

I

DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS y OUTLIERS

II

DESARROLLO

INTRODUCCION.

ANALISIS DE LAS OBSERVACIONES.

ANALISIS DE LOS RESIDUALES.

TEST GLOBAL.

MODELO MATEMATICO.

TEST DE LA BONDAD DEL AJUSTE.

MODELO ESTOCASTICO

III

DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS

TEST DE BAARDA.

TEST DE POPE.

IV

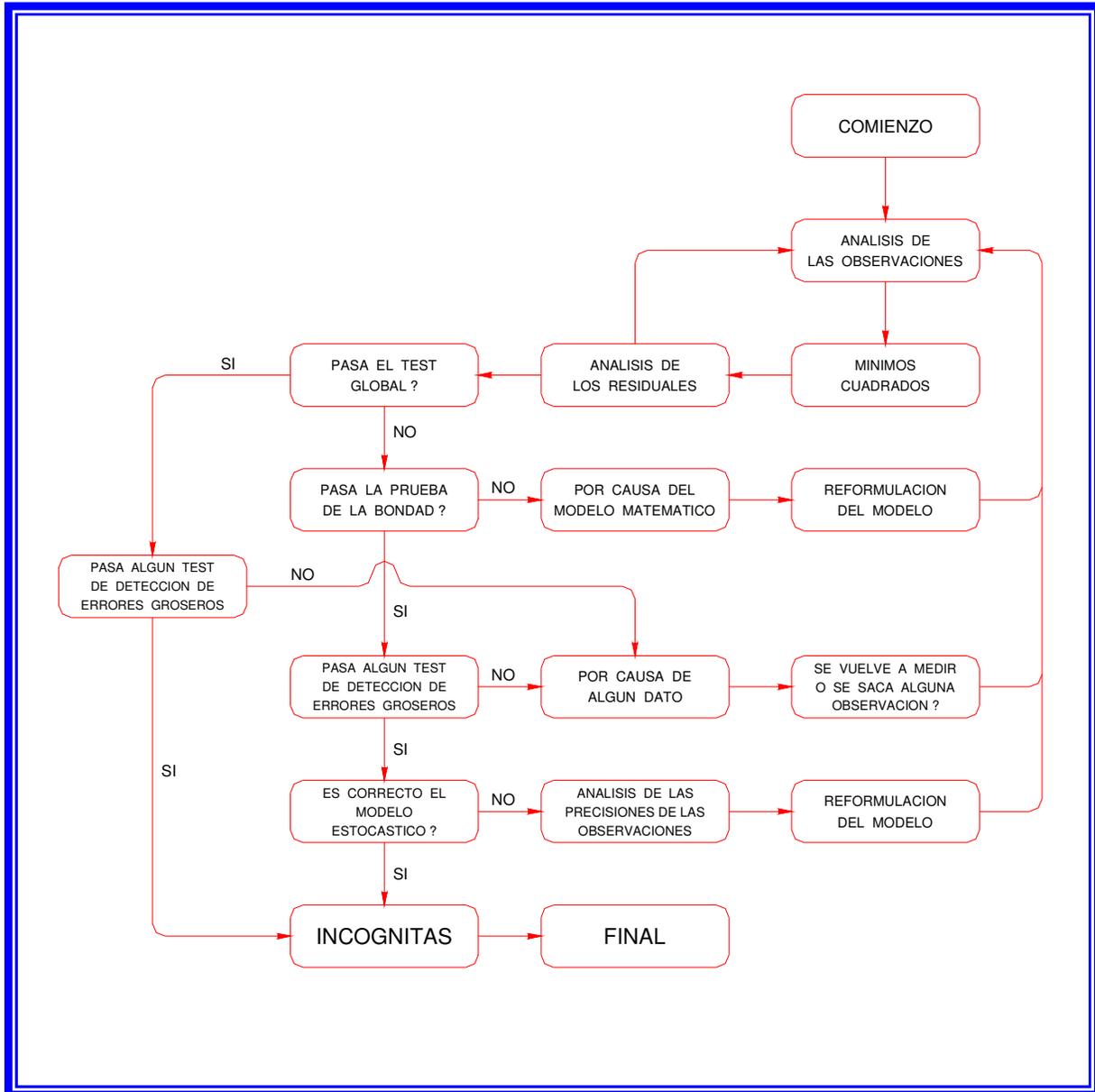
ANEXOS

EJERCICIO DE NIVELACION.

EJERCICIO DE NIVELACION CON ERROR GROSERO.

I

DIAGRAMA DE DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS



II

DESARROLLO

INTRODUCCION

Las equivocaciones en las observaciones son el resultado de errores del operario, fallas inadvertidas del equipo, etc. Los efectos de dichas equivocaciones se logran minimizar adoptando procedimientos que detecten dichas equivocaciones para poder quitarlas y así obtener un conjunto utilizable de datos.

El método de Mínimos Cuadrados se aplica ampliamente en el ajuste de dimensiones, definiendo un conjunto consistente de procedimientos matemáticos y estadísticos para encontrar ciertas incógnitas usando observaciones redundantes.

Partiendo de estas el método “encaja” una solución óptima para todas las medidas observadas, donde las incógnitas calculadas son únicas y el error posible para estas es mínimo.

Este método supone que los únicos errores que presentan las observaciones son aleatorios, ya que el método ajusta cualquier observación y si estas presentan errores de otro tipo nos llevara a resultados equivocados.

Por lo expuesto anteriormente es necesario, para obtener resultados adecuados, limpiar el conjunto de observaciones de errores groseros, como así también de posibles fallas en los modelos matemático y estocástico.

Para esto uno de los procedimientos usados es el del testeo de los resultados de un ajuste con el fin de descubrir estas incongruencias. El testeo del ajuste puede aplicarse a cualquier solución de Mínimos Cuadrados pero en el ámbito geodésico encuentra se mayor aplicación en el ajuste de redes.

Los test estadísticos se usan ampliamente para determinar si una cantidad dada (por ejemplo, el residual), es similar o significativamente diferente de alguna otra cantidad (la media o la varianza de un conjunto de residuos).

Por ejemplo se podría testear sí una medida particular es similar con la media o si debe quitarse del ajuste como una equivocación, basados en el testeo estadístico de los residuos. Los test, en general, indican si uno debe aceptar o rechazar la hipótesis nula (H_0) siendo esta una declaración que se asume como verdadera hasta que se demuestra. Recíprocamente existe una hipótesis alternativa (H_a) que será cierta si la hipótesis nula es falsa. Dentro del ajuste de redes, la comprobación estadística es usada ampliamente para la valoración de calidad de los datos.

ANÁLISIS DE LAS OBSERVACIONES

Cuando se realiza una serie de observaciones de una dimensión estas no son iguales entre si. Estas diferencias se encuentran dentro de los llamados errores aleatorios. Pero a veces suele ocurrir que alguna de las observaciones se escape de la aleatoriedad. Dichas observaciones suelen llamar la atención de un técnico entrenado ya que suelen ser muy diferentes de las demás.

Estas deben quitarse del grupo de observaciones que se va procesar ya que distorsionan los resultados induciendo errores en los cálculos. El caso anterior se trata de muchas observaciones para una misma magnitud (por lo que resulta más fácil detectar un error grosero), pero si se trata de muchas magnitudes ya no es tan fácil detectar a priori dicho error. Si bien estos datos suelen estar mal no siempre es así, por lo que no siempre se pueden quitar sin un estudio adecuado.

ANÁLISIS DE LOS RESIDUALES

Un paso posterior, luego de procesados los datos es la análisis de los residuales, surgiendo estos luego de aplicar algún método de ajuste. Si alguna observación puede considerarse como "mala" es aquella que presenta el residual más grande y que se encuentra fuera de la tolerancia preestablecida.

En caso de que se resuelva quitar dicha observación, las restantes deben procederse a reajustar ya que esta supuesta equivocación sesgo el ajuste. Pero también puede ser que el residuo sea real y no se deba quitar.

TEST GLOBAL (G)

El Test Global se lleva a cabo para probar básicamente la hipótesis de que las precisiones de las observaciones (y por consiguientes sus pesos) son consistentes con la magnitud de los residuales generados en el Ajuste de Mínimos Cuadrados, en otras palabras, el test determina si los residuales son los esperados para la precisión de las observaciones usadas.

La hipótesis nula y alternativa para la test de la varianza son como sigue,

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad \therefore \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 = 1$$

$$H_a : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \quad \therefore \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 \neq 1$$

(se asume que los residuos están normalmente distribuidos)

La varianza a posteriori que produce el ajuste indica la precisión para los resultados incorporando los residuos de las observaciones. Si la relación entre la varianza a posteriori y la varianza a priori es menor que 1 indica que las precisiones de las observaciones utilizadas en el ajuste eran mejores que las reales. Por lo contrario si la relación es mayor que 1 las precisiones de las observaciones utilizadas eran demasiado pequeñas con respecto a las reales.

El Test consiste en probar que $T = r \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2$ tiene una distribución Chi-Cuadrada con r grados de libertad, es decir, que T pertenece a un intervalo de confianza, siendo $(1-\alpha)$ el coeficiente de confianza.

Si el $\hat{\sigma}_0^2$ pertenece al semi-intervalo que tiene como extremo superior al menor valor crítico entonces, o el modelo matemático esta sobre parametrizado o las precisiones de las medidas se han desestimado. En cambio si $\hat{\sigma}_0^2$ pertenece al semi-intervalo que tiene como extremo inferior al menor valor crítico, ocurre uno de los siguientes casos:

- 1) La presencia no detectada de Errores Groseros.
- 2) El estado incompleto del Modelo Matemático (Por ejemplo: La presencia de un error sistemático residual).
- 3) Una mala asunción en las precisiones de las observaciones.

NOTA: como el caso mas importante es cuando el test falla por sobre el valor critico superior, en la mayoría de las situaciones, es mas común aplicar un test de los llamados de "una cola" para ver básicamente si $\hat{\sigma}_0^2$ es mas grande que σ_0^2 . Es decir:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$$

Sean:

- o $\hat{\sigma}_0^2$ - Varianza a posteriori.
- o σ_0^2 - Varianza a priori.
- o n - Números de observaciones.
- o n_0 - Números de parámetros.
- o r - Grados de libertad / $r = n - n_0$.

Ejemplo 1:

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\chi^2_{0.025,4} = 0.48$$

$$Q = W^{-1}$$

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \Rightarrow \Sigma_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 Q_{\Delta\Delta}$$

$$Q_{vv} = Q - BN^{-1}B^T \Rightarrow \Sigma_{vv} = \sigma_0^2 Q_{vv}$$

$$Q_{\bar{v}\bar{v}} = BN^{-1}B^T \Rightarrow \Sigma_{\bar{v}\bar{v}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{v}\bar{v}}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{v^t W v}{r}$$

$$\chi^2_{0.975,4} = 11.15$$

$$\chi^2_{0.025,4} \times \sigma_0^2 / r < \hat{\sigma}_0^2 < \chi^2_{0.975,4} \times \sigma_0^2 / r$$

$$0.0004 < \hat{\sigma}_0^2 < 0.0084$$

SE CUMPLE

Ejemplo 2 :

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.2907$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\chi^2_{0.025,4} = 0.48$$

$$\chi^2_{0.975,4} = 11.15$$

$$\chi^2_{0.025,4} \times \sigma_0^2 / r < \hat{\sigma}_0^2 < \chi^2_{0.975,4} \times \sigma_0^2 / r$$

$$0.0004 < \hat{\sigma}_0^2 < 0.0084$$

NO SE CUMPLE

MODELO MATEMATICO

Una falla en el modelo matemático es el resultado de omitir algún parámetro físico o matemático que es necesario para describir adecuadamente la relación entre las dimensiones observadas y las incógnitas. Las fallas mas frecuentes en un modelo matemático pueden ser:

- Inexacto, impropio o mal planeado.
- Baja parametrización. La baja parametrización del modelo se refiere a la insuficiente cantidad de parámetros desconocidos como para considerar los aspectos físicos de la medida, se dice en este caso que este no tiene modelados los errores sistemáticos.
- Alta parametrización. En este caso hay demasiados parámetros desconocidos en el ajuste y algunos no tienen base ni física, ni matemática.

Los errores de este tipo son descubiertos a través del test de la Bondad del Ajuste. Éste compara la distribución real de los residuos y la distribución normal. Si falla indica que los errores no se distribuyeron al azar y por lo tanto existe alguna inconsistencia en el modelo matemático.

TEST DE LA BONDAD DEL AJUSTE

Esta prueba se emplea para decidir cuando un conjunto de datos se apega a una Distribución de Probabilidad dada. En ella, se realiza una prueba entre frecuencias observadas y esperadas. Se basa en la cantidad:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k [(o_i - e_i)^2 / e_i]$$

Donde χ^2 es un valor de una variable aleatoria cuya Distribución Muestral es muy aproximada a la Distribución Chi-Cuadrada con $v = r-1$ grados de libertad. Los símbolos o_i y e_i representan las frecuencias observadas y esperadas.

El procedimiento es el siguiente:

- Se crea un intervalo formado por el menor y el mayor valor de la muestra.
- Se divide este intervalo en r subintervalos.
- Contar los elementos de la muestra que caen en estos subintervalos. Se le denomina frecuencia "o".
- Sea $Z = (A - \mu) / \sigma$

Siendo: A - borde de cada subintervalo.
 μ - Promedio de la Muestra.

σ - Desviación Estándar de la Muestra.

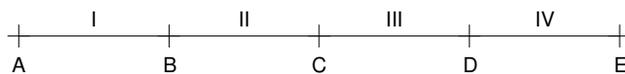
- Se halla la probabilidad de cada Z.
- En un subintervalo, sea Δ la diferencia entre cada P(Z).
- Sea $e = n \Delta$ (con n numero de observaciones).
- Se calcular χ^2 .
- Probar que χ^2 que pertenece a un intervalo de confianza, siendo $(1-\alpha)$ el coeficiente de confianza.

