del rango aceptable. La observación debe eliminarse del ajuste como un error y volver a observarse.

Sin embargo, cabe señalar que si hubiéramos hecho esta prueba al 99,9%, el valor t crítico sería $t_{0,0005,9}$, que es 4,78, y el rango permisible para el residual es $\pm 13,9''$, que equivale a $4,78(\pm 2.9'')$. A un nivel del 99,9 %, una observación con un residuo de $9,8''$ no se detectaría como un error garrafal.

Por lo tanto, depende del practicante decidir cuánto error es demasiado para el tipo de encuesta que se está realizando. Las estadísticas solo pueden identificar qué observaciones deben investigarse como posibles errores. El topógrafo debe decidir si acepta el hecho de que él o ella y sus colegas son humanos y pueden cometer errores garrafales o no.

Para ayudar en esta decisión, recuerde que un nivel de confianza del 99 % significa que 1 de cada 100 observaciones, que no contienen un error garrafal, se identificará erróneamente como si tuviera un error garrafal. Dado que la probabilidad de que se presente un error garrafal es típicamente más alta que esto, la observación es más probable que sea un error garrafal, pero nunca podemos decir esto con seguridad. De hecho, dado que nunca conocemos la distribución de los errores garrafales, nunca estamos seguros de que haya

ocurrido un error garrafal. Simplemente se reduce a lo que está dispuesto a vivir y lo que volverá a observar o eliminará del ajuste.

Sin embargo, a partir de este ejemplo es fácil ver que realmente depende de la precisión del error estándar estimado en la observación y del nivel de confianza que se elija para realizar la prueba. Si bien se dispone de mejores métodos estadísticos para identificar errores en las observaciones, la verificación de los residuos es rápida y fácil de realizar.

Por ejemplo, podría usar una hoja de cálculo para determinar el valor t crítico apropiado y el rango aceptable para los residuos en el nivel de confianza elegido. Para el ejemplo anterior con un nivel de confianza del 95 %, que también se denomina nivel de significación de 0,05, simplemente escriba en Microsoft Excel “= tinv (0,05,9)” sin las comillas. Luego, Excel determinará el valor crítico de t como 2,26, o puede escribir “= tinv (0,05,9)*4,0” para obtener el intervalo de confianza del 95 % de $\pm 9,0$.

Esta ecuación se puede modificar rápidamente para el intervalo de confianza del 99 % con un error estándar estimado de $\pm 2,9$ cambiando la ecuación a “= tinv (0,01,9)*2,9” para obtener el rango de $\pm 9,4$. Cabe señalar aquí que Excel simplemente requiere que se escriba 0,05 o 0,01 para los intervalos de confianza. Siempre asume que el valor crítico determinado es para un intervalo de dos colas.

Como otro ejemplo, supongamos que estamos tratando de decidir si un vector de línea de base GNSS de un levantamiento estático contiene un error. El fabricante afirma que para un levantamiento estático, el error estimado es de 3 mm + 0,5 ppm. Sin embargo, si ha estado leyendo mis artículos anteriores, también se dará cuenta de que debemos considerar los errores de configuración.

Suponga que se ha utilizado un trípode de altura fija y que la burbuja de nivel del trípode está correctamente ajustada. En este caso, si asumimos que tenemos la burbuja dentro de ± 1 división del nivel a una altura de 2.000 m, el error de centrado debido a la falta de nivelación es como se ve en la Ecuación (2) (Observe que 206,264.8 es un factor de conversión para segundos de arco a radianes.)

Además, se estima que la capacidad de centrar la punta en la depresión del monumento es de $\pm 0,5$ mm. Dado que una línea base requiere dos configuraciones, estos errores de centrado ocurren en cada extremo de la línea base. Suponga que una línea base de 10 000 m de largo tiene un residuo de 23 mm. El error estimado para esta línea de base dados los

errores estimados publicados por el fabricante y los errores de centrado es como se ve en la Ecuación (3).

Para realizar la prueba estadística debemos considerar cuántos grados de libertad hay en la observación. Los estadísticos afirman que si hay más de 30 grados de libertad, podemos usar los multiplicadores de distribución normal en lugar de la distribución t. Dado que la sesión tuvo una duración de 20 minutos con observaciones recopiladas cada 5 segundos, hubo al menos $240 = (2060/5)$ cálculos de la línea de base.

Por lo tanto, un rango aproximado del 95% para el residual es $1,96(\pm 8,9) = \pm 17,4$ mm. El residual de 23 mm es demasiado grande al 95%. Sin embargo, el valor t crítico al 99 % es 2,576, por lo que el rango del 99 % para el residuo es de $\pm 22,8$ mm.

Por lo tanto, con un nivel de confianza del 99 %, podemos ver que la línea de base de 10 km podría considerarse un error garrafal, pero está muy en el límite. Nuevamente, esto se reduce a la cantidad de error con el que está dispuesto a vivir.

Conclusiones

Si bien este método de detección de errores funciona muy bien, hay otro método que pueden emplear los paquetes de software de mínimos cuadrados que facilita aún más la detección de errores. Es decir, la mayoría del software utiliza una estadística posterior al ajuste conocida como criterio tau. El criterio tau es una modificación de un método conocido como indagación de datos, que fue introducido por Willem Baarda a mediados de la década de 1960.