Ejemplo 1:

Datos:

$\mu = 0.0102$
 $\sigma = 0.0297$
 $n = 8$
 $n_0 = 4$
 $r = 4$
 $v = 3$
 $\alpha = 5 \%$
 $\chi^2_{0.025,3} = 0.22$
 $\chi^2_{0.975,3} = 9.36$

Subintervalo	DE	A	o
I	-0.0400	-0.0188	1
II	-0.0188	0.0025	2
III	0.0025	0.0238	2
IV	0.0238	0.0406	3



Borde	Z	P(Z)	Δ	e
A	-1.69	0.0455	0.1205	0.9640
B	-0.97	0.1660		0.1676
C	-0.43	0.3336	0.3336	2.6688
D	0.46	0.6672	0.1789	1.4312
E	1.02	0.8461		

$$\chi^2 = \{[(1-0.964)^2 / 0.964] + [(2-1.3408)^2 / 1.3408] + [(2-2.6688)^2 / 2.6688] + [(3-1.4312)^2 / 1.4312]\}$$

$$\chi^2 = 2.21$$

$$\chi^2_{0.025,3} < \chi^2 < \chi^2_{0.975,3}$$

$$0.22 < \chi^2 < 9.36$$

SE CUMPLE

Ejemplo 2:

Datos:

$$\mu = -0.0591$$

$$\sigma = 0.2557$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

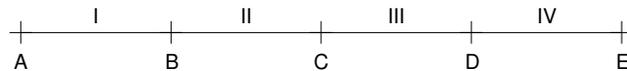
$$v = 3$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$\chi^2_{0.025,3} = 0.22$$

$$\chi^2_{0.975,3} = 9.36$$

Subintervalo	DE	A	o
I	-0.4196	-0.2349	3
II	-0.2349	-0.0502	1
III	-0.0502	0.1346	2
IV	0.1346	0.3193	2



Borde	Z	P(Z)	Δ	e
A	-1.41	0.0793	0.1658	1.3264
B	-0.69	0.2451		
C	-0.04	0.5160	0.2709	2.1672
D	0.76	0.7761	0.2604	2.0832
E	1.48	0.9306	0.1542	1.2336

$$\chi^2 = \{[(3-1.3264)^2 / 1.3264] + [(1-2.1672)^2 / 2.1672] + [(2-2.0832)^2 / 2.0832] + [(2-1.2336)^2 / 1.2336]\}$$

$$\chi^2 = 3.22$$

$$\chi^2_{0.025,3} < \chi^2 < \chi^2_{0.975,3}$$

0.22 < χ^2 < 9.36 SE CUMPLE

MODELO ESTOCASTICO

En términos generales el modelo Estocástico se refiere a las propiedades estadísticas de las dimensiones, descriptos por los coeficientes de la matriz peso usada en el ajuste. Se incluyen las relaciones entre los distintos tipos de medidas y su precisión, las magnitudes de las precisiones, los pesos relativos para los distintos tipos de medida y la presencia o ausencia de correlación.

Estos modelos pueden ser incorrectos por:

- Baja estimación de precisiones. Ocurre cuando las observaciones se realizan con una mejor precisión que lo esperado.
- Sobre estimación de precisiones. Las observaciones se hacen con una peor precisión de la esperada.

III

DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS

La detección de un error grosero es un procedimiento de control de calidad esencial en un proceso de ajuste por Mínimos Cuadrados. Básicamente los errores groseros se identifican testeando cada residuo estandarizado contra un estadístico definido. Los procedimientos de detección de errores groseros se deben aplicar solo si no se pasa el test Global, aunque deberían aplicarse siempre, ya que si pasa éste no garantiza que no existan estos errores.

La relación entre un error grosero en una observación Δl y su residual v correspondiente se obtiene a partir del ajuste de mínimos cuadrados:

$$v = Q_w \times W \times \Delta l$$

La redundancia de las observaciones r (grados de libertad) puede expresarse como la suma de los $n r_i$ donde r_i son los elementos de la diagonal de la matriz $Q_w W$ (Reliability). Los r_i expresan la contribución de cada observación l_i a la redundancia total, y mas pretenciosamente, determina la influencia Δv de un error grosero Δl de acuerdo con la relación:

$$\Delta v = - r_i \times \Delta l$$

Los r_i varían entre 0 y 1 implicando que:

Si $r_i = 0$, el error no se refleja en el residuo,

Si $r_i = 1$, todo el error se presenta en el residuo.

Los valores de r_i deben estar entre $0.3 < r_i < 0.8$.

Lo más importante de todo esto es que una alta redundancia lleva a una alta controlabilidad (controllability) de los errores groseros en las observaciones.

Los **residuos estandarizados** (v') se define como el residuo de la observación dividido por la desviación estándar del residuo:

$$v'_i = v_i / \sigma_{v_i}$$

donde:

v' = residuo estandarizado,

v = residuo calculado,

σ_v = desviación estándar del residuo.

NOTA: Si las observaciones tienen igual precisión todos los pesos serán iguales por lo que v'_i se puede calcular de esta forma:

$$v'_i = V_i / \sqrt{(\hat{\sigma}_0^2 * q_{ii})}$$

donde q_{ii} es el numero de redundancias que se obtiene de la diagonal de la matriz cofactor de los residuos (Q_{VV} , que es igual a la inversa de los pesos de los residuos).

Se utilizan los residuos estandarizados para permitir la comparación directa entre los residuos de distintas observaciones. Un valor muy alto para un residuo estandarizado indica que la observación correspondiente puede estar afectada por un error grosero.

El residuo regularizado v' se compara con distintos estadísticos procedentes de distintas distribuciones como la normal, T-Student y Tau

Este test presenta variaciones como por ejemplo el σ_{v_i} puede sustituirse por el σ_{ii} como se explica mas adelante. Además se puede hacer uso de otras distribuciones como puede ser la distribución Tau y t-Student como se ve en los test que se describen a continuación.

Como se menciona en el párrafo precedente, al computar los residuos estandarizados, la desviación estándar del residuo (σ_v) puede reemplazarse con la desviación estándar de la observación correspondiente (σ_i). Sin embargo, debido a que la desviación estándar del residuo es más pequeña que la desviación estándar de la observación,

$$|v| / \sigma_i < |v| / \sigma_v$$

el error grosero no puede rechazarse. Por lo tanto se recomienda que el nivel de significancia (α) se aumente para disminuir el nivel de confianza correspondiente

al usar la desviación estándar de la observación para la detección de las equivocaciones.

NOTA: Los test Tau utilizan la distribución Tau para calcular los valores críticos de rechazo. La distribución Tau puede derivarse de la distribución t-Student a través de la siguiente forma:

$$\tau = [(n)^{0.5} t_{n-1}] / [(n-1) + (t_{n-1}^2)]^{0.5}$$

donde

n = grados de libertad

t = valores críticos para la distribución t-Student.

Aumentando el número de redundancias en un ajuste (tomando más medidas) se aumenta la efectividad de los test, cuanto mas redundancias existan es más probable que el ajuste elimine los problemas correctamente o sea rechazara los errores groseros.

TEST DE BAARDA

Este test se encarga de comparar los residuos con la Distribución Normal, con el nivel de significancia que defina el usuario, y señala las observaciones que pueden contener un error grosero y que desvirtúan el ajuste.

Las hipótesis a plantearse son:

- **Hipótesis Nula:** no existen errores groseros y por lo tanto las observaciones están normalmente distribuidas.
- **Hipótesis Alternativa:** se detecta un error grosero.

Para aplicar este test es necesario asumir ciertas cosas:

- 1) Los residuos están normalmente distribuidos,
- 2) La desviación estándar a priori estimada (s_0).

Los residuos normalizados se van a comparar con la Cota de Cierre de Baarda que se determina con el nivel de significancia elegido por el usuario.

Una vez calculados todos los residuos normalizados se proceden a comparar con la Cota de Cierre de Baarda.

$$v'_i > \text{Cota de Cierre de Baarda} = N_{1-\alpha/2} \text{ (Estandarizada)}$$

Se procederá a rechazar la observación que presente el residuo normalizado mayor y que supere la Cota establecida.

El procedimiento General es iterativo debiéndose seguir los siguientes pasos:

- 1) Se localizan los v'_i que sean mayores a Cota de Cierre de Baarda,
- 2) Se quita él v'_i más grande,
- 3) Se realiza nuevamente el ajuste,
- 4) Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que no existan errores groseros.

Ejemplo 1:

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha = 5 \%$$

RESIDUOS	VALOR
VAB	1.6911
VAC	0.4668
VAD	1.2432
VAE	0.3786
VBC	0.6864
VCD	0.3171
VED	1.0445
VBE	1.3366

$$\text{Estadístico} = N_{1-\alpha/2} = 1.96$$

NO SE DETECTA NINGUN ERROR GROSERO

Ejemplo 2:

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.2907$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha = 5 \%$$

RESIDUOS	VALOR
VAB	19.6560
VAC	10.9583
VAD	3.5219
VAE	8.0622
VBC	13.5336
VCD	3.8636
VED	0.1053
VBE	8.9800

$$\text{Estadístico} = N_{1-\alpha/2} = 1.96$$

SE DEBE ELIMINAR EL VALOR MAS ALTO Y REPETIR EL METODO

TEST DE POPE

Este test estadístico también se usa para la detección de errores groseros pero se utiliza cuando falla el test Global, apoyándose en la Distribución t-Student. Las hipótesis a plantearse son las mismas que para el Test de Baarda. Por el contrario, Pope considera que la varianza a priori (s_0^2) no es conocida. Para realizar este calculo es necesario contar con la matriz covarianza de los residuales que se obtiene de la propagación de la varianza (Q_{VV}). Se calculan los residuos normalizados v_i / s_{vi} donde s_{vi} es la raíz cuadrada de la diagonal de la matriz cofactor de los residuos multiplicados por $(\sqrt{v^T P V}) / n$.

El estadístico para Pope es el siguiente:

$$v'_i = V_i / s_{vi} > \tau_{\alpha 0}$$

Si se cumple esta desigualdad la i-esima observación es un error grosero.

Los elementos de la ecuación anterior son:

- α nivel de significancia,
- $\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha/2)^{1/n}$,
- n cantidad de observaciones,
- r grados de libertad del ajuste,
- τ_{α_0} es el valor de la distribución Tau para un nivel de confianza de $(1 - \alpha/2)$ y grados de libertad r .

Para obtener observaciones libres de errores groseros se sigue un procedimiento general similar al descrito para el Test de Baarda.

Ejemplo 1:

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha_0 = 0.00639$$

$$\alpha = 5 \%$$

RESIDUOS	VALOR
VAB	1.6636
VAC	0.4592
VAD	1.2230
VAE	0.3724
VBC	0.6753
VCD	0.3120
VED	1.0275
VBE	1.3149

$$\text{Estadístico} = \tau_{\alpha_0} = 1.907$$

NO SE DETECTA NINGUN ERROR GROSERO

Ejemplo 2:

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.2907$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha_0 = 0.00639$$

$$\alpha = 5 \%$$

RESIDUOS	VALOR
VAB	1.9968
VAC	1.1132
VAD	0.3578
VAE	0.8190
VBC	1.3748
VCD	0.3925
VED	0.0107
VBE	0.9123

$$\text{Estadístico} = \tau_{\alpha_0} = 1.907$$

SE DETECTA UN ERROR GROSERO (En la Observación AB)

NOTA: A partir de que se detectó un error grosero, se continua de acuerdo al esquema general descrito en el Test de Baarda.

NOTA :

El impacto que puede tener un error grosero en el calculo de cierto parámetro puede variar significativamente. Por ejemplo en ajuste muy "sensible" no tolerará un error grosero pequeño porque su efecto se amplificara en este, por otro lado se pueden tolerar errores más grandes si ellos tienen un impacto marginal en el ajuste.

Se puede definir **Errores Detectables Marginales** (MDE) como el mínimo error detectado como error grosero, cualquier error por debajo de este permanecerá no detectado y por lo tanto afecta los resultados.

En relación con esto puede definirse la "internal reliability" como el valor mínimo en un error grosero que puede detectado, esta se encuentra determinada por los MDE y un ajuste puede considerarse fiable cuanto más pequeño es el MDE.

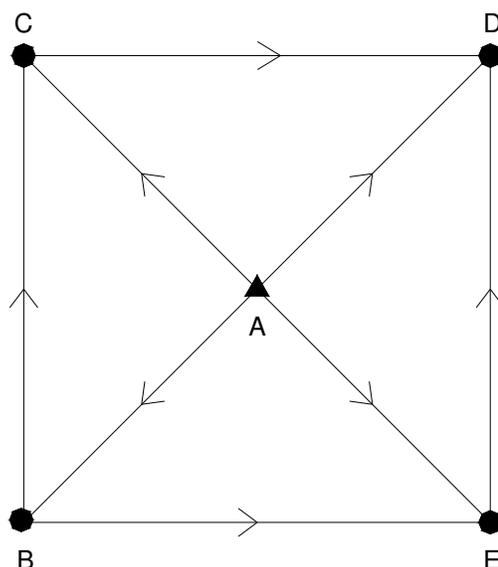
Así mismo se define "external reliability" como el efecto que produce un error grosero no detectado en el calculo de las incógnitas.

Algo más importante que la aplicación de los distintos test para detectar los errores groseros es diseñar la recolección de observaciones con una redundancia tal para asegurar un nivel alto de controlabilidad (controllability) tal que el impacto de un error grosero se minimice.

ANEXOS

EJERCICIO DE NIVELACION

Compensar la siguiente Red, determinando las cotas compensadas de todas las estaciones.