Indagación de datos y el criterio tau

Sin embargo, cualquiera que haya usado un paquete avanzado de ajuste por mínimos cuadrados sabe que dicho software a menudo usa una estadística posterior al ajuste conocida como el criterio tau. El criterio tau es una modificación de un método conocido como indagación de datos, que fue introducido por Willem Baarda a mediados de los años 60.

En este artículo, analizo estas dos técnicas de detección de errores posteriores al ajuste. Si bien las matemáticas de este artículo pueden no ser del agrado de todos, los procedimientos

de ajuste posterior, que deben seguirse cuando se descubren posibles errores de observación mediante la indagación de datos o el criterio tau, son importantes para que todos los usuarios los entiendan.

Espionaje de datos

En el artículo anterior (noviembre de 2016), apliqué el valor crítico de la distribución t al error estimado de la observación para identificar residuos que eran más grandes que los estimados y, por lo tanto, para identificar errores graves. Esta técnica puede denominarse un método tosco pero efectivo.

Un procedimiento más refinado no depende tanto del error estimado para la observación sino que calcula la incertidumbre en el residuo de la observación. Como se señaló anteriormente, Willem Baarda presentó este método en una serie de documentos a mediados y finales de la década de 1960 utilizando datos geodésicos.

El método, llamado indagación de datos, presentó más que un simple método para identificar errores en los datos geodésicos. Su base teórica se basa en la propagación de errores y en un principio conocido como ley general de propagación de varianzas. Esta ley establece que cuando se trabaja con un conjunto de funciones, los errores en las observaciones se propagarán a través de esas funciones como se muestra en la Ecuación (1).

Equation 1

$$Q_{yy} = A Q_{xx} A^T$$

Equation 2

$$Q_{xx} = (A^T W A)^{-1}$$

Equation 3

$$Q_{ll} = A Q_{xx} A^T = A (A^T W A)^{-1} A^T$$

Equation 4

$$Q_{vv} = W^{-1} - Q_{ll} = W^{-1} - A Q_{xx} A^T$$

Equation 5

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$$

Equation 6

$$|\bar{v}_i| > S_0(t)$$

En la Ecuación (1):

- Q_{yy} es la matriz de cofactores de la función resultante a partir de la cual se puede calcular la matriz de varianza-covarianza de la función,
- J la matriz de coeficientes de las observaciones,
- J^T su trasposición (Ghilani , 2016) y

- Q_{xx} la matriz de varianza-covarianza de las incógnitas, que proporciona el ajuste de mínimos cuadrados como parte de la solución para las incógnitas. El cálculo de Q_{xx} se muestra en la Ecuación (2). Aquí, W son los pesos de las observaciones antes del ajuste (Ghilani , 2016a y 2016b).

Para propagar los errores en las incógnitas de Q_{xx} a las observaciones ajustadas, debemos aplicar la Ecuación (1) para llegar a la matriz de cofactores para las observaciones ajustadas, Q_{ii} , como se muestra en la Ecuación (3).

Finalmente, la matriz de cofactores en los residuos, Q_{vv} , se calcula como se muestra en la Ecuación (4).

Si todo esto es confuso, se puede afirmar simplemente que los errores en las observaciones se han propagado desde las observaciones originales a los parámetros desconocidos, luego a las observaciones ajustadas y finalmente a sus residuales v . Las estadísticas y las matemáticas reales se pueden dejar a los matemáticos, estadísticos y programadores.

Lo que es importante en estos cuatro conjuntos de ecuaciones es que los errores en las observaciones originales se han propagado a los residuos, de modo que ahora podemos determinar las desviaciones estándar a posteriori (después del ajuste) de los residuos. Si está preguntando, "¿Por qué calcular las desviaciones estándar para los residuos?" es porque ahora podemos estimar qué tan grande es un residuo inaceptable para cualquier observación dada en cualquier nivel de confianza/probabilidad.

En su derivación, Baarda asumió que solo había un error en cualquier conjunto de datos. Si este fuera el caso, entonces el tamaño del residuo en esa observación estaría directamente relacionado con la desviación estándar del residuo. Luego, el residual estandarizado se calcula como se muestra en la Ecuación (5), donde:

- $v - y_0$ es el residuo estandarizado de una observación,
- v_i el residuo de la observación, y
- q_i el elemento diagonal de la matriz Q_{vv}

que corresponde al residual, v_i . Una vez más, las matemáticas aquí no son importantes. Sin embargo, ahora sabe lo que representa la columna residual estandarizada en el resultado de su paquete comercial de mínimos cuadrados.

Baarda usó un único valor crítico de la distribución t para decidir si una observación con un residuo estandarizado $v - \bar{v}$, es de hecho un error garrafal. Matemáticamente hablando, una observación se identifica como un posible error si su valor absoluto es mayor que $S_0(t)$, como se muestra en la Ecuación (6).

En la Ecuación (6), S_0 es la desviación estándar de peso unitario para el ajuste; es decir, la raíz cuadrada de S_0^2 (Ghilani, 2015), y t es de la distribución t de Student, que originalmente sugirió Baarda como 4.

El uso adecuado del método es eliminar solo una observación del conjunto de datos y luego volver a ejecutar el ajuste.