Tramo	Dist. (km)	Δh (m)
AB	4	12.48
BE	8	4.53
AE	5	17.10
BC	3	-6.84
AC	6	5.70
CD	12	-8.22
AD	8	-2.48
ED	10	-19.65

Cota A: 53.80m

$\sigma_{\text{lectura mira}} = 0.005\text{m}$

$d_{\text{mira atrás-mira adelante}} = 100\text{m}$

Resolución

Determinación del número de observaciones redundantes.

$$\left. \begin{array}{l} n = 8 \\ n_0 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow r = n - n_0 \Rightarrow r = 4$$

Ecuaciones de condición.

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} + \overline{BE} - \overline{AE} = 0 & V_{AB} + V_{BE} - V_{AE} = AE - AB - BE = 0.09 \\ \overline{AE} + \overline{ED} - \overline{AD} = 0 & V_{AE} + V_{ED} - V_{AD} = AD - AE - ED = 0.07 \\ \overline{AC} + \overline{CD} - \overline{AD} = 0 & V_{AC} + V_{CD} - V_{AD} = AD - AC - CD = 0.04 \\ \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0 & V_{AB} + V_{BC} - V_{AC} = AC - AB - BC = 0.06 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} V_{AB} \\ V_{AC} \\ V_{AD} \\ V_{AE} \\ V_{BC} \\ V_{CD} \\ V_{ED} \\ V_{BE} \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.07 \\ 0.04 \\ 0.06 \end{bmatrix}}_f \Rightarrow A \cdot v = f$$

$$w_i = \frac{d_0}{d_i} \quad d_0 = 12 \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030 \text{ (Para } W = 1)$$

Algoritmo:

$$Q = W^{-1}$$

$$Q_E = A * Q * A^t$$

$$k = Q_E^{-1} * f$$

$$v = Q * A^t * k$$

$$v_{AB} = 0.0361$$

$$v_{AC} = -0.0136$$

$$v_{AD} = -0.0401$$

$$v_{AE} = -0.0088$$

$$v_{BC} = 0.0102$$

$$v_{CD} = 0.0136$$

$$v_{ED} = 0.0387$$

$$v_{BE} = 0.0451$$

$$\overline{AB} = 12.48 + v_{AB} = 12.52$$

$$\overline{AC} = 5.70 + v_{AC} = 5.69$$

$$\overline{AD} = -2.48 + v_{AD} = -2.52$$

$$\overline{AE} = 17.10 + v_{AE} = 17.09$$

$$A = 53.80$$

$$B = 66.32$$

$$C = 59.49$$

$$D = 51.28$$

$$E = 70.89$$

De los v_i tenemos:

$$\mu = 0.0102$$

$$\sigma = 0.0297$$

Análisis de errores.

Estación A fija. Cota: 53.80m $\Rightarrow \sigma_A = 0$

$$C_B = C_A + \Delta h_{AB}$$

$$\sigma_B^2 = \sigma_A^2 + \sigma_{\Delta h}^2 = \sigma_{\Delta h}^2$$

$$C_C = C_A + \Delta h_{AC}$$

$$\sigma_C^2 = \sigma_{\Delta h}^2$$

$$C_D = C_A + \Delta h_{AD}$$

$$\sigma_D^2 = \sigma_{\Delta h}^2$$

$$C_E = C_A + \Delta h_{AE}$$

$$\sigma_E^2 = \sigma_{\Delta h}^2$$

$$\sigma_{\Delta h} = \sigma_{\text{mira}} \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\Delta h} = 0.005 \sqrt{n}$$

$$\sigma_{AB} = 0.005 \sqrt{40} = 0.0316$$

$$\sigma_{AC} = 0.005 \sqrt{60} = 0.0387$$

$$\sigma_{AD} = 0.005 \sqrt{80} = 0.0447$$

$$\sigma_{AE} = 0.005 \sqrt{50} = 0.0354$$

$$\sigma_{BC} = 0.005 \sqrt{30} = 0.0274$$

$$\sigma_{CD} = 0.005 \sqrt{120} = 0.0548$$

$$\sigma_{ED} = 0.005 \sqrt{100} = 0.0500$$

$$\sigma_{BE} = 0.005 \sqrt{80} = 0.0447$$

Algoritmo de propagación de cofactores:

$$Q_{vv} = Q^* A^t * Q_E^{-1} * A * Q$$

$$Q_{\bar{ii}} = Q - Q_{vv}$$

$$\sum_{\bar{ii}} = \hat{\sigma}_0^2 * Q_{\bar{ii}}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^t * W * v}{r}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$Q_{vv} = \begin{bmatrix} 0.1519 & -0.1110 & -0.0512 & -0.0654 & 0.0704 & 0.0598 & 0.0142 & 0.1160 \\ -0.1110 & 0.2830 & -0.0749 & -0.0503 & -0.1060 & 0.1420 & -0.0247 & 0.0607 \\ -0.0512 & -0.0749 & 0.3468 & -0.0903 & -0.0237 & -0.2449 & -0.2295 & -0.0391 \\ -0.0654 & -0.0503 & -0.0903 & 0.1801 & 0.0151 & -0.0400 & 0.1463 & -0.1712 \\ 0.0704 & -0.1060 & -0.0237 & 0.0151 & 0.0736 & 0.0823 & -0.0389 & -0.0553 \\ 0.0598 & 0.1420 & -0.2449 & -0.0400 & 0.0823 & 0.6131 & -0.2048 & -0.0998 \\ 0.0142 & -0.0247 & -0.2295 & 0.1463 & -0.0389 & -0.2048 & 0.4576 & 0.1321 \\ 0.1160 & 0.0607 & -0.0391 & -0.1712 & -0.0553 & -0.0998 & 0.1321 & 0.3795 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\bar{ii}} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0002 & -0.0002 & -0.0002 & 0.0000 & -0.0004 \\ 0.0003 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0003 & -0.0004 & 0.0001 & -0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0010 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0007 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0003 & 0.0007 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0005 & 0.0005 \\ -0.0002 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0005 & -0.0003 & 0.0001 & 0.0002 \\ -0.0002 & -0.0004 & 0.0008 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0012 & 0.0006 & 0.0003 \\ -0.0000 & 0.0001 & 0.0007 & -0.0005 & 0.0001 & 0.0006 & 0.0012 & -0.0004 \\ -0.0004 & -0.0002 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0002 & 0.0003 & -0.0004 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= 0.0237 = \sigma_B \\ \sigma_{AC} &= 0.0259 = \sigma_C \\ \sigma_{AD} &= 0.0314 = \sigma_D \\ \sigma_{AE} &= 0.0270 = \sigma_E \\ \sigma_{BC} &= 0.0233 \\ \sigma_{CD} &= 0.0345 \\ \sigma_{ED} &= 0.0340 \\ \sigma_{BE} &= 0.0298 \end{aligned}$$

TEST GLOBAL

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$\sigma_0^2 = 0.0068$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\chi^2_{0.025,4} = 0.48$$

$$\chi^2_{0.975,4} = 11.15$$

$$\chi^2_{0.025,4} \times \sigma_0^2 / r < \hat{\sigma}_0^2 < \chi^2_{0.975,4} \times \sigma_0^2 / r$$

$$0.0004 < \hat{\sigma}_0^2 < 0.0084$$

SE CUMPLE

TEST DE LA BONDAD DEL AJUSTE

Datos:

$$\mu = 0.0102$$

$$\sigma = 0.0297$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

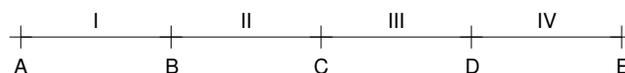
$$v = 3$$

$$\alpha = 5\%$$

$$\chi^2_{0.025,3} = 0.22$$

$$\chi^2_{0.975,3} = 9.36$$

Subintervalo	DE	A	o
I	-0.0400	-0.0188	1
II	-0.0188	0.0025	2
III	0.0025	0.0238	2
IV	0.0238	0.0406	3



Borde	Z	P(Z)	Δ	e
A	-1.69	0.0455	0.1205	0.9640
B	-0.97	0.1660	0.1676	1.3408
C	-0.43	0.3336	0.3336	2.6688
D	0.46	0.6672	0.1789	1.4312
E	1.02	0.8461		

$$\chi^2 = \{[(1-0.964)^2 / 0.964] + [(2-1.3408)^2 / 1.3408] + [(2-2.6688)^2 / 2.6688] + [(3-1.4312)^2 / 1.4312]\}$$

$$\chi^2 = 2.21$$

$$\chi^2_{0.025,3} < \chi^2 < \chi^2_{0.975,3}$$

$$0.22 < \chi^2 < 9.36$$

SE CUMPLE

TEST DE BAARDA

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha = 5 \%$$

RESIDUOS	VALOR
VAB	1.6911
VAC	0.4668
VAD	1.2432
VAE	0.3786
VBC	0.6864
VCD	0.3171
VED	1.0445
VBE	1.3366

$$\text{Estadístico} = N_{1-\alpha/2} = 1.96$$

NO SE DETECTA NINGUN ERROR GROSERO

TEST DE POPE

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.0031$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha_0 = 0.00639$$

$$\alpha = 5\%$$

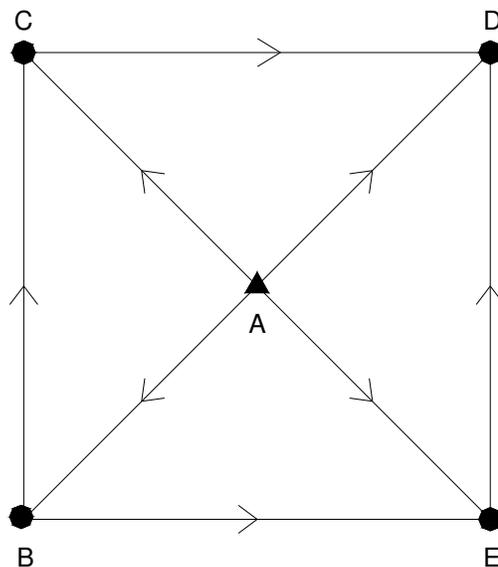
RESIDUOS	VALOR
VAB	1.6636
VAC	0.4592
VAD	1.2230
VAE	0.3724
VBC	0.6753
VCD	0.3120
VED	1.0275
VBE	1.3149

$$\text{Estadístico} = \tau_{\alpha_0} = 1.907$$

NO SE DETECTA NINGUN ERROR GROSERO

EJERCICIO DE NIVELACION CON ERRORES GROSEROS

Compensar la siguiente Red, determinando las cotas compensadas de todas las estaciones.



Tramo	Dist. (km)	Δh (m)
AB	4	13.48
BE	8	4.53
AE	5	17.10
BC	3	-6.84
AC	6	5.70
CD	12	-8.22
AD	8	-2.48
ED	10	-19.65

Cota A: 53.80m

$\sigma_{\text{lectura mira}} = 0.005\text{m}$

$d_{\text{mira atrás-mira adelante}} = 100\text{m}$

Resolución

Determinación del número de observaciones redundantes.

$$\left. \begin{array}{l} n = 8 \\ n_0 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow r = n - n_0 \Rightarrow r = 4$$

Ecuaciones de condición.

$$\begin{array}{ll} \overline{AB} + \overline{BE} - \overline{AE} = 0 & V_{AB} + V_{BE} - V_{AE} = AE - AB - BE = -0.91 \\ \overline{AE} + \overline{ED} - \overline{AD} = 0 & V_{AE} + V_{ED} - V_{AD} = AD - AE - ED = 0.07 \\ \overline{AC} + \overline{CD} - \overline{AD} = 0 & V_{AC} + V_{CD} - V_{AD} = AD - AC - CD = 0.04 \\ \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0 & V_{AB} + V_{BC} - V_{AC} = AC - AB - BC = -0.94 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} V_{AB} \\ V_{AC} \\ V_{AD} \\ V_{AE} \\ V_{BC} \\ V_{CD} \\ V_{ED} \\ V_{BE} \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.91 \\ 0.07 \\ 0.04 \\ -0.94 \end{bmatrix}}_f \Rightarrow A.v = f$$

$$w_i = \frac{d_0}{d_i} \quad d_0 = 12 \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030 \text{ (Para } W = 1)$$

Algoritmo:

$$Q = W^{-1}$$

$$Q_E = A * Q * A^t$$

$$k = Q_E^{-1} * f$$

$$v = Q * A^t * k$$

$$\begin{aligned} v_{AB} &= -0.4196 \\ v_{AC} &= 0.3193 \\ v_{AD} &= 0.1136 \\ v_{AE} &= 0.1874 \\ v_{BC} &= -0.2011 \\ v_{CD} &= -0.1657 \\ v_{ED} &= -0.0039 \\ v_{BE} &= -0.3030 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 12.48 + v_{AB} = 12.06 \\ \overline{AC} &= 5.70 + v_{AC} = 6.02 \\ \overline{AD} &= -2.48 + v_{AD} = -2.37 \\ \overline{AE} &= 17.10 + v_{AE} = 17.29 \end{aligned}$$

$A = 53.80$
$B = 65.86$
$C = 59.82$
$D = 51.43$
$E = 71.09$

De los v_i tenemos:

$$\begin{aligned} \mu &= -0.0591 \\ \sigma &= 0.2557 \end{aligned}$$

Análisis de errores.

Estación A fija. Cota: 53.80m $\Rightarrow \sigma_A = 0$

$$\begin{aligned} C_B &= C_A + \Delta h_{AB} & \sigma_B^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_{\Delta h}^2 = \sigma_{\Delta h}^2 \\ C_C &= C_A + \Delta h_{AC} & \sigma_C^2 &= \sigma_{\Delta h}^2 \\ C_D &= C_A + \Delta h_{AD} & \sigma_D^2 &= \sigma_{\Delta h}^2 \\ C_E &= C_A + \Delta h_{AE} & \sigma_E^2 &= \sigma_{\Delta h}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta h} &= \sigma_{lmira} \sqrt{n} \\ \Rightarrow \sigma_{\Delta h} &= 0.005 \sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= 0.005 \sqrt{40} = 0.031623 \\ \sigma_{AC} &= 0.005 \sqrt{60} = 0.038730 \\ \sigma_{AD} &= 0.005 \sqrt{80} = 0.044721 \\ \sigma_{AE} &= 0.005 \sqrt{50} = 0.035355 \\ \sigma_{BC} &= 0.005 \sqrt{30} = 0.027386 \\ \sigma_{CD} &= 0.005 \sqrt{120} = 0.054772 \\ \sigma_{ED} &= 0.005 \sqrt{100} = 0.05 \\ \sigma_{BE} &= 0.005 \sqrt{80} = 0.044721 \end{aligned}$$

Algoritmo de propagación de cofactores:

$$\begin{aligned} Q_{vv} &= Q^* A^t * Q_E^{-1} * A * Q \\ Q_{\bar{ii}} &= Q - Q_{vv} \\ \sum_{\bar{ii}} &= \sigma_0^2 * Q_{\bar{ii}} \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{v^t * W * v}{r} \\ \hat{\sigma}_0^2 &= 0.2907 \end{aligned}$$

$$Q_{vv} = \begin{bmatrix} 0.1519 & -0.1110 & -0.0512 & -0.0654 & 0.0704 & 0.0598 & 0.0142 & 0.1160 \\ -0.1110 & 0.2830 & -0.0749 & -0.0503 & -0.1060 & 0.1420 & -0.0247 & 0.0607 \\ -0.0512 & -0.0749 & 0.3468 & -0.0903 & -0.0237 & -0.2449 & -0.2295 & -0.0391 \\ -0.0654 & -0.0503 & -0.0903 & 0.1801 & 0.0151 & -0.0400 & 0.1463 & -0.1712 \\ 0.0704 & -0.1060 & -0.0237 & 0.0151 & 0.0736 & 0.0823 & -0.0389 & -0.0553 \\ 0.0598 & 0.1420 & -0.2449 & -0.0400 & 0.0823 & 0.6131 & -0.2048 & -0.0998 \\ 0.0142 & -0.0247 & -0.2295 & 0.1463 & -0.0389 & -0.2048 & 0.4576 & 0.1321 \\ 0.1160 & 0.0607 & -0.0391 & -0.1712 & -0.0553 & -0.0998 & 0.1321 & 0.3795 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\bar{ii}} = \begin{bmatrix} 0.0527 & 0.0323 & 0.0149 & 0.0190 & -0.0205 & -0.0174 & -0.0041 & -0.0337 \\ 0.0323 & 0.0631 & 0.0218 & 0.0146 & 0.0308 & -0.0413 & 0.0072 & -0.0176 \\ 0.0149 & 0.0218 & 0.0930 & 0.0263 & 0.0069 & 0.0712 & 0.0667 & 0.0114 \\ 0.0190 & 0.0146 & 0.0263 & 0.0688 & -0.0044 & 0.0116 & -0.0425 & 0.0498 \\ -0.0205 & 0.0308 & 0.0069 & -0.0044 & 0.0513 & -0.0239 & 0.0113 & 0.0161 \\ -0.0174 & -0.0413 & 0.0712 & 0.0116 & -0.0239 & 0.1125 & 0.0595 & 0.0290 \\ -0.0041 & 0.0072 & 0.0667 & -0.0425 & 0.0113 & 0.0595 & 0.1092 & -0.0384 \\ -0.0337 & -0.0176 & 0.0114 & 0.0498 & 0.0161 & 0.0290 & -0.0384 & 0.0835 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= 0.2296 = \sigma_B \\ \sigma_{AC} &= 0.2512 = \sigma_C \\ \sigma_{AD} &= 0.3050 = \sigma_D \\ \sigma_{AE} &= 0.2633 = \sigma_E \\ \sigma_{BC} &= 0.2265 \\ \sigma_{CD} &= 0.3354 \\ \sigma_{ED} &= 0.3305 \\ \sigma_{BE} &= 0.2890 \end{aligned}$$

TEST GLOBAL

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.2907$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\chi^2_{0.025,4} = 0.48$$

$$\chi^2_{0.975,4} = 11.15$$

$$\chi^2_{0.025,4} \times \sigma_0^2 / r < \hat{\sigma}_0^2 < \chi^2_{0.975,4} \times \sigma_0^2 / r$$

$$0.0004 < \hat{\sigma}_0^2 < 0.0084$$

NO SE CUMPLE

TEST DE LA BONDAD DEL AJUSTE

Datos:

$$\mu = -0.0591$$

$$\sigma = 0.2557$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

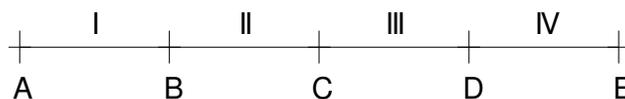
$$v = 3$$

$$\alpha = 5\%$$

$$\chi^2_{0.025,3} = 0.22$$

$$\chi^2_{0.975,3} = 9.36$$

Subintervalo	DE	A	o
I	-0.4196	-0.2349	3
II	-0.2349	-0.0502	1
III	-0.0502	0.1346	2
IV	0.1346	0.3193	2



Borde	Z	P(Z)	Δ	e
A	-1.41	0.0793	0.1658	1.3264
B	-0.69	0.2451	0.2709	2.1672
C	-0.04	0.5160	0.2604	2.0832
D	0.76	0.7761		
E	1.48	0.9306	0.1542	1.2336

$$\chi^2 = \{[(3-1.3264)^2/ 1.3264] + [(1-2.1672)^2/ 2.1672] + [(2-2.0832)^2/ 2.0832] + [(2-1.2336)^2/ 1.2336]\}$$

$$\chi^2 = 3.22$$

$$\chi^2_{0.025,3} < \chi^2 < \chi^2_{0.975,3}$$

$$0.22 < \chi^2 < 9.36$$

SE CUMPLE

TEST DE BAARDA

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.2907$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha = 5 \%$$

RESIDUOS	VALOR
VAB	19.6560
VAC	10.9583
VAD	3.5219
VAE	8.0622
VBC	13.5336
VCD	3.8636
VED	0.1053
VBE	8.9800

$$\text{Estadístico} = N_{1-\alpha/2} = 1.96$$

SE DEBE ELIMINAR EL VALOR MAS ALTO Y REPETIR EL METODO

TEST DE POPE

Datos:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.2907$$

$$\sigma_0^2 = 0.0030$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

$$\alpha_0 = 0.00639$$

$$\alpha = 5\%$$

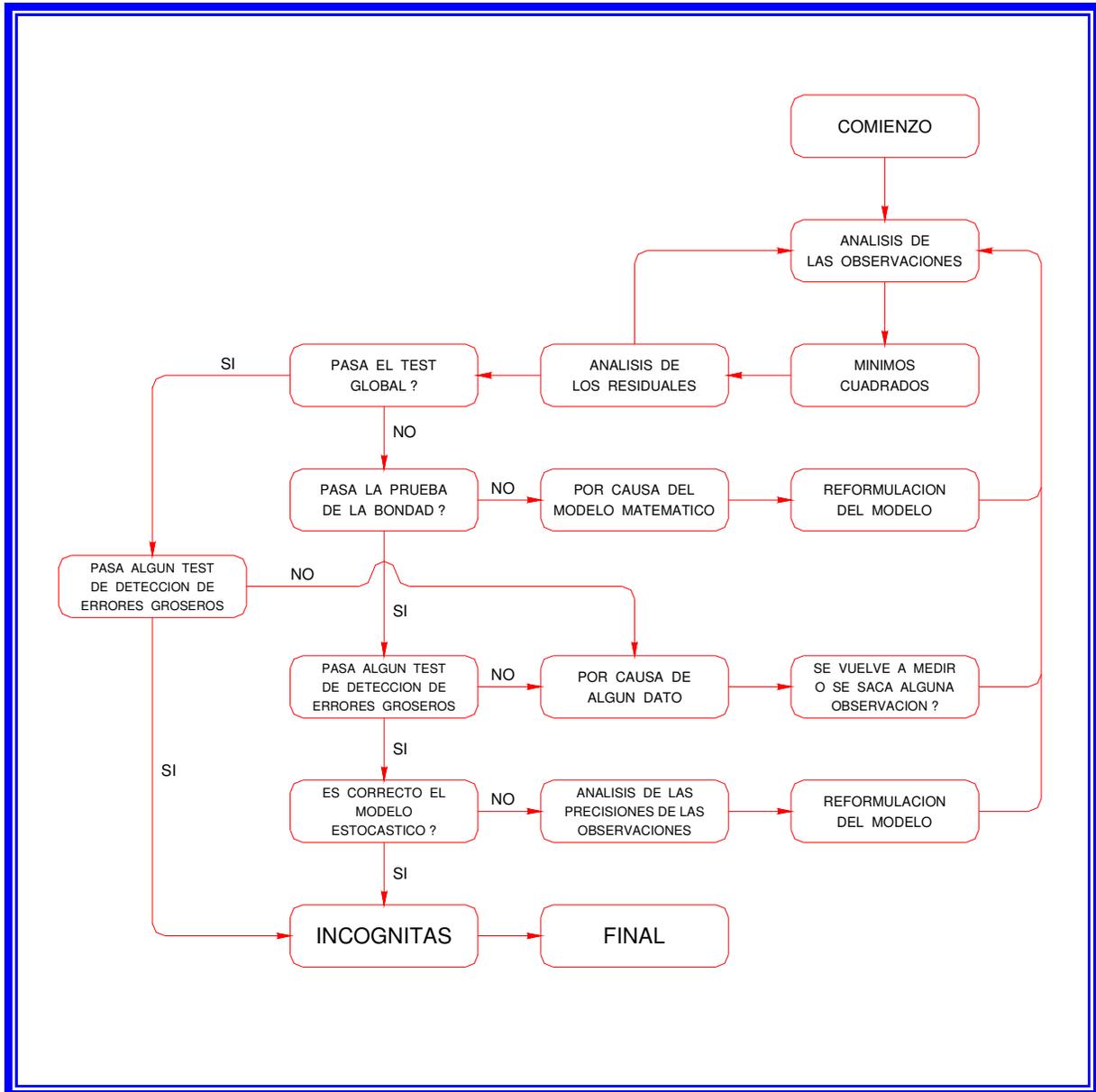
RESIDUOS	VALOR
VAB	1.9968
VAC	1.1132
VAD	0.3578
VAE	0.8190
VBC	1.3748
VCD	0.3925
VED	0.0107
VBE	0.9123

$$\text{Estadístico} = \tau_{\alpha_0} = 1.907$$

SE DETECTA UN ERROR GROSERO (En la Observación AB)

RESUMEN FINAL

DIAGRAMA DE DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS



TEST GLOBAL

El Test Global determina si los residuales son los esperados para la precisión de las observaciones usadas.

La hipótesis nula y alternativa para la test de la varianza son como sigue,

$$H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad \therefore \quad \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 = 1$$

$$H_a: \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \quad \therefore \quad \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 \neq 1$$

(se asume que los residuos están normalmente distribuidos)

La varianza a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) indica la precisión para los resultados incorporando los residuales de las observaciones:

- Si $\hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 < 1$ - Las precisiones de las observaciones utilizadas en el ajuste eran mejores que las reales.
- Si $\hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 > 1$ - Las precisiones de las observaciones utilizadas eran demasiado pequeñas con respecto a las reales.

El Test consiste en probar que $T = r \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2$ tiene una distribución Chi-Cuadrada con r grados de libertad, es decir, que T pertenece a un intervalo de confianza, siendo $(1-\alpha)$ el coeficiente de confianza.

$$\chi^2_{0.025,4} < r \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 < \chi^2_{0.975,4}$$

$$\chi^2_{0.025,4} \times \sigma_0^2 / r < \hat{\sigma}_0^2 < \chi^2_{0.975,4} \times \sigma_0^2 / r$$

Si el $\hat{\sigma}_0^2$ pertenece al semi-intervalo que tiene como extremo superior al menor valor crítico entonces, o el modelo matemático esta sobre parametrizado o las precisiones de las medidas se han desestimado. En cambio si $\hat{\sigma}_0^2$ pertenece al semi-intervalo que tiene como extremo inferior al menor valor crítico, ocurre uno de los siguientes casos:

- 4) La presencia no detectada de Errores Groseros.
- 5) El estado incompleto del Modelo Matemático (Por ejemplo: La presencia de un error sistemático residual).
- 6) Una mala asunción en las precisiones de las observaciones.

TEST DE LA BONDAD DEL AJUSTE

Esta prueba se emplea para decidir cuando un conjunto de datos se apega a una Distribución de Probabilidad dada. En ella, se realiza una prueba entre frecuencias observadas y esperadas. Se basa en la cantidad:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k [(o_i - e_i)^2 / e_i]$$

Donde χ^2 es un valor de una variable aleatoria cuya Distribución Muestral es muy aproximada a la Distribución Chi-Cuadrada con $v = r-1$ grados de libertad. Los símbolos o_i y e_i representan las frecuencias observadas y esperadas.

El procedimiento es el siguiente:

- Se crea un intervalo formado por el menor y el mayor valor de la muestra.
- Se divide este intervalo en r subintervalos.
- Contar los elementos de la muestra que caen en estos subintervalos. Se le denomina frecuencia "o".
- Sea $Z = (A - \mu) / \sigma$

Siendo: A - borde de cada subintervalo.

μ - Promedio de la Muestra.

σ - Desviación Estándar de la Muestra.

- Se halla la probabilidad de cada Z.
- En un subintervalo, sea Δ la diferencia entre cada $P(Z)$.
- Sea $e = n \Delta$ (con n numero de observaciones).
- Se calcular χ^2 .
- Probar que χ^2 que pertenece a un intervalo de confianza, siendo $(1-\alpha)$ el coeficiente de confianza.