Sin embargo, la aplicación de este proceso en fotogrametría sugirió que un valor t crítico de 3,29 funcionó bien para identificar errores en los datos. Este valor se ha utilizado desde que se aplica este método en la mayoría de los casos. Este proceso es similar al método que sugerí anteriormente, aunque en este caso siempre se asume que el valor de la distribución t crítica es un valor específico asignado por el usuario.

Una advertencia sobre este proceso es que Baarda asumió que el conjunto de datos solo tenía un error garrafal. Dado que este no es necesariamente el caso, el uso adecuado del método es eliminar solo una observación del conjunto de datos (es decir, la que tiene el residuo estandarizado más grande) y luego volver a ejecutar el ajuste. Este proceso de eliminar una observación a la vez continúa hasta que el usuario no encuentra ninguna observación que satisfaga la Ecuación (6). En este punto, se supone que los datos están libres de errores.

Ahora el usuario debe volver a insertar cada observación que se detectó como un error en el ajuste para ver si se detecta nuevamente como un error. Reconocer que otros errores podrían haber causado un gran residuo en una observación en particular, lo que resultó en su eliminación incorrecta de los datos.

De todos modos, en este punto se cumple la premisa básica de que el conjunto de datos contiene un error porque el único error detectable que queda en el conjunto de datos es el que se reinserta. Si la observación vuelve a satisfacer la Ecuación (6), la observación se

identifica estadísticamente como un error o un valor atípico y debe descartarse o volver a observarse.

Si bien este proceso puede parecer laborioso, en realidad no lo es porque los ajustes típicos se pueden realizar en menos de un segundo. Además, el proceso se puede automatizar en el software. El uso de un valor t crítico de 3,29 produce datos libres de errores con un nivel de probabilidad del 99,9 %. A menudo utilizo la afirmación de que los datos están limpios de errores garrafales.

El criterio tau

A mediados de la década de 1970, Alan Pope, un estadístico del National Geodetic Survey, identificó una falla en el método de espionaje de datos, que se puede ver en la Ecuación (6).

Recuerde que la desviación estándar del peso unitario S_0 se calcula como se muestra en la Ecuación (7). (Los términos en la Ecuación (7) se han definido previamente). Lo que Pope se dio cuenta es que S_0 estaba contaminado por la observación con el error detectado y, por lo tanto, tenía un gran v_i residual. Por lo tanto, S_0 no fue una buena estimación de σ_0 para el ajuste.

Sugirió que un mejor valor crítico para usar cuando se rechazan las observaciones como errores garrafales era el de la distribución tau (τ). El valor crítico para el criterio tau se basa en la distribución t y se puede calcular como se muestra en la Ecuación (8), donde r es el número de observaciones redundantes en el ajuste y t es el valor crítico de la distribución t con $r - 1$ grados de libertad y α nivel de confianza.

Es difícil de creer ahora, apenas 40 años después, que luego desarrolló tablas para variar el número de observaciones redundantes y niveles α debido a la complejidad de calcular la Ecuación (8). En el mundo actual, una hoja de cálculo puede calcular esta ecuación tan bien como la mayoría de los paquetes de software.

También se debe señalar que α tiene que ser transformado por el número de observaciones non-spur por lo que él se refirió como una transformación para el control del error Tipo I.

La única diferencia entre su método sugerido y el propuesto originalmente por Baarda es que el valor crítico τ se usa para determinar si una observación es identificable como un error en lugar de un valor crítico estadístico. El procedimiento restante, de eliminar solo

una observación que se detecta como un error a la vez y luego reinsertar estas observaciones después de que se determina que el conjunto de datos está limpio, no cambió.

A menudo, el software que tiene incorporado el criterio tau resaltaré o marcará las observaciones que se detectan estadísticamente como errores garrafales. Algunos programas pasarán automáticamente por el proceso de eliminación de estas observaciones. Independientemente del método, estos procedimientos hacen un excelente trabajo al eliminar los errores de los conjuntos de datos cuando las observaciones se ponderan correctamente (Ghilani , 2013a).

Esta es una clave para todos estos métodos estadísticos de detección de errores. Es decir, los pesos de las observaciones deben ser correctos. La ponderación correcta de las observaciones convencionales se discutió en el artículo citado anteriormente.

Si bien gran parte de lo que se presenta aquí parece ser complicado, aquellos de ustedes que usan un paquete comercial de mínimos cuadrados para ajustar sus datos ahora tienen una idea de cómo identificar y eliminar errores garrafales de un conjunto de datos. Cuando se realiza correctamente, cualquiera de estos métodos funciona muy bien. Programé estos procedimientos en la década de 1980 y los he usado una y otra vez para identificar posibles errores en las observaciones.

A menudo, estos errores descubren procedimientos de campo o métodos computacionales incorrectos que, con suerte, pueden evitarse en el futuro si el creador se da cuenta de lo que salió mal.

Al descubrir errores garrafales, es importante identificar qué sucedió para crear el error garrafal en primer lugar. A menudo, estos errores descubren procedimientos de campo o métodos computacionales incorrectos que, con suerte, pueden evitarse en el futuro si el creador se da cuenta de lo que salió mal.

Al igual que la distancia que los estudiantes midieron incorrectamente repetidamente, una vez identificado, era importante para mí corregir el error para que, con suerte, los estudiantes recordaran no volver a hacerlo nunca más en su vida profesional.