Ejemplo 1:

Datos:

$$\mu = 0.0102$$

$$\sigma = 0.0297$$

$$n = 8$$

$$n_0 = 4$$

$$r = 4$$

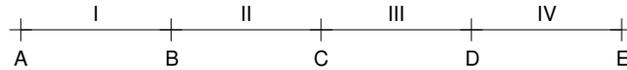
$$v = 3$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$\chi^2_{0.025,3} = 0.22$$

$$\chi^2_{0.975,3} = 9.36$$

Subintervalo	DE	A	o
I	-0.0400	-0.0188	1
II	-0.0188	0.0025	2
III	0.0025	0.0238	2
IV	0.0238	0.0406	3



Borde	Z	P(Z)	Δ	e
A	-1.69	0.0455	0.1205	0.9640
B	-0.97	0.1660	0.1676	1.3408
C	-0.43	0.3336	0.3336	2.6688
D	0.46	0.6672	0.3336	2.6688
E	1.02	0.8461	0.1789	1.4312

$$\chi^2 = \{[(1-0.964)^2 / 0.964] + [(2-1.3408)^2 / 1.3408] + [(2-2.6688)^2 / 2.6688] + [(3-1.4312)^2 / 1.4312]\}$$

$$\chi^2 = 2.21$$

$$\chi^2_{0.025,3} < \chi^2 < \chi^2_{0.975,3}$$

$$0.22 < \chi^2 < 9.36$$

SE CUMPLE

DETECCIÓN DE ERRORES GROSEROS

La detección de un error grosero es un procedimiento de control de calidad esencial en un proceso de ajuste por Mínimos Cuadrados. Los procedimientos de detección de errores groseros se deben aplicar solo si no se pasa el test Global, aunque deberían aplicarse siempre, ya que si pasa éste no garantiza que no existan estos errores.

Los **residuos estandarizados** (v') se define como el residuo de la observación dividido por la desviación estándar del residuo:

$$v'_i = v_i / \sigma_{vi}$$

donde:

v' = residuo estandarizado,

v = residuo calculado,

σ_v = desviación estándar del residuo.

NOTA: Si las observaciones tienen igual precisión todos los pesos serán iguales por lo que v'_i se puede calcular de esta forma:

$$v'_i = V_i / \sqrt{(\hat{\sigma}_0^2 * q_{ii})}$$

donde q_{ii} es el numero de redundancias que se obtiene de la diagonal de la matriz cofactor de los residuos (Q_{VV} , que es igual a la inversa de los pesos de los residuos).

Aumentando el número de redundancias en un ajuste (tomando más medidas) se aumenta la efectividad de los test, cuanto mas redundancias existan es más probable que el ajuste elimine los problemas correctamente o sea rechazara los errores groseros.

TEST DE BAARDA

Este test se encarga de comparar los residuos con la Distribución Normal, con el nivel de significancia que defina el usuario, y señala las observaciones que pueden contener un error grosero y que desvirtúan el ajuste.

Las hipótesis a plantearse son:

- **Hipótesis Nula:** no existen errores groseros y por lo tanto las observaciones están normalmente distribuidas.
- **Hipótesis Alternativa:** se detecta un error grosero.

Para aplicar este test es necesario asumir ciertas cosas:

- 1) Los residuos están normalmente distribuidos,
- 2) La desviación estándar a priori estimada (s_0).

Los residuos normalizados se van a comparar con la Cota de Cierre de Baarda que se determina con el nivel de significancia elegido por el usuario.

Una vez calculados todos los residuos normalizados se proceden a comparar con la Cota de Cierre de Baarda.

$$v'_i > \text{Cota de Cierre de Baarda} = N_{1-\alpha/2} \text{ (Estandarizada)}$$

Se procederá a rechazar la observación que presente el residuo normalizado mayor y que supere la Cota establecida.

El procedimiento General es iterativo debiéndose seguir los siguientes pasos:

- 1) Se localizan los v'_i que sean mayores a Cota de Cierre de Baarda,
- 2) Se quita el v'_i más grande,
- 3) Se realiza nuevamente el ajuste,
- 4) Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que no existan errores groseros.

TEST DE POPE

Este test estadístico también se usa para la detección de errores groseros pero se utiliza cuando falla el test Global, apoyándose en la Distribución t-Student. Las hipótesis a plantearse son las mismas que para el Test de Baarda. Por el contrario, Pope considera que la varianza a priori (s_0^2) no es conocida. Para realizar este cálculo es necesario contar con la matriz covarianza de los residuales que se obtiene de la propagación de la varianza (Q_{VV}). Se calculan los residuos normalizados v_i / s_{vi} donde s_{vi} es la raíz cuadrada de la diagonal de la matriz cofactor de los residuos multiplicados por $(\sqrt{v^T P V}) / n$.

El estadístico para Pope es el siguiente:

$$v'_i = V_i / s_{vi} > \tau_{a0}$$

Si se cumple esta desigualdad la i-esima observación es un error grosero.

Los elementos de la ecuación anterior son:

- **a** nivel de significancia,
- **a₀** = $1 - (1 - a/2)^{1/n}$,
- **n** cantidad de observaciones,
- **r** grados de libertad del ajuste,
- **τ_{a0}** es el valor de la distribución Tau para un nivel de confianza de $(1 - a/2)$ y grados de libertad r.

Estimadores Robustos (RREE)

Introducción

En general, la mayoría de los parámetros geodésicos y topográficos se determinan por procedimientos de estimación estadística. El método más comúnmente usado es el de estimación por mínimos cuadrados, un estimador ideal para mediciones distribuidas normalmente salvo por el inconveniente de que en la práctica sucede que algunas observaciones no se ajustan a la distribución normal.

Tenemos que, el método clásico de ajuste por mínimos cuadrados, en el entorno de trabajo definido por el modelo Gauss-Markov, se expresa como:

$$^{(1)} \quad v + B.\Delta = f \quad / \quad v \approx (0, \sigma_0^2.W^{-1})$$

Condición: $\phi = v^t.W.v$ sea mínimo

Siendo f el vector ($n \times 1$) de observaciones, B la matriz ($n \times m$) diseño, Δ el vector ($n \times 1$) de los parámetros incógnita, v el vector ($n \times 1$) de los errores de las observaciones, σ_0^2 la varianza referencial y W la matriz ($n \times n$) de los pesos de las observaciones.

Este modelo asume que los errores de las observaciones acumulados en el vector v , ocurren aleatoriamente y están distribuidos de acuerdo a una distribución normal.

Sin embargo, en el caso de que la muestra este contaminada por un sesgo ("bias" o parámetro b), que puede ser resultado de un error grosero, sistemático o una combinación de ambos, no se puede considerar que esta tenga una distribución normal y por ende la suposición anterior ⁽¹⁾ de que el error de las observaciones está acotado es errónea.

Como consecuencia de esto, la estimación de los parámetros incógnita a través del método clásico de ajuste por mínimos cuadrados (bajo el modelo Gauss-Markov), estará sesgada a causa del parámetro b contaminante.

De esto, podemos concluir que la estimación por mínimos cuadrados no es sensible a las desviaciones significativas de la distribución normal y por ende el resultado del ajuste no es válido cuando estas desviaciones ocurren.

Para solucionar este problema podemos considerar dos opciones:

1. Identificar y remover de la muestra las observaciones "outliers" (observaciones con sesgo) para luego estimar los parámetros de acuerdo a ⁽¹⁾.

2. Adoptar técnicas de estimación que sean sensibles a los posibles sesgos ("bias") mediante la utilización de estimadores robustos.

Al momento de hoy, la primera opción enumerada de identificar las observaciones "outlier" para removerlas, es una tarea muy dificultosa y en algunos casos imposible, para lo que las técnicas de estimadores robustos ofrecen una real alternativa.

Estimadores

Con el objeto de hacer compatibles dos tipos de conocimientos: uno derivado de las observaciones y otro derivado de la teoría, se ha establecido la **Estimación** como un proceso de extracción de información específica a partir de los datos y un modelo empleado.

Los métodos para realizar una estimación utilizan relaciones matemáticas predefinidas, que permiten determinar la información específica, tomando en cuenta los errores y demás efectos perturbadores en las observaciones. El modelo funcional (físico o geométrico) utilizado para realizar las estimaciones son los llamados **Estimadores**.

Un estimador puede ser una expresión matemática o un algoritmo de cálculo para obtener un **Estimado** de los parámetros de una población en base a una muestra de la misma, considerando las condiciones y características del sistema empleado.

El estimado es por lo tanto el valor particular que toma el estimador para una muestra específica de su población. Los estimadores pueden ser agrupados en dos:

- Estimadores Clásicos o Paramétricos
- Estimadores No Paramétricos o Estimadores Robustos

1. Estimadores Clásicos o Paramétricos

Estos tienen asociada un tipo de **Distribución de la población**. Así, por ejemplo, a la Media Aritmética se le asocia la Distribución Normal; a la Mediana se le asocia la Distribución Laplaciana; y a la Media de los Extremos se le asocia la Distribución Rectangular, etc.

A cada una de estas distribuciones se les asocia un criterio de **Norma óptima** prefijada, expresado por medio de las llamadas "condiciones mínimas", basado en la sola existencia de errores accidentales en las observaciones. Un ejemplo

sería que la sumatoria del cuadrado de los residuales sea mínimo en el caso de la Distribución Normal (condición de MMC).

Dentro de los estimadores clásicos podemos encontrar: la Moda, la Media Aritmética, la Media de los Extremos, la Media Armónica, la Media Inarmónica, la Media Geométrica, la Media Cuadrática, la Media de Jeffreys, etc.

2. Estimadores No Paramétricos o Estimadores Robustos

Los estimadores robustos son estimadores libres de la asunción de una forma de distribución de la población de la cual se extrae la muestra y que además no tienen asociada ninguna norma óptima.

O sea, que el modelo del ajuste robusto se basa en la consideración de que la mayoría de las observaciones siguen una distribución normal (N) y solo ocurre un número reducido de observaciones sesgadas (con errores groseros o sistemáticos) con distribución (S) desconocida.

$$F=(1-\varepsilon).N+\varepsilon.S \quad / \quad \varepsilon \text{ es la probabilidad de las observaciones con sesgo}$$

Los principales objetivos de usar los estimadores Robustos se pueden resumir en:

- Construir una medida de seguridad que ponga límite a la influencia de la contaminación escondida.
- Aislar de manera clara los errores groseros para un tratamiento separado si esto es requerido o deseado (basado en testeos que reducen la muestra).

Dentro de los estimadores robustos podemos encontrar: Mediana de HODGES-LEHMANN, estimador BES (Best Easy Systematic), Media Aritmética Múltiple Sucesiva, Trimedia de TUKEY, estimador α -media Equilibrada, estimador de HUBER, método Danés, estimador de HOGG, estimador de SWITZER, estimador de TAKASHI, etc.

Se pueden agrupar en:

- Estimadores tipo **L** (L-estimator), basados en la combinación lineal de estadísticos de orden.
- Estimadores tipo **R** (R-estimator) basados en transformaciones de Rangos.
- Estimadores tipo **M** (M-estimator), basados en la máxima probabilidad (Maximum Likelihood).
- Otros no tan conocidos, estimadores tipo **RM** (RM-estimator), estimadores tipo LMS (LMS estimator), etc.

I. Estimadores de Orden

En los estimadores de orden, las observaciones de la variable aleatoria X deben ser ordenados en orden creciente:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \quad / \quad X_1 < X_2 < X_3 < \dots < X_{n-1} < X_n$$

Ejemplo: **MEDIANA DE HODGES - LEHMANN**

El estimador, que es un algoritmo muy sencillo, es la mediana de los promedios de todos los pares sucesivos de observaciones de una muestra de n observaciones ordenadas en orden creciente o decreciente.

Sea la serie ordenada en orden de menor a mayor (orden creciente): $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$

Promedios sucesivos de a pares: $Y_1 = (X_1 + X_2)/2; Y_2 = (X_2 + X_3)/2; \dots; Y_{n-1} = (X_{n-1} + X_n)/2$

Obteniéndose una nueva serie ordenada: $Y_1; Y_2; Y_3; \dots; Y_{n-1}$

El resultado es la mediana de esta nueva serie: $X_{med} = \frac{1}{2} (X_{n/2} + X_{n/2+1})$

Veámoslo en la práctica:

Sean X_i : 13.5 14.2 14.5 14.7 15.0

Serie de promedios: 13.85 14.35 14.60 14.85

Hallamos la mediana de la serie de promedios, que es una serie par:

$$X_{med} = \frac{1}{2} (X_{4/2} + X_{4/2+1}) = \frac{1}{2} (X_2 + X_3)$$

$$X_{med} = \frac{1}{2} (14.35 + 14.60) = 14.475 \approx 14.48$$

Por lo tanto: $X = 14.48$

Por otro lado, la media aritmética daría: $X = 14.38$

II. Estimadores de Rango

Los test de rango son utilizados para el análisis de datos de supervivencia de una población dada, es decir son específicos para el análisis de la distribución de los tiempos de supervivencia. La función de distribución de la supervivencia (SDF), también conocida como la función del sobreviviente, se utiliza para describir los cursos de la vida de la población de interés.

III. Estimadores de Máxima probabilidad

Se basan en procesos iterativos que mantienen todas las observaciones pero que consideran pesos apropiados, para limitar el efecto de los sesgos, mediante el análisis de los residuales.

La robustez del procedimiento esta contenida en la estimación del peso de cada observación realizada en la iteración.

A continuación se presentan a modo de ejemplo, dos estimadores tipo M, el estimador de Huber y el estimador de MSE.

1) ESTIMADOR DE HUBER

Los estimadores de Huber consideran, mediante un proceso iterativo, la estimación de la máxima probabilidad de cómo se distribuye la muestra.

El Estimador de HUBER usa como función de peso: $P = 1$ si $|V| \leq K \times \sigma$
 $P = K \times \sigma / |V|$ si $|V| > K \times \sigma$

Ejemplo de Huber aplicado a una muestra cualquiera:

Consideremos la siguiente muestra $X_i = 10, 11, 11, 12, 100$

A simple vista la observación 100 aparenta ser un error grosero.