Para aquellos de ustedes que deseen ver el desarrollo matemático de estas y otras ecuaciones que he presentado en esta serie de artículos, los remito a mi libro, Cálculos de ajuste. (Ghilani , 2010).

Rectángulo de error estándar y elipse de error

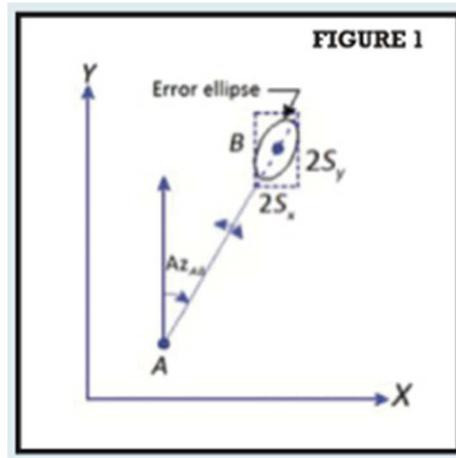


Figura 1: El rectángulo de error estándar y la elipse de error. o Encuestas de títulos de tierras ALTA/NSPS.

¿Qué es una elipse de error? Una de las ventajas de un ajuste por mínimos cuadrados sobre otros métodos es que un subproducto del ajuste no son solo los valores más probables para las coordenadas desconocidas, sino también las desviaciones estándar de estos valores.

Supongamos por un momento que estamos calculando las coordenadas de la estación B que se muestra en **la Figura 1** utilizando un acimut AZ_{AB} con una incertidumbre de S_{Az} y una distancia AB con una incertidumbre de SD ft. Incluso si consideramos que las coordenadas de la estación A son perfecto, las coordenadas de B tendrán incertidumbres de S_x y S_y debido a los errores en el acimut y la distancia.

Esta incertidumbre en las coordenadas de la posición de B da como resultado un rectángulo de error estándar que rodea a B. Este rectángulo representa el área en la que las coordenadas verdaderas de la estación B serán aproximadamente el 68 % del tiempo. Tendrá unas dimensiones de $2S_x$ por $2S_y$.

Sin embargo, el rectángulo de error estándar no representa el error real en las coordenadas. Aquí es donde entra en juego una elipse de error. Como se muestra en la Figura 1, la elipse de error estándar está delimitada por el rectángulo de error estándar. Son los resultados de la distribución bivariada (variables x e y) que se muestra en la Figura 2(a).

Si **la Figura 2(a)** está contorneada, **la Figura 2(b)** son los resultados. La Figura 2(b) representa elipses de error en varios niveles de probabilidad.

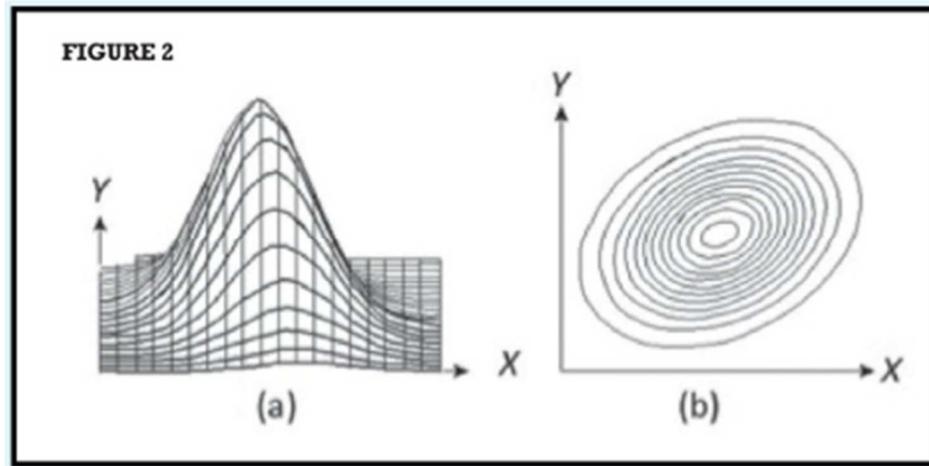


Figura 2: (a) Un diagrama de alambre de una distribución bivariada y (b) las líneas isogónicas de un gráfico de contorno de (a).

Como se puede ver en la Figura 1, la distribución bivariada no llena completamente el rectángulo de error estándar, pero muestra los límites de los valores de las coordenadas verdaderas en un nivel de probabilidad específico para la estación B dada la incertidumbre tanto en el acimut como en la longitud de la *línea* . AB . Cuanto mayor sea la elipse de error, más probable es que contenga las coordenadas verdaderas de la estación B.

En esencia, sabemos que las coordenadas contienen error. Por lo tanto, lo que establecen los estándares topográficos ALTA/NSPS de 2016 es que debe estar dentro de los 0,07 pies de las coordenadas verdaderas de una estación el 95 % del tiempo. Esto significa que el 95% de las veces, un topógrafo competente puede acercarse a 0,07 pies en un nuevo levantamiento posterior.

Honestamente, los estándares también permiten 50 ppm adicionales para la distancia entre las dos estaciones que se están probando. Sin embargo, esto agregaría solo 0,004 pies adicionales para una distancia de 500 pies entre estaciones o 0,016 pies para una distancia

de 1000 pies. En esencia, no aumenta significativamente el error permisible para las distancias típicas que se encuentran en la mayoría de las prácticas topográficas.