Consideremos una exactitud de las observaciones $\sigma = 5$ unidades y usamos como constante $K = 2$

Entonces $K \times \sigma = 10$

Se procede a utilizar el proceso iterativo para la estimación.

Recordemos que en una serie simple de igual exactitud (lo que significa pesos iguales a la unidad) esta dada por: $X_{ma} = \sum X_i / n = 28.8$

Cálculo de los residuales: $V_i = X_i - X_{ma}$ obteniéndose: 18.8, 17.8, 17.8, 16.8, 71.2

Como todos los residuales V_i son mayores que $K \times \sigma = 10$ se procede al cálculo de los pesos correspondiente a cada observación usando: $P = K \times \sigma / |V_i|$ por lo tanto los pesos son: 0.53, 0.56, 0.56, 0.60, 0.14 respectivamente.

Con estos nuevos pesos calculamos la media aritmética ponderada:

$X_{ma} = \sum (P_i \times X_i) / \sum P_i = 0.53 \times 10 + 0.56 \times 11 + 0.56 \times 11 + 0.60 \times 12 + 0.14 \times 100$

$X_{ma} = 16.24$

Con esta nueva media aritmética calculamos los nuevos residuales:

6.24, 5.24, 5.24, 4.24, 83.76

Se calculan los nuevos pesos tomando en cuenta que si $V \leq 10$ tendrá un peso de **uno** y si es ≥ 10 se le calcula el peso tal como se indicó antes.

Siendo los Pesos: 1, 1, 1, 1, 0.12

Calculamos la nueva media aritmética ponderada obteniéndose:

$$X_{ma} = 1 \times 10 + 1 \times 11 + 1 \times 11 + 1 \times 12 + 0.12 \times 100$$

$$X_{ma} = 13.59$$

Reiterando nuevamente el proceso, se calculan los residuales:

3.59, 2.59, 2.59, 1.59, 86.41

Calculamos los pesos correspondientes a estos nuevos valores:

Sendo los pesos: 1, 1, 1, 1, 0.12

En vista que son los mismos pesos anteriores, se terminan las iteraciones

Obteniéndose: $X = 13.59 \approx 13.6$

2) ESTIMADOR DE MSE

Consiste en la estimación robusta de parámetros geodésicos por mínimos cuadrados, a través de la construcción de la matriz peso en base al error medio cuadrático.

El estimador MSE (mean square error) usa como función peso: $w_i = \frac{\sigma_0^2}{m_i}$

donde m_i es el error medio cuadrático : $m_i = \sigma_0^2 + v_i^2$

Procedimiento:

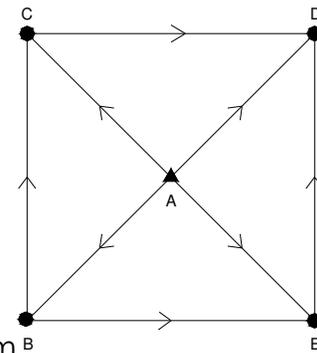
- Se hace un ajuste por el método clásico de mínimos cuadrados (MMC)
- Con los residuales, las varianzas ajustadas y la nueva varianza referencial, se recalculan los pesos con la formula de w_i .
- Se vuelve a realizar el ajuste por MMC
- Se itera hasta la convergencia de los parámetros estimados al nivel determinado de tolerancia.

Ejemplo de MSE aplicado a una nivelación geométrica:

Se considera la siguiente red a compensar a la que se le introducirá un sesgo a modo de testear el estimador. Para ambos casos, con y sin sesgo, se harán los ajustes contrastándolo además con el ajuste clásico (MMC).

- La primera prueba consiste en ajustar por ambos métodos la muestra sin contaminar, con la seguridad que las observaciones no tienen errores groseros.
- La segunda consiste en introducir un error grosero en las observaciones y ajustarlo por ambos métodos. Para esto se le suma 1m al Δh del tramo AB.

Tramo	Dist. (km)	Δh (m)
AB	4	12.48
BE	8	4.53
AE	5	17.10
BC	3	-6.84
AC	6	5.70
CD	12	-8.22
AD	8	-2.48
ED	10	-19.65



Cota A: 53.80m

$$\sigma_{\text{lectura mira}} = 0.005\text{m}$$

$$d_{\text{mira atrás-mira adelante}} = 100\text{m}$$

1er Caso: Ajuste de la red sin contaminar por MMC y MSE

MMC

Método: $v + B \cdot \Delta = f$

Observaciones: $\Delta h_i = 12.48, 4.53, 17.10, -6.84, 5.70, -8.22, -2.48, -19.65$

Sigma de las observaciones: $\sigma_i = 0.032, 0.039, 0.045, 0.035, 0.027, 0.055, 0.050, 0.045$

Cálculo de los pesos ($w_i = 12/d_i$): $w_i = 3, 2, 1.5, 2.4, 4, 1, 1.2, 1.5$

Sigma a priori: $\sigma_0 = 0.055$

Del ajuste surge ...

Sigma a posteriori: $\sigma_{\text{posteriori}} = 0.055$

Cotas = 66.32, 59.49, 51.28, 70.89

Sigma de las cotas ajustadas: $\sigma_{\text{cotas}} = 0.024, 0.026, 0.031, 0.027$

Residuales: $v_i = 0.036, -0.014, -0.040, -0.009, 0.045, 0.039, 0.014, 0.010$

Sigma de las observaciones ajustadas:

$$\sigma_{\Delta h_i} = 0.024, 0.026, 0.032, 0.026, 0.030, 0.035, 0.035, 0.022$$

MSE

El primer paso es el ajuste por el método clásico (resultado anterior)

Para cada iteración, el nuevo $\sigma_0 = \sigma_{\text{posteriori}}$ del paso anterior.

Iteracion 1 - Pesos $w_i = 1.6, 3.6, 1.2, 3.8, 1.1, 1.2, 2.2, 4.8$

Iteracion 2 - Pesos $w_i = 0.8, 5.6, 1.0, 5.3, 0.9, 1.3, 3.6, 5.6$

Iteracion 3 - Pesos $w_i = 0.5, 7.9, 0.8, 6.9, 1.0, 1.3, 5.2, 6.8$

Iteracion 4 - Pesos $w_i = 0.3, 10.3, 0.7, 8.5, 1.0, 1.1, 6.8, 8.0$

Del ajuste surge ...

Sigma a posteriori: $\sigma_{\text{posteriori}} = 0.032$

Cotas = 66.34, 59.50, 51.28, 70.90

Sigma de las cotas ajustadas: $\sigma_{\text{cotas}} = 0.013, 0.009, 0.013, 0.010$

Residuales: $v_i = 0.061, 0.000, -0.041, 0.001, 0.029, 0.029, -0.001, -0.001$

Sigma de las observaciones ajustadas:

$\sigma_{L_i} = 0.013, 0.009, 0.013, 0.010, 0.015, 0.015, 0.011, 0.011$

2º Caso: Ajuste de la red contaminada por MMC y MSE

MMC

Método: $v + B \cdot \Delta = f$

Observaciones: $\Delta h_i = \mathbf{13.48}, 4.53, 17.10, -6.84, 5.70, -8.22, -2.48, -19.65$

Sigma de las observaciones: $\sigma_i = 0.032, 0.039, 0.045, 0.035, 0.027, 0.055, 0.050, 0.045$

Cálculo de los pesos ($w_i = 12/d_i$): $w_i = 3, 2, 1.5, 2.4, 4, 1, 1.2, 1.5$

Sigma a priori: $\sigma_0 = 0.055$

Del ajuste surge ...

Sigma a posteriori: $\sigma_{\text{posteriori}} = 0.539$

Cotas = 66.86, 59.81, 51.43, 71.09

Sigma de las cotas ajustadas: $\sigma_{\text{cotas}} = 0.023, 0.026, 0.031, 0.027$

Residuales: $v_i = -0.420, 0.319, 0.114, 0.187, -0.303, -0.004, -0.166, -0.201$

Sigma de las observaciones ajustadas:

$\sigma_{\Delta h_i} = 0.230, 0.251, 0.305, 0.262, 0.289, 0.330, 0.335, 0.226$

MSE

El primer paso es el ajuste por el método clásico (resultado anterior)

Para cada iteración, el nuevo $\sigma_0 = \sigma_{\text{posteriori}}$ del paso anterior.

Iteracion 1 - Pesos $w_i = 1.3, 1.8, 2.7, 2.8, 1.7, 2.7, 2.1, 3.2$

Iteracion 2 - Pesos $w_i = 0.4, 2.5, 4.9, 3.7, 2.2, 4.8, 3.5, 2.9$

Iteracion 3 - Pesos $w_i = 0.1, 4.5, 8.6, 5.8, 3.5, 7.7, 6.0, 3.4$

Iteracion 4 - Pesos $w_i = 0.04, 8.1, 12.2, 8.5, 5.7, 10.2, 10.5, 4.6$

Iteracion 5 - Pesos $w_i = 0.02, 12.3, 11.5, 10.1, 7.9, 9.3, 17.5, 6.1$

Iteracion 6 - Pesos $w_i = 0.01, 16.3, 8.6, 12.2, 9.6, 6.9, 26.0, 7.4$

Iteracion 7 - Pesos $w_i = 0.009, 20.1, 6.3, 16.5, 11.2, 5.1, 34.4, 8.5$

Iteracion 8 - Pesos $w_i = 0.007, 23.8, 4.9, 22.6, 12.6, 3.9, 41.9, 9.6$

Del ajuste surge ...

Sigma a posteriori: $\sigma_{\text{posteriori}} = 0.072$

Cotas = 66.36, 59.51, 51.29, 70.90

Sigma de las cotas ajustadas: $\sigma_{\text{cotas}} = 0.018, 0.012, 0.015, 0.013$

Residuales: $v_i = -0.920, 0.006, -0.033, 0.001, 0.010, 0.036, 0.001, -0.014$

Sigma de las observaciones ajustadas: $\sigma_{L_i} = 0.018, 0.012, 0.015, 0.013, 0.017, 0.017, 0.010, 0.018$

Conclusiones:

Del análisis de los resultados del problema de nivelación, podemos concluir que en el caso de no existir sesgo en las observaciones, la estimación por el método robusto necesariamente debe dar igual a la estimación por el método clásico, dentro de una tolerancia prefijada. Suponemos que la mejor precisión obtenida por el método de ajuste robusto MSE se debe al proceso de iteración, pero consideramos que este análisis escapa al presente trabajo pudiendo ser motivo de una nueva investigación.

En el caso del ajuste con la muestra contaminada, encontramos que los resultados de la estimación por ambos métodos confirman por un lado, la sensibilidad del método robusto a las muestras contaminadas y el riesgo del ajuste por el método clásico en muestras de dudosa distribución.

Además, encontramos que los estimadores robustos de orden ofrecen la ventaja de que evitan el "uso y abuso" que se ha hecho de la media aritmética, para el caso de muestras de una misma observación.

Del análisis de las diferentes lecturas realizadas en publicaciones, destacamos dos cosas. La primera es que los estimadores robustos facilitan los ajustes de sistemas complejos como redes geodesicas, que combinan grandes cantidades de observaciones (en incremento debido al desarrollo del GNSS, entre otros) de distintos tipos, y que resultan complicados al intentar evaluar los resultados de la estimación por el método clásico de mínimos cuadrados. Y la segunda es que debido al gran uso de la técnica GPS en la Geodesia actual, se ha fomentado la investigación de los estimadores robustos (sobre todo los de "maximum likelihood"), ya que el receptor GPS recibe una gran cantidad de datos durante un tiempo largo de observación y estos pueden estar afectados por distintos sistematismos vinculados a cada período de observación.

Por último concluimos, que la principal utilidad de los estimadores robustos no es filtrar los errores que se pasan sustancialmente de la tolerancia, sino que son utilizados para filtrar las observaciones que se encuentran en la zona de borde y que pueden estar afectando la precisión de la calidad de las observaciones.

ANEXO 1

1er Caso: Ajuste de la red sin contaminar por MMC y MSE

Ajuste de las magnitudes: $v + B\Delta = f$

Algoritmo: $v+B\Delta=f$, W , $N=B^t.W.B$, $t=B^t.W.f$, $\Delta=N^{-1}.t$

Propagación: $\sigma_o^2=(v^t.W.v)/r$, $\Sigma_{ll}=\sigma_o^2. B.N^{-1}.B^t$, $\Sigma_{\Delta\Delta}=\sigma_o^2.N^{-1}$

Cálculos realizados en el software MatLab

Se nombró: $s=\sigma_o^2$, $\Delta=D$, $\Sigma_{ll}=E$, $\Sigma_{\Delta\Delta}=Ed$.

Además se agregó una letra b como notación de que se está trabajando con la muestra sin contaminar.

H es un paso intermedio para el cálculo de la matriz peso por el método MSE.