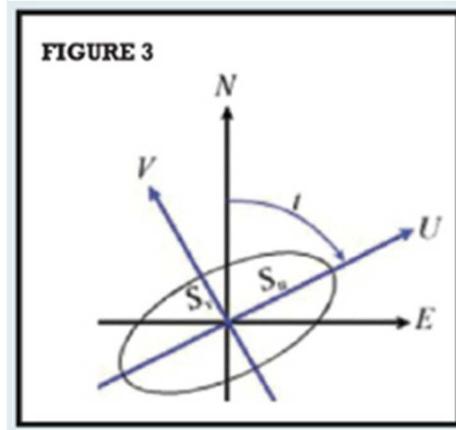


Figura 3: Componentes de la elipse de error estándar.

Cálculo de elipses de error

la **Figura 3** se muestran los componentes de la elipse de error. El ángulo t es la cantidad de rotación que se requiere para que la correlación entre el par de coordenadas (n, e) sea igual a cero. Se mide desde el eje N positivo.

El eje mayor de la elipse es el eje U y el menor es el eje V . La longitud del semieje mayor de la elipse viene dada por S_u que corresponde a la componente de mayor error en la estación, y la longitud del semieje menor de la elipse viene dada por S_v que es el menor error en la estación.

Una de las ventajas de un ajuste por mínimos cuadrados es que tiene una base estadística. Así, al final del ajuste, se pueden calcular las incertidumbres en las coordenadas, que son las desviaciones estándar en las coordenadas norte y este.

Sin embargo, como se indicó anteriormente, estas incertidumbres no suelen estar en la dirección del mayor error en la estación. También están correlacionados. La correlación significa que a medida que cambia una coordenada en una estación, la otra también debe cambiar.

Esto se puede ver en la Figura 1, donde si cambiamos el valor del norte para la estación B , el valor del este también debe cambiar para mantener el acimut de AB . Este vínculo entre los

valores de las coordenadas se puede expresar matemáticamente mediante el coeficiente de correlación de Pearson, que se define como en la **Ecuación (1)**, donde σ_n es la desviación estándar en el norte, σ_e la desviación estándar en el este y σ_{ne} la covarianza. entre las dos incógnitas.

EQUATION 1 $\rho = \frac{\sigma_{ne}}{\sigma_n \sigma_e}$

EQUATION 2 $S_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.022169} & \mathbf{-0.021460} & -0.001845 & -0.025936 \\ -0.021460 & \mathbf{0.048736} & 0.003587 & 0.050419 \\ -0.001845 & 0.003587 & 0.010786 & 0.008517 \\ -0.025936 & 0.050419 & 0.008517 & 0.073296 \end{bmatrix}$

EQUATION 3 $\rho = \frac{-0.021460}{\sqrt{0.022169(0.048736)}} \approx -0.65$

Fundamentos para calcular elipses de error, figura 2

Por ejemplo, supongamos que tenemos la matriz de covarianza, S_{xx} que se muestra en **la Ecuación (2)** de un ajuste de un levantamiento horizontal que involucra solo dos estaciones con coordenadas desconocidas. (Aparte, la matriz de covarianza es la inversa de la matriz normal que usamos para resolver simultáneamente las coordenadas desconocidas).

El levantamiento tuvo solo dos estaciones con coordenadas (n, e) desconocidas. Resaltado en negrita está la varianza en el norte de 0.022169, la covarianza en las dos incógnitas de -0.021460 y la varianza en el este de 0.048736. Las raíces cuadradas de las varianzas de cada uno de estos elementos diagonales, que son $\pm 0,149$ y $\pm 0,221$, producirían las desviaciones estándar hacia el norte y el este de las coordenadas de la estación. Vemos que estos elementos están correlacionados ya que la inmediata fuera de la diagonal no es igual a cero con un valor de -0.021460 . Este número indica que a medida que cambia el norte de la estación, también debe cambiar el este.

Por la Ecuación (1) el coeficiente de correlación para las incógnitas es como **la Ecuación (3)**. El coeficiente de correlación siempre está entre -1 y $+1$. Si es negativo, una incógnita disminuirá a medida que la otra aumente. Si son positivas, ambas incógnitas aumentarán o disminuirán simultáneamente. Cuanto más cerca de cero está el coeficiente, menos correlación existe entre las dos incógnitas.

Como puede verse en la Ecuación (3), las dos incógnitas están negativamente correlacionadas, lo que significa que a medida que aumenta el norte, el este debe disminuir, o viceversa. El coeficiente de correlación para la elipse de error que se muestra en la Figura 1 sería positivo ya que el este debe aumentar a medida que aumenta el norte para mantener el acimut de la línea.

Por lo tanto, en concepto, el método para calcular los ejes semimayor y semimenor de la elipse de error estándar es rotar la submatriz diagonal de 2 por 2 para cada estación en una cantidad que elimine la correlación entre los dos componentes. En esencia, rotaremos el sistema del eje NE a UV donde no hay correlación entre los componentes U y V . Para aquellos lectores que son matemáticos, el proceso implica una ortogonalización en cada submatriz de 2 por 2 de la matriz de covarianza.