Fórmula:

Hb1=[s/(E(1,1)+(v(1,1)^2));s/(E(2,2)+(v(2,1)^2));s/(E(3,3)+(v(3,1)^2));s/(E(4,4)+(v(4,1)^2));s/(E(5,5)+(v(5,1)^2));s/(E(6,6)+(v(6,1)^2));s/(E(7,7)+(v(7,1)^2));s/(E(8,8)+(v(8,1)^2))]

MMC

f =

- 66.2800
- 59.5000
- 51.3200
- 70.9000
- 4.5300
- 19.6500
- 8.2200
- 6.8400

B =

-1	0	0	0
0	-1	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	-1
1	0	0	-1
0	0	-1	1
0	1	-1	0
1	-1	0	0

W =

3.0000	0	0	0	0	0	0	0
0	2.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	1.5000	0	0	0	0	0
0	0	0	2.4000	0	0	0	0
0	0	0	0	1.5000	0	0	0
0	0	0	0	0	1.2000	0	0
0	0	0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	4.0000

Nb =

8.5000	-4.0000	0	-1.5000
-4.0000	7.0000	-1.0000	0
0	-1.0000	3.7000	-1.2000
-1.5000	0	-1.2000	5.1000

tb =

219.4050
99.8600
45.1800
200.5350

Db =

66.3161
59.4864
51.2799
70.8912

vb =

0.0361
-0.0136
-0.0401
-0.0088
0.0451
0.0387
0.0136
0.0102

sb = 0.0031

Qb =

0.1814	0.1110	0.0512	0.0654	-0.1160	-0.0142	-0.0598	-0.0704
0.1110	0.2170	0.0749	0.0503	-0.0607	0.0247	-0.1420	0.1060
0.0512	0.0749	0.3198	0.0903	0.0391	0.2295	0.2449	0.0237
0.0654	0.0503	0.0903	0.2366	0.1712	-0.1463	0.0400	-0.0151
-0.1160	-0.0607	0.0391	0.1712	0.2872	-0.1321	0.0998	0.0553
-0.0142	0.0247	0.2295	-0.1463	-0.1321	0.3758	0.2048	0.0389

-0.0598	-0.1420	0.2449	0.0400	0.0998	0.2048	0.3869	-0.0823
-0.0704	0.1060	0.0237	-0.0151	0.0553	0.0389	-0.0823	0.1764

Eb =

0.0006	0.0003	0.0002	0.0002	-0.0004	-0.0000	-0.0002	-0.0002
0.0003	0.0007	0.0002	0.0002	-0.0002	0.0001	-0.0004	0.0003
0.0002	0.0002	0.0010	0.0003	0.0001	0.0007	0.0008	0.0001
0.0002	0.0002	0.0003	0.0007	0.0005	-0.0005	0.0001	-0.0000
-0.0004	-0.0002	0.0001	0.0005	0.0009	-0.0004	0.0003	0.0002
-0.0000	0.0001	0.0007	-0.0005	-0.0004	0.0012	0.0006	0.0001
-0.0002	-0.0004	0.0008	0.0001	0.0003	0.0006	0.0012	-0.0003
-0.0002	0.0003	0.0001	-0.0000	0.0002	0.0001	-0.0003	0.0005

Edd =

1.0e-003 *

0.5593	0.3422	0.1579	0.2017
0.3422	0.6690	0.2311	0.1550
0.1579	0.2311	0.9860	0.2784
0.2017	0.1550	0.2784	0.7293

Db =

66.3161
59.4864
51.2799
70.8912

raiz (Edd)=

0.0236	0.0185	0.0126	0.0142
0.0185	0.0259	0.0152	0.0125
0.0126	0.0152	0.0314	0.0167
0.0142	0.0125	0.0167	0.0270

Cotas Ajustadas por MMC y sus respectivas desviaciones estándar luego del ajuste.

MSE

Iteración 1

Hb1 =

1.6522
3.6063
1.1904
3.8221
1.0574
1.1593
2.2383
4.7556

Wb1 =

1.6522	0	0	0	0	0	0	0
0	3.6063	0	0	0	0	0	0
0	0	1.1904	0	0	0	0	0
0	0	0	3.8221	0	0	0	0
0	0	0	0	1.0574	0	0	0
0	0	0	0	0	1.1593	0	0
0	0	0	0	0	0	2.2383	0
0	0	0	0	0	0	0	4.7556

Nb1 =

7.4652	-4.7556	0	-1.0574
-4.7556	10.6002	-2.2383	0
0	-2.2383	4.5880	-1.1593
-1.0574	0	-1.1593	6.0388

tb1 =

137.2435
200.4432
19.9094
298.5588

Db1 =

66.3269
59.4940
51.2794
70.8981

vb1 =

0.0469
-0.0060
-0.0406
-0.0019
0.0412
0.0313
0.0054
0.0071

sb1 = 0.0022

Qb1 =

0.2095	0.1077	0.0650	0.0492	-0.1604	0.0158	-0.0428	-0.1018
0.1077	0.1612	0.0877	0.0357	-0.0720	0.0520	-0.0735	0.0534
0.0650	0.0877	0.2770	0.0646	-0.0004	0.2125	0.1894	0.0227
0.0492	0.0357	0.0646	0.1866	0.1374	-0.1220	0.0289	-0.0135
-0.1604	-0.0720	-0.0004	0.1374	0.2978	-0.1379	0.0716	0.0883
0.0158	0.0520	0.2125	-0.1220	-0.1379	0.3345	0.1605	0.0361

-0.0428 -0.0735 0.1894 0.0289 0.0716 0.1605 0.2629 -0.0308
 -0.1018 0.0534 0.0227 -0.0135 0.0883 0.0361 -0.0308 0.1553

Eb1 =

1.0e-003 *

0.4702 0.2417 0.1458 0.1103 -0.3599 0.0355 -0.0959 -0.2285
 0.2417 0.3617 0.1967 0.0801 -0.1617 0.1166 -0.1650 0.1199
 0.1458 0.1967 0.6216 0.1449 -0.0009 0.4768 0.4250 0.0509
 0.1103 0.0801 0.1449 0.4187 0.3084 -0.2738 0.0648 -0.0302
 -0.3599 -0.1617 -0.0009 0.3084 0.6683 -0.3093 0.1607 0.1982
 0.0355 0.1166 0.4768 -0.2738 -0.3093 0.7506 0.3602 0.0811
 -0.0959 -0.1650 0.4250 0.0648 0.1607 0.3602 0.5899 -0.0691
 -0.2285 0.1199 0.0509 -0.0302 0.1982 0.0811 -0.0691 0.3484

.....iteracion 4

sb4 = 0.0010

Qb4 =

0.1698 0.0700 0.0584 0.0221 -0.1477 0.0363 -0.0116 -0.0998
 0.0700 0.0798 0.0650 0.0135 -0.0565 0.0515 -0.0148 0.0098
 0.0584 0.0650 0.1707 0.0238 -0.0346 0.1468 0.1057 0.0066
 0.0221 0.0135 0.0238 0.0991 0.0771 -0.0753 0.0103 -0.0086
 -0.1477 -0.0565 -0.0346 0.0771 0.2248 -0.1116 0.0219 0.0912
 0.0363 0.0515 0.1468 -0.0753 -0.1116 0.2222 0.0954 0.0152
 -0.0116 -0.0148 0.1057 0.0103 0.0219 0.0954 0.1205 -0.0032
 -0.0998 0.0098 0.0066 -0.0086 0.0912 0.0152 -0.0032 0.1096

Eb4 =

1.0e-003 *

0.1742 0.0718 0.0599 0.0226 -0.1515 0.0372 -0.0119 -0.1024
 0.0718 0.0818 0.0667 0.0139 -0.0580 0.0528 -0.0152 0.0100
 0.0599 0.0667 0.1751 0.0244 -0.0354 0.1506 0.1084 0.0068
 0.0226 0.0139 0.0244 0.1017 0.0791 -0.0773 0.0106 -0.0088
 -0.1515 -0.0580 -0.0354 0.0791 0.2306 -0.1145 0.0225 0.0936
 0.0372 0.0528 0.1506 -0.0773 -0.1145 0.2279 0.0978 0.0156
 -0.0119 -0.0152 0.1084 0.0106 0.0225 0.0978 0.1236 -0.0032
 -0.1024 0.0100 0.0068 -0.0088 0.0936 0.0156 -0.0032 0.1124

Qdd4 =

0.1698 0.0700 0.0584 0.0221
 0.0700 0.0798 0.0650 0.0135
 0.0584 0.0650 0.1707 0.0238
 0.0221 0.0135 0.0238 0.0991

Edd4 =

1.0e-003 *

0.1742 0.0718 0.0599 0.0226
 0.0718 0.0818 0.0667 0.0139

0.0599 0.0667 0.1751 0.0244
 0.0226 0.0139 0.0244 0.1017

Db4 =

66.3413
 59.5002
 51.2793
 70.9005

raiz (Edd4)=

0.0132 0.0085 0.0077 0.0048
 0.0085 0.0090 0.0082 0.0037
 0.0077 0.0082 0.0132 0.0049
 0.0048 0.0037 0.0049 0.0101

Cotas Ajustadas por MSE y sus respectivas desviaciones estándar luego del ajuste.

ANEXO 2

2º Caso: Ajuste de la red contaminada por MMC y MSE

Ajuste de las magnitudes: $v + B\Delta = f$

Algoritmo: $v+B\Delta=f$, W , $N=B^t.W.B$, $t=B^t.W.f$, $\Delta=N^{-1}.t$

Propagación: $\sigma_o^2=(v^t.W.v)/r$, $\Sigma_{ll}=\sigma_o^2. B.N^{-1}.B^t$, $\Sigma_{\Delta\Delta}=\sigma_o^2.N^{-1}$

Cálculos realizados en el software MatLab

Se nombró: $s=\sigma_o^2$, $\Delta=D$, $\Sigma_{ll}=E$, $\Sigma_{\Delta\Delta}=Ed$

H es un paso intermedio para el cálculo de la matriz peso por el método MSE.

Fórmula:

Hb1=[s/(E(1,1)+(v(1,1)^2));s/(E(2,2)+(v(2,1)^2));s/(E(3,3)+(v(3,1)^2));s/(E(4,4)+(v(4,1)^2));s/(E(5,5)+(v(5,1)^2));s/(E(6,6)+(v(6,1)^2));s/(E(7,7)+(v(7,1)^2));s/(E(8,8)+(v(8,1)^2))]

MMC

B =

-1 0 0 0
 0 -1 0 0
 0 0 -1 0
 0 0 0 -1
 1 0 0 -1
 0 0 -1 1
 0 1 -1 0
 1 -1 0 0

f =

-67.2800
 -59.5000
 -51.3200
 -70.9000
 -4.5300
 19.6500
 8.2200
 6.8400

W =

3.0000	0	0	0	0	0	0	0
0	2.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	1.5000	0	0	0	0	0
0	0	0	2.4000	0	0	0	0
0	0	0	0	1.5000	0	0	0
0	0	0	0	0	1.2000	0	0
0	0	0	0	0	0	1.0000	0
0	0	0	0	0	0	0	4.0000

N =

8.5000	-4.0000	0	-1.5000
-4.0000	7.0000	-1.0000	0
0	-1.0000	3.7000	-1.2000
-1.5000	0	-1.2000	5.1000

t =

222.4050
 99.8600
 45.1800
 200.5350

D =

66.8604
 59.8193
 51.4336
 71.0874

v =

-0.4196
 0.3193
 0.1136
 0.1874
 -0.3030
 -0.0039
 -0.1657
 -0.2011

s = 0.2907

Q =

0.1814	0.1110	0.0512	0.0654	-0.1160	-0.0142	-0.0598	-0.0704
0.1110	0.2170	0.0749	0.0503	-0.0607	0.0247	-0.1420	0.1060
0.0512	0.0749	0.3198	0.0903	0.0391	0.2295	0.2449	0.0237
0.0654	0.0503	0.0903	0.2366	0.1712	-0.1463	0.0400	-0.0151
-0.1160	-0.0607	0.0391	0.1712	0.2872	-0.1321	0.0998	0.0553
-0.0142	0.0247	0.2295	-0.1463	-0.1321	0.3758	0.2048	0.0389
-0.0598	-0.1420	0.2449	0.0400	0.0998	0.2048	0.3869	-0.0823
-0.0704	0.1060	0.0237	-0.0151	0.0553	0.0389	-0.0823	0.1764

E =

0.0527	0.0323	0.0149	0.0190	-0.0337	-0.0041	-0.0174	-0.0205
0.0323	0.0631	0.0218	0.0146	-0.0176	0.0072	-0.0413	0.0308
0.0149	0.0218	0.0930	0.0263	0.0114	0.0667	0.0712	0.0069
0.0190	0.0146	0.0263	0.0688	0.0498	-0.0425	0.0116	-0.0044
-0.0337	-0.0176	0.0114	0.0498	0.0835	-0.0384	0.0290	0.0161
-0.0041	0.0072	0.0667	-0.0425	-0.0384	0.1092	0.0595	0.0113
-0.0174	-0.0413	0.0712	0.0116	0.0290	0.0595	0.1125	-0.0239
-0.0205	0.0308	0.0069	-0.0044	0.0161	0.0113	-0.0239	0.0513

MSE

Iteración 1

H1 =

- 1.2704
- 1.7613
- 2.7458
- 2.7978
- 1.6585
- 2.6609
- 2.0773
- 3.1691

W1 =

1.2704	0	0	0	0	0	0	0
0	1.7613	0	0	0	0	0	0
0	0	2.7458	0	0	0	0	0
0	0	0	2.7978	0	0	0	0
0	0	0	0	1.6585	0	0	0
0	0	0	0	0	2.6609	0	0
0	0	0	0	0	0	2.0773	0
0	0	0	0	0	0	0	3.1691

N1 =

6.0980	-3.1691	0	-1.6585
-3.1691	7.0077	-2.0773	0
0	-2.0773	7.4840	-2.6609
-1.6585	0	-2.6609	7.1172

t1 =

99.6380
100.1986
71.5516
258.1656

D1 =

66.6666
59.6755
51.3737
71.0154

v1 =

-0.6134
0.1755
0.0537
0.1154
-0.1812
0.0084
-0.0817
-0.1511

s1 = 0.1796

Q1 =

0.2588	0.1374	0.0687	0.0860	-0.1728	-0.0173	-0.0687	-0.1214
0.1374	0.2306	0.0869	0.0645	-0.0729	0.0224	-0.1437	0.0932
0.0687	0.0869	0.1885	0.0865	0.0178	0.1020	0.1016	0.0182
0.0860	0.0645	0.0865	0.1929	0.1069	-0.1064	0.0220	-0.0215
-0.1728	-0.0729	0.0178	0.1069	0.2797	-0.0891	0.0906	0.0999
-0.0173	0.0224	0.1020	-0.1064	-0.0891	0.2084	0.0796	0.0397
-0.0687	-0.1437	0.1016	0.0220	0.0906	0.0796	0.2452	-0.0750
-0.1214	0.0932	0.0182	-0.0215	0.0999	0.0397	-0.0750	0.2146