Elipses de error y probabilidad creciente

En el artículo anterior ([abril de 2017](#)), analizo la correlación de los valores de las coordenadas de una estación y cómo se usa una elipse de error para determinar la dirección del error más grande en una estación. En este artículo, reviso los componentes de una elipse de error, el proceso que se usa para calcular los componentes de una elipse de error y cómo aumentar la probabilidad de la elipse de error estándar al 95 % requerido.

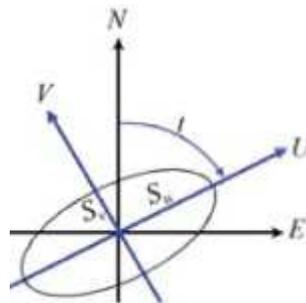


Figura 1: Componentes de la elipse de error estándar.

Para repasar, los componentes de una elipse de error (**Figura 1**) son:

- el ángulo t , que es la cantidad de rotación requerida para eliminar la correlación entre los dos valores de coordenadas para cada estación en un levantamiento horizontal/plano,
- S_{α} que es la longitud del semieje mayor de la elipse y representa el mayor error en la estación, y
- S_{β} que es el error más pequeño en la estación.

Con respecto a los estándares ALTA/NSPS, solo nos preocupa el tamaño de S_{α} en un nivel de probabilidad del 95% para cada estación.

Como se discutió en la Parte 1 de este artículo, para obtener el error máximo en una estación, se debe eliminar la correlación entre el par de valores de coordenadas. Esto se puede hacer usando una rotación bidimensional y propagación de errores. Si bien los cálculos reales no son importantes, los valores resultantes utilizados para calcular la elipse de error son importantes para esta discusión. En este proceso, recuerde la matriz de covarianza que se muestra en la Parte 1 y que se muestra nuevamente en la **Ecuación 1** .

$$S_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.022169} & \mathbf{-0.021460} & -0.001845 & -0.025936 \\ -0.021460 & \mathbf{0.048736} & 0.003587 & 0.050419 \\ -0.001845 & 0.003587 & 0.010786 & 0.008517 \\ -0.025936 & 0.050419 & 0.008517 & 0.073296 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$t = \frac{1}{2} \left[\text{atan} \left(\frac{2(S_{ne})}{S_{nn} - S_{ee}} \right) + C \right] = \frac{1}{2} \left[\text{atan} \left(\frac{2(-0.021460)}{0.022169 - 0.048736} \right) + 180^\circ \right] = 119.1215^\circ \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_{uu} &= S_{ee} \sin^2 t + 2S_{ne} \cos t \sin t + S_{nn} \cos^2 t = 0.060691 \\ S_{vv} &= S_{ee} \cos^2 t - 2S_{ne} \cos t \sin t + S_{nn} \sin^2 t = 0.010214 \end{aligned} \quad (3)$$

$$c = \sqrt{2F_{\alpha, 2, \text{degrees of freedom}}} \quad (4)$$

$$\sqrt{0.07^2 + \left(\frac{50}{1,000,000} 3616.46 \right)^2} = \pm 0.19 \text{ ft} \quad (5)$$

Para determinar la dirección del error máximo en esta estación, que es el eje S_u , los elementos de la matriz de covarianza para esta estación deben girarse en la cantidad que se muestra en la **Ecuación 2**, donde:

- S_{ne} es la covarianza en la estación, que es el elemento fuera de la diagonal 0.021460,
- $Ver_{_}$ es la varianza en el este, que es 0.048736,
- S_{nn} es la varianza en el norte, que es 0.022169, y
- C , que en este caso es igual a 180° , se sumó a los resultados de la función arcotangente, que fue -58.243° , para obtener un ángulo de rotación positivo. Tenga en cuenta que -58.243° es la cantidad de rotación en sentido antihorario que va desde el eje N al eje V .

Una vez que se determina el ángulo de rotación, las varianzas del semieje mayor, S_{uu} y del semieje menor, S_{vv} se pueden calcular como en **la Ecuación 3**.

En este ejemplo S_{uu} es 0.060691, cuya raíz cuadrada es la longitud del semieje mayor de la elipse, S_u , siendo ± 0.246 , y S_{vv} es 0.010214, cuya raíz cuadrada es la longitud del semieje

menor de la elipse, S_v , siendo $\pm 0,101$. Nuevamente, los cálculos no son importantes ya que este es un componente estándar de la mayoría de los paquetes de mínimos cuadrados.

Elipses de error de mayor probabilidad

Los cálculos anteriores producen lo que se conoce como elipse de error estándar. La probabilidad de que las verdaderas coordenadas de B estén en la elipse de error es relativamente baja. Es decir, solo hay una probabilidad del 35 % al 39 % de que las coordenadas verdaderas de la estación B estén en el área delimitada por la elipse de error estándar.

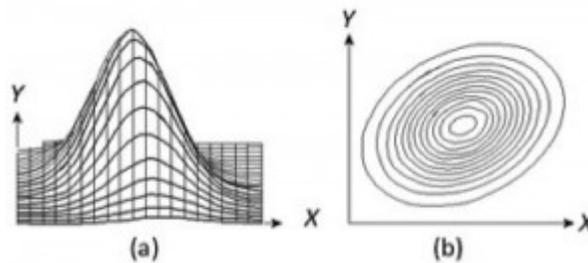


Figura 2: (a) Un diagrama de alambre de una distribución bivariada y (b) las líneas isogónicas de un gráfico de contorno de (a).

Por lo general, los estándares como los estándares ALTA/NSPS requieren un mayor nivel de confianza en la región que contiene las coordenadas reales. Esto simplemente significa que necesitamos seleccionar una probabilidad más alta de la distribución bivariada como se muestra en **la Figura 2**.

Esto se puede lograr con un multiplicador obtenido a partir del valor de distribución $F(xyHt, julio de 2016)$, y se da como en **la Ecuación 4**, donde el multiplicador depende del número de grados de libertad, o redundancias, que hay en el ajuste. Cuanto mayor sea el número de mediciones redundantes, lo que significa que cuanto mayor sea el número de comprobaciones de las mediciones, menor será el multiplicador.

Por ejemplo, suponga que el ajuste tiene cuatro observaciones redundantes. Para determinar el tamaño de la elipse de error del 95%, necesitaremos el valor crítico de la distribución F para $F_{1-0.95,2,4}$ que es 6.94. Esto significa que el multiplicador c será $\sqrt{2(6.94)} = 3.73$. Por lo tanto, utilizando S_v , que se calculó como $\pm 0,246$, el error máximo del 95 % en la estación es $\pm 0,918 (3,73 \times 0,246)$.

Ahora suponga que las coordenadas ne del plano estatal en unidades de pies para las dos estaciones en este ejemplo son (391,043.29, 2,415,776.90) y (387,603.26, 2,416,892.70). La distancia entre estas estaciones, que son esquinas de propiedad, es de 3616,46 pies. Esto significa que según los estándares ALTA/NSPS, el error máximo permitido entre estas dos estaciones es como en la **Ecuación 5** .

Obviamente, esta estación no pasó los estándares de calidad ALTA/NSPS, que solo permite que el error máximo en cualquier estación sea de $\pm 0,07$ pies + 50 ppm entre dos esquinas, o $\pm 0,19$ pies en este caso.

A menudo, los valores críticos *de F* se pueden determinar para cualquier número de grados de libertad a partir de un ajuste en las hojas de cálculo. En Microsoft Excel, el comando es “= FINV(0.05,2,dof)” donde dof es el número de grados de libertad en el ajuste, que es el número de observaciones redundantes.

Table 1 Critical *F* value and *c* multiplier for various degrees of freedom.

Degrees of Freedom (dof)	$F_{0.05,2,dof}$	<i>c</i>
3	9.55	4.371
4	6.94	3.727
5	5.79	3.402
7	4.74	3.078
10	4.10	2.865
15	3.68	2.714
20	3.49	2.643
25	3.39	2.602
50	3.18	2.523

tabla 1

La Tabla 1 enumera algunos valores críticos *de F* junto con su multiplicador *c* para varios grados de libertad. Dado que una poligonal cerrada simple solo tiene tres grados de libertad, esto significa que las poligonales de práctica estándar siempre tendrán multiplicadores de 4,371. Este multiplicador hará que cumplir con los estándares de precisión ALTA/NSPS sea extremadamente difícil de alcanzar.

Dado que el número de grados de libertad es fundamental para obtener un multiplicador *de c bajo* , le sugiero que adquiriera el hábito de obtener siempre la distancia de referencia cuando esté realizando una poligonal. Este proceso lleva muy poco tiempo extra, ya que

normalmente forma parte de la configuración del software de su controlador. Estas observaciones de distancia adicional deben ingresarse en el ajuste de mínimos cuadrados tal como se observan y no promediar con sus contrapartes directas.

Además, siempre puede cerrar el horizonte angular en cada estación poligonal para aumentar el número de observaciones de ángulo redundantes. Esto puede parecer un trabajo y un tiempo extra considerables, pero incluso para el usuario principiante no es el caso cuando se compara con el tiempo que se tarda en llegar a la estación, configurar los objetivos de referencia y de vista anterior, observar un ángulo y rasgar. bajar la configuración.

Una vez fui desafiado por un estudiante de segundo año que dijo que el jefe que tenía durante el verano nunca permitiría esto. Después de que él me molestara repetidamente, detuve la clase, obtuve el mismo tipo de estación total que había usado durante el verano, agarré dos cronómetros y cronometré al estudiante mientras observaba el primer y luego el segundo ángulo.

Para mi placer, fue extremadamente competente y rápido con el procedimiento. En total, le tomó solo dos minutos configurar el instrumento y observar los ángulos 1DR. Ahora, compare esto con el tiempo que se necesita para instalarlo, desarmarlo y viajar entre estaciones, y desafiaré a cualquiera que piense que les costará su negocio.

Parafraseando una afirmación que escuché, es extraño cómo un topógrafo toma atajos cuando observa las mediciones para ahorrar tiempo, pero no ve ningún problema en tener que regresar al campo para descubrir un error cometido la primera vez.

Estas prácticas permiten que los equipos de campo detecten sus errores antes de que se conviertan en un problema en la oficina. También proporciona al personal de la oficina controles sobre el trabajo de su equipo de campo. Pregúntese cuántas veces un equipo ha tenido que regresar al campo para corregir un error cometido anteriormente y compárelo con los segundos que lleva medir una distancia y un ángulo adicionales una vez que todo está configurado. Espero que este artículo le brinde información sobre el significado y la relevancia de una elipse de error y cómo compararla con los estándares ALTA/NSPS. Dicho de nuevo, la elipse de error proporciona una región alrededor de su estación donde residen las verdaderas coordenadas de la estación en un nivel particular de probabilidad.