E1 =

0.0465	0.0247	0.0123	0.0154	-0.0310	-0.0031	-0.0123	-0.0218
0.0247	0.0414	0.0156	0.0116	-0.0131	0.0040	-0.0258	0.0167
0.0123	0.0156	0.0339	0.0155	0.0032	0.0183	0.0182	0.0033
0.0154	0.0116	0.0155	0.0346	0.0192	-0.0191	0.0039	-0.0039
-0.0310	-0.0131	0.0032	0.0192	0.0502	-0.0160	0.0163	0.0179

-0.0031 0.0040 0.0183 -0.0191 -0.0160 0.0374 0.0143 0.0071
 -0.0123 -0.0258 0.0182 0.0039 0.0163 0.0143 0.0440 -0.0135
 -0.0218 0.0167 0.0033 -0.0039 0.0179 0.0071 -0.0135 0.0385

Iteración 2

H2 =

0.4248
 2.4873
 4.8881
 3.7455
 2.1622
 4.7894
 3.5409
 2.9263

W2 =

0.4248	0	0	0	0	0	0	0
0	2.4873	0	0	0	0	0	0
0	0	4.8881	0	0	0	0	0
0	0	0	3.7455	0	0	0	0
0	0	0	0	2.1622	0	0	0
0	0	0	0	0	4.7894	0	0
0	0	0	0	0	0	3.5409	0
0	0	0	0	0	0	0	2.9263

N2 =

5.5133	-2.9263	0	-2.1622
-2.9263	8.9546	-3.5409	0
0	-3.5409	13.2184	-4.7894
-2.1622	0	-4.7894	10.6971

t2 =

38.7992
 157.0847
 127.6414
 369.4636

D2 =

66.4767
 59.5601
 51.3190
 70.9525

v2 =

-0.8033
 0.0601
 -0.0010

0.0525
 -0.0542
 0.0166
 -0.0211
 -0.0766

s2 = 0.0800

Q2 =

0.2737	0.1132	0.0601	0.0823	-0.1915	-0.0221	-0.0531	-0.1605
0.1132	0.1747	0.0658	0.0523	-0.0609	0.0134	-0.1089	0.0614
0.0601	0.0658	0.1166	0.0644	0.0042	0.0522	0.0508	0.0056
0.0823	0.0523	0.0644	0.1389	0.0567	-0.0746	0.0120	-0.0299
-0.1915	-0.0609	0.0042	0.0567	0.2482	-0.0525	0.0651	0.1306
-0.0221	0.0134	0.0522	-0.0746	-0.0525	0.1268	0.0388	0.0355
-0.0531	-0.1089	0.0508	0.0120	0.0651	0.0388	0.1598	-0.0558
-0.1605	0.0614	0.0056	-0.0299	0.1306	0.0355	-0.0558	0.2219

E2 =

0.0219	0.0091	0.0048	0.0066	-0.0153	-0.0018	-0.0042	-0.0128
0.0091	0.0140	0.0053	0.0042	-0.0049	0.0011	-0.0087	0.0049
0.0048	0.0053	0.0093	0.0051	0.0003	0.0042	0.0041	0.0004
0.0066	0.0042	0.0051	0.0111	0.0045	-0.0060	0.0010	-0.0024
-0.0153	-0.0049	0.0003	0.0045	0.0198	-0.0042	0.0052	0.0104
-0.0018	0.0011	0.0042	-0.0060	-0.0042	0.0101	0.0031	0.0028
-0.0042	-0.0087	0.0041	0.0010	0.0052	0.0031	0.0128	-0.0045
-0.0128	0.0049	0.0004	-0.0024	0.0104	0.0028	-0.0045	0.0177

.....

Iteración 8

H8 =

0.0073
 23.8201
 4.8560
 22.5681
 12.5919
 3.8900
 41.9055
 9.5585

W8 =

0.0073	0	0	0	0	0	0	0
0	23.8201	0	0	0	0	0	0
0	0	4.8560	0	0	0	0	0
0	0	0	22.5681	0	0	0	0
0	0	0	0	12.5919	0	0	0

0	0	0	0	0	3.8900	0	0
0	0	0	0	0	0	41.9055	0
0	0	0	0	0	0	0	9.5585

N8 =

22.1578	-9.5585	0	-12.5919
-9.5585	75.2840	-41.9055	0
0	-41.9055	50.6514	-3.8900
-12.5919	0	-3.8900	39.0500

t8 =

1.0e+003 *
 0.0088
 1.6964
 -0.1717
 1.7336

D8 =

66.3605
 59.5064
 51.2869
 70.9006

v8 =

-0.9195
 0.0064
 -0.0331
 0.0006
 0.0101
 0.0363
 0.0005
 -0.0140

s8 = 0.0052

Q8 =

0.0654	0.0172	0.0160	0.0227	-0.0428	-0.0067	-0.0012	-0.0482
0.0172	0.0293	0.0249	0.0080	-0.0092	0.0168	-0.0044	0.0121
0.0160	0.0249	0.0410	0.0092	-0.0067	0.0318	0.0162	0.0089
0.0227	0.0080	0.0092	0.0338	0.0112	-0.0246	0.0012	-0.0147
-0.0428	-0.0092	-0.0067	0.0112	0.0539	-0.0179	0.0024	0.0336
-0.0067	0.0168	0.0318	-0.0246	-0.0179	0.0564	0.0149	0.0236
-0.0012	-0.0044	0.0162	0.0012	0.0024	0.0149	0.0206	-0.0032
-0.0482	0.0121	0.0089	-0.0147	0.0336	0.0236	-0.0032	0.0604

E8 =

1.0e-003 *

0.3404	0.0895	0.0831	0.1180	-0.2224	-0.0350	-0.0064	-0.2509
0.0895	0.1524	0.1293	0.0417	-0.0477	0.0876	-0.0231	0.0630
0.0831	0.1293	0.2133	0.0480	-0.0350	0.1653	0.0840	0.0462
0.1180	0.0417	0.0480	0.1760	0.0580	-0.1280	0.0063	-0.0763
-0.2224	-0.0477	-0.0350	0.0580	0.2803	-0.0930	0.0127	0.1746
-0.0350	0.0876	0.1653	-0.1280	-0.0930	0.2933	0.0777	0.1225
-0.0064	-0.0231	0.0840	0.0063	0.0127	0.0777	0.1072	-0.0167
-0.2509	0.0630	0.0462	-0.0763	0.1746	0.1225	-0.0167	0.3139

D8 =

66.3605

59.5064

51.2869

70.9006

SD D8 =

0.0184 0.0095 0.0091 0.0109

0.0095 0.0123 0.0114 0.0065

0.0091 0.0114 0.0146 0.0069

0.0109 0.0065 0.0069 0.0133

Aquí se detuvo la iteración ya que la diferencia entre cotas es menor que la precisión de las observaciones.

Evaluación de los Modelos Paramétricos

A los efectos de realizar los estudios presentados anteriormente y su posterior validación, se detalla la metodología utilizada.

Enfoque empírico clásico

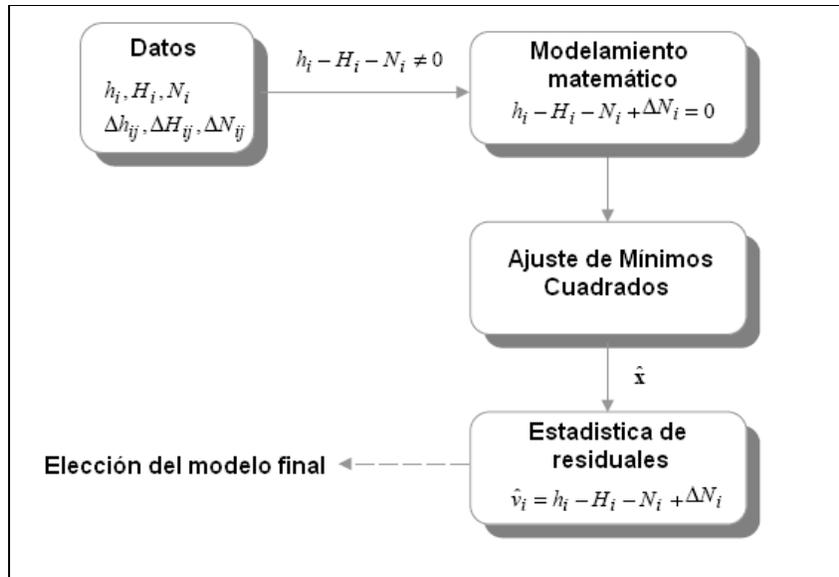
El método más común utilizado en la práctica para evaluar el rendimiento de los modelos paramétricos es calcular las estadísticas para los residuales después de realizado el ajuste de mínimos cuadrados. Los residuales para cada estación de la red, v_i , se calculan como sigue:

$$v_i = h_i - H_i - N_i + \Delta N_i$$

El modelo que da como resultado el conjunto más pequeño de residuales se considera el más apropiado ('mejor' ajuste). Se destaca la reducción en el valor promedio a cero impuesta por el ajuste de mínimos cuadrados. En efecto, estos valores dan una evaluación de la precisión del modelo como indican qué tan bien los conjuntos de datos encajan entre sí.

El estadístico que se utiliza en este enfoque es el RMS (error medio cuadrático) que se calcula como: $RMS = \sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)}$.

Uno de los principales problemas encontrados cuando se utiliza este método empírico como el único medio para seleccionar entre diferentes modelos es que el RMS más bajo generalmente corresponde al modelo de orden más alto. De hecho, a medida que aumenta el número de parámetros en el modelo, disminuye la media cuadrática asociada (RMS). Por lo tanto, este método es válido para las pruebas de la precisión del modelo, pero no debe interpretarse como la exactitud o la capacidad de predicción del modelo.



Enfoque empírico Clásico.-

Validación Cruzada (Cross Validation)

Un enfoque empírico adicional que se puede utilizar para complementar el método anterior y obtener una medida más realista de la exactitud de los modelos es conocida como Validación Cruzada.

El proceso general puede resumirse en cuatro pasos:

- (i) Seleccionar un subconjunto de puntos de control en el área de interés.
- (ii) Usar los puntos seleccionados en el ajuste de mínimos cuadrados para calcular los parámetros del modelo.
- (iii) Utilizar el modelo calculado para predecir los valores residuales en nuevos puntos, no incluidos en el subconjunto original.
- (iv) Comparar los valores previstos en el paso (iii) con los puntos de altura 'conocido'.

Un problema práctico importante con el uso de este enfoque es que los resultados dependen de la exactitud de los subconjuntos de puntos utilizados para la comparación. A menudo no se conocen la exactitud de los puntos. Además, es preferible utilizar tantos datos como sea posible con el fin de calcular los parámetros desconocidos.

Para aliviar estos problemas, se adopta la siguiente simplificación con respecto a los pasos anteriores:

- (i) Seleccionar todos menos un punto P.
- (ii) Utilizar el subconjunto de n-1 puntos en el ajuste de mínimos cuadrados para calcular los parámetros del modelo.
- (iii) Aplicar el modelo calculado para predecir el valor residual del punto P.

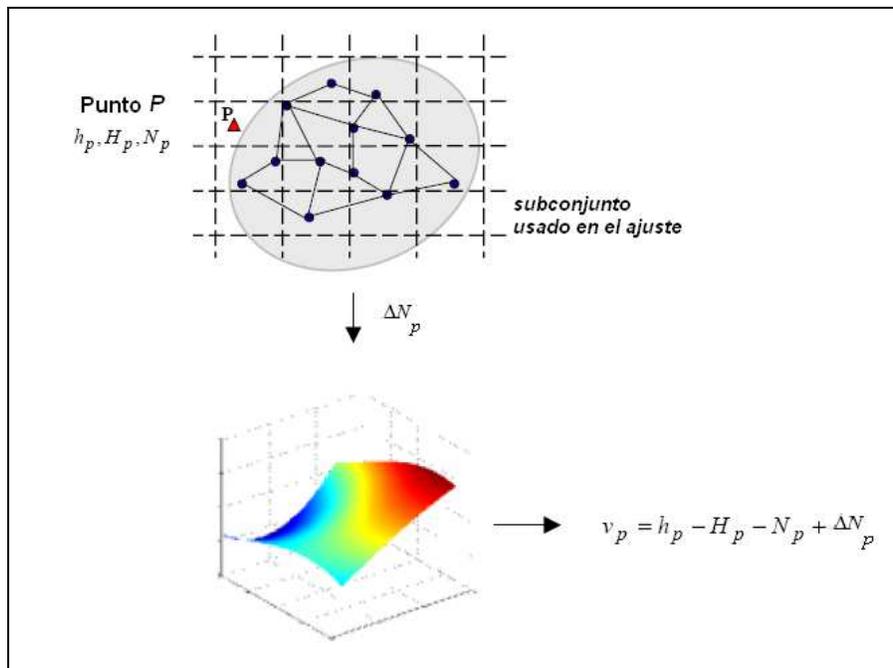
(iv) Comparar los valores calculados con la altura conocida del punto P.

$$v_i = h_i - H_i - N_i + \Delta N_i$$

(v) Repetir pasos (i)-(iv) para cada punto de la red y calcular el promedio RMS:

$$RMS = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)}$$

El RMS calculado de esta manera proporciona una indicación más realista de la exactitud del modelo paramétrico seleccionado y su desempeño como una superficie de predicción de un nuevo punto. Es el esquema de prueba empírico preferido, ya que no depende exclusivamente de la exactitud de un solo punto o un pequeño subconjunto de puntos. También mantiene la redundancia de datos alta para calcular los parámetros en el ajuste de mínimos cuadrados.



Validación Cruzada.-