La elipse de error estándar tiene una probabilidad de contener las coordenadas verdaderas de la estación solo del 35% al 39% del tiempo. Sin embargo, utilizando la distribución F , se puede determinar un multiplicador para calcular el tamaño de la elipse de error para cualquier porcentaje, incluido el 95 %, que se requiere en los estándares ALTA/NSPS.

MEDIAN vs MEAN

The mean value of numerical data is without a doubt the most commonly used statistical measure. Anyone who has a basic statistical background knows how to calculate the (arithmetic) mean – just sum up the individual values and divide the result by the number of values.

If, e.g., we talk about the average age of a group of people, we always refer to the **mean** of the individual age values. So there is also a general sense of understanding of this measure. The mean age can be interpreted as a single “**representative**” **value** describing the location of the age values of the people in this group. Therefore, in statistical language the mean is called a “location parameter”.

Sometimes the **median** is used as an alternative to the mean. Just like the mean value, the median also represents the location of a set of numerical data by means of a single number. Roughly speaking, the median is the value that **splits the individual data into two halves**: the (approximately) 50% largest and 50% lowest data in the collective.

Example

As an example, let us consider the following five measurements of systolic blood pressure (mmHg):

142, 124, 121, 151, 132.

The **mean** value is

$$(142 + 124 + 121 + 151 + 132) / 5 = 134$$

To calculate the **median**, we have to arrange the individual numbers according to their size, starting with the smallest:

121, 124, 132, 142, 151.

The median is defined as the value which is located in the middle, i.e. 132.

First we note that in this example mean and median do not differ very much, and that both can be seen as a **reasonable representative value** of the five individual measurements.

Secondly, we see why the word “**approximately**” was used for the description of the median in the above section: We cannot divide 5 numbers in two groups of exactly 50% of the data.

For an **even number of values**, however, we can: After sorting by size, the median is calculated as the mean of the two values that stand in the middle.

For

121, 124, 132, 142

the **median** is

$$(124 + 132) / 2 = 128$$

and exactly 50% of values are lower, respectively higher, than this number. In contrast to the situation of an uneven number of data values, the median is **not necessarily a data value itself**.

Mean vs. median: PROs and CONs

Now if both statistical measures, the mean and the median, are used to describe the location of a set of data, what about advantages and disadvantages?

As mentioned above, the mean is the more commonly used measure of the two. Moreover, it is the **basis of many advanced statistical methods**.

For example, the mean is needed to calculate the **standard deviation**, which is the most prominent measure to assess the variability in a set of data. And it is also needed for many **statistical testing** procedures, e.g. for the t-test.

But then, what are the advantages of the median?

To illustrate this, we return to the five systolic blood pressure values used before:

142, 124, 121, 151, 132.

We assume that 151 is a correct value, but that a device failure leads to the **false measurement** of 171. Let’s see what happens to mean and median?

The **mean** of the resulting five values now is 138 instead of 134, as calculated from the original data, thus showing a considerable **effect of the incorrect measurement**.

To derive the **median**, we sort the data again by size:

121, 124, 132, 142, 171.

As before, the value 132 is in the centre of the data row, so the median actually is **unaltered by the false measurement**.

That is why the median is called “**robust against outliers**“, whereas the mean actually is “**sensitive to outliers**“.

“Skewed” distributions

Another advantage of the median, associated with this kind of robustness, can be seen in “**skewed**” distributions.

An example for such a distribution in the context of an observational study is the time since the onset of a particular disease. In many cases, the date of diagnosis is close to the time of reporting, i.e. at or just a few days prior to the baseline visit. However, the study group often also includes patients who have been suffering from the disease for many years.

If we calculate the mean of the individual time spans since disease onset, such large values have an enormous impact, making the **mean larger than the actual distribution** of data would suggest.

The good news is that the outliers don’t have such an effect on the median. Therefore, here the median gives a more **realistic picture** of the data.

So which one should we use?

The best strategy is to calculate both measures.

If they are **not too different**, use the mean for discussion of the data, because almost everybody is familiar with it.

If both measures are considerably different, this indicates that the **data are skewed** (i.e. they are far from being normally distributed) and the median generally gives a more appropriate idea of the data distribution.

Mean versus Median comparison chart

 Edit	Mean	Median
Definition	<p>The mean is the arithmetic average of a set of numbers, or distribution. It is the most commonly used measure of central tendency of a set of numbers.</p>	<p>The median is described as the numeric value separating the higher half of a sample, a population, or a probability distribution, from the lower half.</p>
Applicability	<p>The mean is used for normal distributions.</p>	<p>The median is generally used for skewed distributions.</p>
Relevance to the data set	<p>The mean is not a robust tool since it is largely influenced by outliers.</p>	<p>The median is better suited for skewed distributions to derive at central tendency since it is much more robust and sensible.</p>
How to calculate	<p>A mean is computed by adding up all the values and dividing that score by the number of values.</p>	<p>The Median is the number found at the exact middle of the set of values. A median can be computed by listing all numbers in ascending order and then locating the number in the centre of that distribution.</p>